第 39 卷 第 1 期
2003 年 1 月 17—21 页

金属学报
ACTA METALLURGICA SINICA

Vol.39 No.1
Jan. 2003 pp.17-21

$\{110\}\langle 111\rangle$， $\{112\}\langle 111\rangle$ 和 $\{123\}\langle 111\rangle$ 多滑移的屈服应力状态 *

陈志永 张新明 周卓平
(中南大学材料科学与工程学院，长沙 410083)

摘 要 在系统分析了 bcc 金属 $\{110\}\langle 111\rangle$， $\{112\}\langle 111\rangle$ 和 $\{123\}\langle 111\rangle$ 多滑移时的单晶屈服面 (SCYS) 的基础上，导出了临界剪切应力 (CRSS) 相等情况下完备的单晶混合屈服应力状态，求出了相应的活化滑移系及 5 个独立活化滑移系的组合数，并将所有可能的屈服顶点按晶体结构的对称性加以分类和列表.

关键词 体心立方金属，滑移，屈服应力

中图法分类号 TG301, O765 **文献标识码** A **文章编号** 0412–1961(2003)01–017–05

YIELD STRESS STATES FOR $\{110\}\langle 111\rangle$， $\{112\}\langle 111\rangle$ AND $\{123\}\langle 111\rangle$ MULTIPLE SLIP

CHEN Zhiyong, ZHANG Xinming, ZHOU Zhuoping
School of Materials Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083
Correspondent: CHEN Zhiyong, lecturer, Tel: (0731)8830489, E-mail: czysh@netease.com
Supported by National Natural Science Foundation of China (No.50231030 and 59971067)
Manuscript received 2002–02–23, in revised form 2002–06–10

ABSTRACT The single crystal yield surfaces (SCYS) in bcc metals for $\{110\}\langle 111\rangle$, $\{112\}\langle 111\rangle$ and $\{123\}\langle 111\rangle$ multiple slip were analyzed systematically. The complete yield stress states, the corresponding active systems and the combination number of five independent active systems associated with the particular vertex have been derived under the same critical resolved shear stresses (CRSS's). All possible yield stresses are classified and listed according to the symmetry of crystal structure.
KEY WORDS bcc metals, slip, yield stress

单晶屈服面 (SCYS) 是研究多晶体塑性变形的基础，它对于晶体材料的屈服、形变行为以及材料的织构与塑性各向异性的研究是极为重要的. 晶体塑性理论指出，对于给定 5 个独立应变分量的晶体变形 (如 FC Taylor 模型 [1])，要想使应变协调性得到完全满足，需要 5 个独立滑移系，而使 5 个独立滑移系同时启动的应力状态 (称之为屈服顶点) 为单晶屈服面上的顶点. 对少于 5 个应变分量被指定的晶体变形 (如 RC Taylor 模型 [2])，其屈服应力状态可由屈服顶点导出，它们位于顶点间的联线上 [3]. 因此，本文仅研究能够满足任意形状变形的单晶屈服应力状态.

由于 Bishop–Hill 等 [4,5] 的工作， fcc 金属 $\{111\}\langle 110\rangle$ 滑移的 SCYS 已是众所周知了；由对称性可知，它等同于 bcc 金属 $\{110\}\langle 111\rangle$ 滑移的 SCYS. 然而，研究表明 bcc 金属在 $\langle 111\rangle$ 方向上除了能沿 $\{110\}$ 面滑移外，经常还可观察到沿 $\{112\}$ 面，甚至 $\{123\}$ 面滑移. 对 bcc 晶体结构的 SCYS，材料学者已做了一些研究 [6–11]. 然而，关于 bcc 金属同时在 $\{110\}$,$\{112\}$,$\{123\}$ 面上滑移的 SCYS 的研究尚鲜见. 本文从 Taylor/Bishop-Hill 晶体塑性理论出发，分析了 bcc 金属同时在 $\{110\}$，$\{112\}$，$\{123\}$ 面上滑移的 SCYS，以弥补此方面研究的不足，为进一步研究晶体材料的屈服及塑性变形行为、宏观塑性各向异性以及形变织构提供理论依据.

