

## 考虑分层损伤的完全抛物线剪切滞后模型\*

崔昭霞 李庆芬 曹茂盛 杨尚林

(哈尔滨工程大学机电学院, 哈尔滨 150001)

**摘 要** 横向基体开裂和分层损伤是正交层板复合材料的主要损伤类型。与现有完全抛物线剪切滞后分析模型不同, 本文提出了包含横向开裂裂尖引起分层损伤的完全抛物线模型。依此模型计算了材料的刚度衰减, 并与不包含分层的完全抛物线、不完全抛物线等剪切滞后分析模型预测结果作了计算比较, 结果表明, 在应力较高的情况下, 本文提出的分析模型所得的预测结果与实验值符合得最好。

**关键词** 纤维增强层板复合材料, 分层损伤, 完全抛物线剪滞模型

**中图分类号** TB33

**文献标识码** A

**文章编号** 0412-1961(2001)10-1027-04

## A COMPLETE PARABOLIC SHEAR-LAG MODEL CONTAINING DELAMINATION DAMAGE

CUI Zhaoxia, LI Qingfen, CAO Maosheng, YANG Shanglin

College of Mechanical & Electrical Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001

Correspondent: CUI Zhaoxia. Tel: (0471)4944016, E-mail: cuizhaoxia@sina.com

Manuscript received 2001-04-23, in revised form 2001-06-29

**ABSTRACT** A complete parabolic shear-lag model containing delamination damage induced by transverse cracks was proposed and applied to predict the stiffness reduction by transverse cracking in cross laminated composite materials. The relation of stress and transverse crack density was also studied. The predictions from the incomplete parabolic shear-lag analysis model, the complete parabolic shear-lag analysis model and the analysis model proposed in this paper have been compared. Results show that the Young's modulus reduction values obtained by our analysis model are better agreement with the experimental ones than other models.

**KEY WORDS** fiber-reinforced composite laminate, delamination damage, parabolic shear-lag model

正交铺层是由称为  $0^\circ$  层与  $90^\circ$  层相互正交铺层组成, 由它组成的层板复合材料是最基本的构造形式。铺层往往由纤维和基体材料组成, 人们对其失效过程的研究主要集中在将横向裂纹密度作为应用载荷的函数, 对横向裂纹发生的位置和积累过程进行理论预测。然而, 在应力较高的情况下, 尤其是当横向开裂发生且裂尖引起层间分层损伤时, 会引起复合材料宏观性能的一系列变化。因此, 对这种损伤现象进行研究是十分必要的。剪切滞后分析方法是研究横向开裂裂纹周围应力分布的简单有效的方法, 有研究者提出了修正的不完全抛物线模型<sup>[1]</sup>, 假设穿过  $90^\circ$  层厚度方向的纵向位移分布为抛物线型, 而穿过  $0^\circ$  层厚度方向的纵向位移为常量, 修正了假设穿过  $90^\circ$  层及  $0^\circ$  层厚度方向的纵向位移均为常量的不完全抛物线剪滞模

型, 但事实上, 这种假设仍然是不够完善的, 因为  $0^\circ$  层和  $90^\circ$  层的横向剪切模量属于同一数量级, 因此, 又有人改进了不完全抛物线的剪切滞后模型, 提出完全抛物线的剪切滞后分析模型<sup>[2,3]</sup>, 但文献中的完全抛物线损伤模型均未考虑横向裂纹裂尖引起分层损伤的发生, 而分层损伤却是不可忽视的。因此, 本文提出了包含横向开裂裂尖引起分层损伤的完全抛物线模型, 并依此模型分析了层板复合材料基体开裂的应力应变分布, 预测了横向开裂及由横向开裂裂尖引起分层损伤造成的材料刚度衰减, 研究了应力与横向开裂密度的关系, 并与不包含分层的完全抛物线及不完全抛物线等剪切滞后分析模型预测结果作了计算比较。