1 单晶屈服面 (SCYS) 的一些基本概念和性质

1.1 Schmid 定律和应力、应变矢量

金属单晶的滑移系可用滑移面法线方向、滑移方向的单位矢量 $\vec{n}$ 和 $\vec{b}$ 表示. Schmid 定律指出，对于任一应力状态，如果在某一特定的滑移系 S 上的分解切应力达

* 国家自然科学基金 50231030 和 59971067 资助项目
收到初稿日期： 2002–02–23, 收到修改稿日期： 2002–06–10
作者简介： 陈志永，男， 1970 年生，讲师，博士

到临界剪切应力 (CRSS) 时, 那么单晶在此滑移系上产生滑移变形, 则 Schmid 定律可表示为

$$\tau^S = m_{ij}^S \sigma_{ij} = \tau_c^S \quad (i,j=1,2,3) \tag{1}$$

其中

$$m_{ij}^S = (b_i^S n_j^S + b_j^S n_i^S)/2 \tag{2}$$

为不同滑移系上的广义 Schmid 因子. 在滑移系 S 上与微观滑移量 $\mathrm{d}\gamma^S$ 相联系的晶体应变增量可由几何关系

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = m_{ij}^S \mathrm{d}\gamma^S \tag{3}$$

来确定. 为方便起见, 应力、应变常常用矢量形式来表示. 本文使用 Kocks 等 [3] 在 5 维或 6 维应力空间引入的符号, 则 Schmid 定律可表示为

$$m_k^S \sigma_k = \tau_c^S \quad (k = 1-5 \text{ or } 6) \tag{4}$$

式中 m_k^S 为广义 Schmid 因子矢量分量. 相应地, 应变增量矢量分量表示为

$$\mathrm{d}\varepsilon_k = m_k^S \mathrm{d}\gamma^S \tag{5}$$

对于 5 维应力矢量和 6 维应力矢量, m_k^S 为 m_{ij}^S 的不同线性组合.

1.2 滑移系和 SCYS 的对称性质

由晶体结构的对称性, 如果 H 为允许的对称操作的矩阵表示式. 那么当对称操作应用于晶体的滑移系 S 时, 则相同类型滑移系 S' 的滑移方向和滑移面法向单位矢量可由变换

$$b_k^{S'} = H_{ki} b_i^S; \quad n_l^{S'} = H_{lj} n_j^S \tag{6}$$

获得, 与 S' 滑移系相联系的广义 Schmid 因子则按下式转换

$$m_{kl}^{S'} = H_{ki} H_{lj} m_{ij}^S \tag{7}$$

假定应力张量 σ^v 表示一个与 5 个独立滑移系 $S_n(n=1$—$5)$ 相联系的 SCYS 的屈服顶点, 则由顶点的定义, 应有

$$m_{ij}^{S_n} \sigma_{ij}^v = \tau_c^{S_n} \tag{8}$$

设同种类型的所有滑移系的 $\tau_c^{S_n}$ 是一样的. 由式 (7) 和对称操作矩阵的正交对称性, 有

$$m_{kl}^{S_n} \sigma_{kl}^{v'} = \tau_C^{S_n} \quad (n=1,5) \tag{9}$$

此处 $\sigma^{v'}$ 为 σ^v 的等价屈服顶点, 与它相联系的滑移系恰好是与 $\sigma^{v'}$ 相联系的滑移系的转换. σ^v 表示应力张量 σ^v 的转换

$$\sigma_{kl}^{v'} = H_{ki} H_{lj} \sigma_{ij}^v \tag{10}$$

上述性质允许我们仅用一些基本的屈服顶点来描述 SCYS, 剩下的可使用对称操作由它们来导出. 这最小的一组顶点称之为不可约顶点, 其选择准则是与之相联系的滑移系至少一个属于立方晶体标准投影的基本三角区里. 利用晶体和 SCYS 的对称性质可极大地减少计算时间, 并可很方便地获得相同类型的滑移系.

2 bcc 金属的 SCYS

2.1 bcc 金属的滑移系

对 bcc 金属, 任取一 $\{110\}\langle111\rangle$, $\{112\}\langle111\rangle$ 、$\{123\}\langle111\rangle$ 滑移系, 由晶体的对称操作 (432 点群, 考虑到滑移系的滑移方向可为正负, 对称操作同时还包括反演中心) 即可方便地得出所有的滑移系如表 1 、表 2 和表 3 所示. 表中对于任意一个 $\langle111\rangle$ 方向, 与之相联系的 3 个 $\{112\}$ 面都垂直于相应的 $\{110\}$ 面. 对于 $\{110\}\langle111\rangle$, $\{112\}\langle111\rangle$, $\{123\}\langle111\rangle$ 三种不同类型的滑移系, 其滑移系的总数不同, 分别为 24, 24, 48. 从晶体的对称操作可知, 这是由于对 $\{110\}\langle111\rangle$ 和 $\{112\}\langle111\rangle$ 滑移系而言, 并非每次当新的操作应用于初始滑移系时, 都能得到新的滑移系, 其中某些操作是多余的, 即由此操作得到的滑移系与由先前操作得出的滑移系是相同的. 而对 $\{123\}\langle111\rangle$ 滑移系, 恰好每个对称操作均可得出一个新的滑移系.

表 1 $\{110\}\langle111\rangle$ 滑移系及其表示的符号

Table 1 $\{110\}\langle111\rangle$ slip system and its identified symbol (ND–normal direction)

Slip direction $\vec{b}$	$11\bar{1}$			$1\bar{1}\bar{1}$			$1\bar{1}1$			111		
ND of slip plane $\vec{n}$	011	101	$1\bar{1}0$	$01\bar{1}$	101	110	011	$10\bar{1}$	110	$01\bar{1}$	$10\bar{1}$	$1\bar{1}0$
Slip system for ($\vec{b}$)	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}
(for $-b$)	(s_{13})	(s_{14})	(s_{15})	(s_{16})	(s_{17})	(s_{18})	(s_{19})	(s_{20})	(s_{21})	(s_{22})	(s_{23})	(s_{24})

表 2 $\{112\}\langle111\rangle$ 滑移系及其表示的符号

Table 2 $\{112\}\langle111\rangle$ slip system and its identified symbol

Slip direction $\vec{b}$	$11\bar{1}$			$1\bar{1}\bar{1}$			$1\bar{1}1$			111		
ND of slip plane $\vec{n}$	$2\bar{1}1$	$\bar{1}21$	$\bar{1}\bar{1}\bar{2}$	211	$\bar{1}\bar{2}1$	$\bar{1}1\bar{2}$	$21\bar{1}$	$\bar{1}\bar{2}\bar{1}$	$\bar{1}12$	$2\bar{1}\bar{1}$	$\bar{1}2\bar{1}$	$\bar{1}\bar{1}2$
Slip system for (for $\vec{b}$)	s_{25}	s_{26}	s_{27}	s_{28}	s_{29}	s_{30}	s_{31}	s_{32}	s_{33}	s_{34}	s_{35}	s_{36}
(for $-b$)	(s_{37})	(s_{38})	(s_{39})	(s_{40})	(s_{41})	(s_{42})	(s_{43})	(s_{44})	(s_{45})	(s_{46})	(s_{47})	(s_{48})