### 1 分析模型的提出及公式推导

#### 1.1 考虑分层损伤的完全抛物线剪切滞后模型的建立

在应力较高时, 横向开裂的裂尖往往会引起分层现象发生, 故本文作如下理论分析与公式推导, 得出横向开裂引起分层损伤后应力的抛物线分析模型, 用该模型更全面、

\* 收到初稿日期: 2001-04-23, 收到修改稿日期: 2001-06-29

作者简介: 崔昭霞, 女, 1973 年生, 蒙古族, 博士生

真实地计算出在较高应力情况下横向开裂层板的应力分布。图 1 示出正交层板发生的横向(即垂直于受力方向)开裂现象及引起分层损伤的情况。

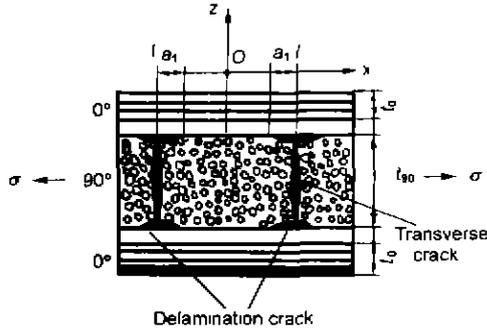


图 1 横向开裂引起分层模型示意图

Fig.1 Analytical model of cross laminates with the delamination and transverse cracks

为简化起见,假设基体横向开裂引起的分层损伤以同样的速率扩展,因为该层板属对称结构,所以只取 1/4 作为研究对象。横向裂纹间距为  $2l$ ,且在每一个横向裂纹裂尖处引发了长度为  $2a_1$ ( $a_1$  为半个裂纹长度)的分层裂纹。假设在分层区域( $l - a_1 \leq x \leq l$ ),  $0^\circ$  层和  $90^\circ$  层间没有摩擦,每层内沿  $x$  方向的应力分量可按如下方法进行计算。

在区域( $l - a_1 \leq x \leq l$ )中,由于发生了分层损伤,横向开裂层传递和承受载荷的能力变得很弱,  $0^\circ$  层成为主要的承载层,所以有

$$(t_0 + t_{90})\bar{\sigma}_c = t_0\bar{\sigma}_{xx}^0 \quad (1)$$

$$\bar{\sigma}_{xx}^0 = \frac{t_0 + t_{90}}{t_0}\bar{\sigma}_c \quad (2)$$

$$\bar{\sigma}_{xx}^{90} = 0 \quad (3)$$

式中,  $t_0$  和  $t_{90}$  分别为  $0^\circ$  层和  $90^\circ$  层的厚度,  $\bar{\sigma}_c$  为加在正交层板材料上的平均应力,  $\bar{\sigma}_{xx}^{90}$  和  $\bar{\sigma}_{xx}^0$  分别为  $90^\circ$  层和  $0^\circ$  层内平均纵向应力。

在未分层区域( $0 \leq x \leq l - a_1$ )中,  $0^\circ$  层和  $90^\circ$  层间结合紧密,共同承受外载,应力分布由以下各式计算<sup>[1]</sup>

$$\bar{\sigma}_{xx}^0 = \bar{\sigma}_c \frac{E_0}{E_x^0} \left[ 1 + \frac{t_{90} E_{90} \cosh(\eta a(x/l))}{t_0 E_0 \cosh(\eta a)} \right] \quad (4)$$

式中,  $E_0$  和  $E_{90}$  分别是  $0^\circ$  层和  $90^\circ$  层的 Young's 模量;  $l$  为分层裂纹间距的一半;  $a = l/t_{90}$ ;  $E_x^0$  为外加载荷引起损伤前层板的 Young's 模量。可以通过混合准则给出

$$E_x^0 = \frac{t_0 E_0 + t_{90} E_{90}}{t_0 + t_{90}} \quad (5)$$

$$\bar{\sigma}_{xx}^{90} = \bar{\sigma}_c \frac{E_{90}}{E_x^0} \left[ 1 - \frac{\cosh(\eta a(x/l))}{\cosh(\eta a)} \right] \quad (6)$$

$$\tau = \bar{\sigma}_c \frac{E_0}{E_x^0} \eta \frac{\sinh(\eta a(x/l))}{\cosh(\eta a)} \quad (7)$$

式中,  $\tau$  为层间剪应力。

式(4)中

$$\eta = \lambda t_{90} = \left[ \frac{3G(t_0 + t_{90})E_x^0}{t_0 E_0 E_{90}} \right]^{1/2}$$

其中

$$\lambda = \left[ \frac{3G(t_0 + t_{90})E_x^0}{t_{90}^2 t_0 E_0 E_{90}} \right]^{1/2}$$

$$G = G_{xz}^{90} \cdot \left( 1 + \frac{t_0 G_{xz}^{90}}{t_{90} G_{xz}^{90}} \right)^{-1}$$

其中,  $G_{xz}^0$  和  $G_{xz}^{90}$  分别为  $0^\circ$  层和  $90^\circ$  层的横向剪切模量。

从上述分析和推导中可以看出,在一个  $2l$  长的体积单元中,发生分层损伤的区域与未发生分层损伤的区域的应力分布不同,因此,所采取的计算公式也不同。

### 1.2 Young's 模量衰减公式推导

Young's 模量是表征材料刚度性能的重要指标,根据经典的层板复合材料刚度衰减预测的方法,本文针对前人采用的不考虑分层的完全抛物线模型、不完全抛物线模型及本文所提出的包含分层损伤的完全抛物线模型应力分析结果,经推导得出刚度衰减与裂纹密度之间的关系式。

1.2.1 不考虑分层损伤的完全抛物线模型 受损后层板的 Young's 模量  $E_x$  可通过平均应力  $\bar{\sigma}_c$  与平均纵向应变  $\bar{\epsilon}_c$  获得

$$\bar{\sigma}_c = E_x \bar{\epsilon}_c \quad (8)$$

平均纵向应变  $\bar{\epsilon}_c$  由下式获得

$$\bar{\epsilon}_c \approx \bar{\epsilon}_{xx}^0 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\bar{\sigma}_{xx}^0}{E_0} dx \quad (9)$$

从式(5, 8)和式(4)得出刚度衰减的表达式为

$$\frac{E_x}{E_x^0} = \left[ 1 + \frac{t_{90} E_{90}}{t_0 E_0} \frac{1}{\eta a} \tanh(\eta a) \right]^{-1} \quad (10)$$

横向裂纹密度

$$\rho = 1/2l \quad (11)$$

由于  $a = l/t_{90} = (2\rho t_{90})^{-1}$ , 代入式(10)可得

$$\frac{E_x}{E_x^0} = \left[ 1 + \frac{t_{90} E_{90}}{t_0 E_0} \frac{2\rho t_{90}}{\eta} \tanh\left(\eta \frac{1}{2\rho t_{90}}\right) \right]^{-1} \quad (12)$$

式(12)即为刚度衰减与裂纹密度之间的关系式<sup>[4]</sup>。

1.2.2 考虑分层损伤的完全抛物线模型 横向裂纹裂尖引起的分层损伤发生后,由于在分层区域中,横向开裂层传递和承受载荷的能力变得很弱,  $0^\circ$  层将成为主要的载荷承担者。因此,发生损伤的区域与未发生损伤的区

域中纵向应变的分布情况也不同. 本文采用下式求取平均纵向应变

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_c &\approx \bar{\varepsilon}_{xx}^0 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\bar{\sigma}_{xx}^0}{E_0} dx = \\ &\frac{1}{l} \int_{l-a_1}^l \frac{t_0 + t_{90}}{E_0 t_0} \bar{\sigma}_c dx + \frac{1}{l} \int_0^{l-a_1} \frac{\bar{\sigma}_c}{E_x^0} \left[ 1 + \frac{t_{90} E_{90} \cosh(\eta a(x/l))}{t_0 E_0 \cosh(\eta a)} \right] dx = \\ &\frac{a_1}{l} \frac{t_0 + t_{90}}{E_0 t_0} \bar{\sigma}_c + \frac{l - a_1}{l} \frac{\bar{\sigma}_c}{E_x^0} + \\ &\frac{t_{90} E_{90}}{t_0 E_0 E_x^0 \cosh(\eta a)} \frac{\bar{\sigma}_c}{\eta a} \sinh\left(\eta a \left(1 - \frac{a_1}{l}\right)\right) \end{aligned} \quad (13)$$

定义  $n$  为分层扩展比率, 取为与横向裂纹间距的比值, 用以反应分层扩展的程度,  $n = a_1/l$ , 随着  $n$  值的减小, 包含分层损伤的完全抛物线模型曲线与不包含分层损伤的完全抛物线曲线将逐渐靠近. 式 (4, 5, 8) 与式 (13) 联立, 将  $a_1 = nl$  和  $l = 1/2\rho$  代入可以得出

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{E_x^0} &= \left\{ E_x^0 \left[ n \times \frac{t_0 + t_{90}}{E_0 t_0} + \frac{1 - n}{E_x^0} + \frac{t_{90} E_{90} \left[ \frac{2\rho}{n\eta} \sinh\left(\frac{(1-n)\eta}{2\rho}\right) \right]}{t_0 E_0 E_x^0 \cosh\left(\frac{n\eta}{2\rho}\right)} \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

式 (14) 即为考虑了分层损伤的裂纹密度与刚度衰减之间的关系表达式.

1.2.3 不完全抛物线模型 不完全抛物线模型可以从完全抛物线模型的计算公式中演化过来, 在计算模量衰减时, 只要将剪切模量  $G$  替换为  $G_{xy}^{90}$ , 其它计算过程与完全抛物线模型的计算过程相同 [1]. 因此, 不完全抛物线模型的刚度衰减计算公式为

$$\frac{E_x}{E_x^0} = \left[ 1 + \frac{t_{90}}{t_0} \frac{E_{90}}{E_0} \frac{2\rho t_{90}}{\eta} \tanh\left(\eta \frac{1}{2\rho t_{90}}\right) \right]^{-1} \quad (15)$$

## 2 预测结果比较

本文根据不考虑分层的完全抛物线模型、不完全抛物线模型以及本文所提出的包含分层损伤的完全抛物线模型进行的应力分析结果, 对层板复合材料的横向 Young's 模量衰减分别进行了理论预测, 并通过铺层为  $[0/90_{10}/0]$  的碳纤维环氧树脂复合材料 (P3051-F05<sup>26</sup>) [1]、铺层为  $[0/90_4/0]$  和  $[0/90_2/0]$  的碳纤维环氧树脂复合材料

(AS4-3502) [4,5] 以及铺层为  $[0/90_6/0]$  的 E- 玻璃纤维环氧树脂复合材料 [1] 进行了理论计算, 并与前人所测实验数据 [1] 进行了比较, 见图 2, 3. 结果表明, 本文所推导的考虑分层的完全抛物线模型曲线在应力较高的情况

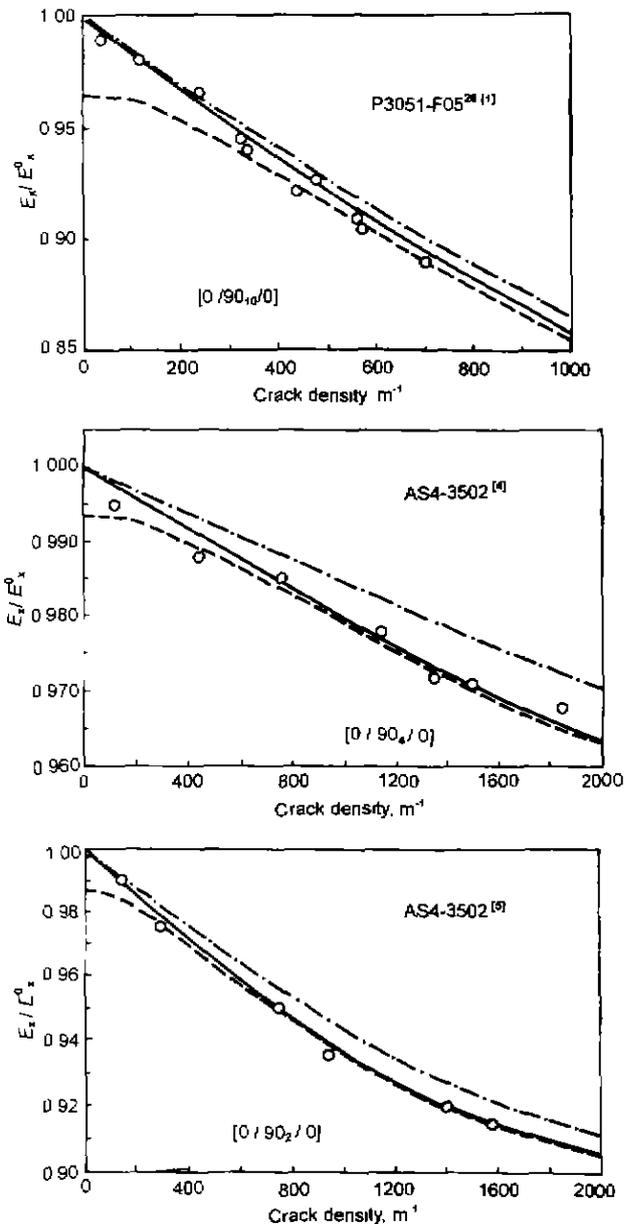


图 2 不同铺层的碳纤维环氧树脂复合材料 (P3051-F05<sup>26</sup> 和 AS4-3502) 纵向 Young's 模量与裂纹密度关系曲线

Fig.2 Longitudinal Young's modulus of graphite fiber/epoxy laminates (3051-F05<sup>26</sup> and AS4-3502) vs crack density  
 — complete parabolic shear  
 - - - delamination complete parabolic shear, this work  
 - · - incomplete parabolic shear  
 ○ experimental result [1]

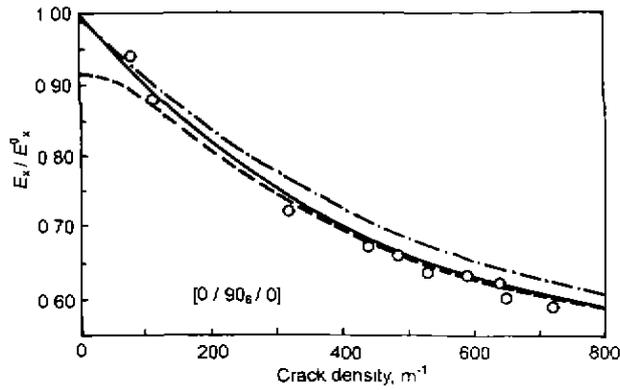


图3 铺层为  $[0/90_6/0]$  的 E- 玻璃纤维环氧树脂复合材料纵向 Young's 模量与裂纹密度关系曲线

Fig.3 Longitudinal Young's modulus of E-glass fiber/epoxy laminates for stacking  $[0/90_6/0]$  vs crack density

- complete parabolic shear
- - - delamination complete parabolic shear.
- · - this work
- · - incomplete parabolic shear
- o experimental result [1]

下与实验数据符合得最好。

### 3 结论

在应力较高时, 横向开裂的裂尖往往会引起分层现象发生。在这种情况下, 可以根据发生分层损伤的区域与未发生分层损伤的区域中应力分布的不同, 而采取不同的计算公式对材料性能进行计算。本文因此提出了考虑分层的完全抛物线分析模型, 并与没有考虑分层损伤的不完全抛物线模型与完全抛物线模型进行了比较。结果表明, 在应力较高的情况下, 考虑了分层的完全抛物线模型与实验结果符合程度最好。

### 参考文献

- [1] Berthelot J-M, Leblond P, El Mahi A, Le Corre J-F. *Analysis*, 1996; 27A: 989
- [2] Lee J W, Daniel U M. *Compos Sci Technol*, 1990, 24: 1225
- [3] Berthelot J M. *J Compos Mater*, 1997; 31: 1780
- [4] Takeda N, Ogihara S. *Compos Sci Technol*, 1995; 52: 309
- [5] Ogihara S, Takeda N. *Compos Sci Technol*, 1995; 54: 396