表 3　{123}⟨111⟩ 滑移系及其表示的符号

Table 3　{123}⟨111⟩ slip system and it identified symbol

Slip direction $\vec{b}$	111						$\bar{1}\bar{1}1$					
ND of slip plane (for $\vec{n}$)	$\bar{3}12$	$2\bar{3}1$	$12\bar{3}$	$\bar{3}21$	$1\bar{3}2$	$21\bar{3}$	$3\bar{1}2$	$\bar{2}31$	$\bar{1}2\bar{3}$	$3\bar{2}\bar{1}$	$\bar{1}32$	$\bar{2}1\bar{3}$
Slip system (for $\vec{b}$)	s_{49}	s_{50}	s_{51}	s_{52}	s_{53}	s_{54}	s_{55}	s_{56}	s_{57}	s_{58}	s_{59}	s_{60}
(for $-\vec{b}$)-b→$-\vec{b}$	(s_{73})	(s_{74})	(s_{75})	(s_{76})	(s_{77})	(s_{78})	(s_{79})	(s_{80})	(s_{81})	(s_{82})	(s_{83})	(s_{84})
Slip direction $\vec{b}$	$\bar{1}11$						$1\bar{1}1$					
Slip plane $\vec{n}$	312	$\bar{2}\bar{3}1$	$\bar{1}2\bar{3}$	321	$\bar{1}\bar{3}2$	$\bar{2}1\bar{3}$	$\bar{3}\bar{1}2$	231	$1\bar{2}\bar{3}$	$\bar{3}\bar{2}1$	132	$2\bar{1}\bar{3}$
Slip systems (for $\vec{b}$)	s_{61}	s_{62}	s_{63}	s_{64}	s_{65}	s_{66}	s_{67}	s_{68}	s_{69}	s_{70}	s_{71}	s_{72}
(for $-b$)-b→$-\vec{b}$	(s_{85})	(s_{86})	(s_{87})	(s_{88})	(s_{89})	(s_{90})	(s_{91})	(s_{92})	(s_{93})	(s_{94})	(s_{95})	(s_{96})

2.2　SCYS 计算的基本原理

本文用 $\tau_{\{110\}\langle111\rangle}$ 来表示 {110}⟨111⟩ 滑移系的临界切应力，$\tau_{\{112\}\langle111\rangle}$ 表示 {112}⟨111⟩ 滑移系的临界切应力，$\tau_{\{123\}\langle111\rangle}$ 表示 {123}⟨111⟩ 滑移系的临界切应力. 同时，设

$$\begin{cases} \xi_1 = \tau_{\{112\}\langle111\rangle}/\tau_{\{110\}\langle111\rangle} \\ \xi_2 = \tau_{\{123\}\langle111\rangle}/\tau_{\{110\}\langle111\rangle} \end{cases} \tag{11}$$

为方便起见，将上述定义的应力矢量 $\vec{\sigma}$ 相对于 $\tau_{\{110\}\langle111\rangle}$ 归一化为 $\vec{M}$，它为 5 维或 6 维应力矢量. 根据 Schmid 定律，对活化滑移系有

$$\begin{cases} i \quad m_{1\mathrm{k}}^S M_\mathrm{k} = 1 & 对\{110\}\langle111\rangle滑移系 \\ ii \quad m_{2\mathrm{k}}^S M_\mathrm{k} = \xi_1 & 对\{112\}\langle111\rangle滑移系 \\ iii \quad m_{3\mathrm{k}}^S M_\mathrm{k} = \xi_2 & 对\{123\}\langle111\rangle滑移系 \end{cases} \tag{12}$$

式中 $m_{1\mathrm{k}}^S, m_{2\mathrm{k}}^S$ 和 $m_{3\mathrm{k}}^S$ 分别是 {110}⟨111⟩, {112}⟨111⟩, {123}⟨111⟩ 滑移系的广义 Schmid 因子矢量分量. 上式在应力空间定义了一系列超平面. 对于能活化 5 个独立滑移系的 $\vec{M}$，称之为屈服顶点. 很明显，对于 bcc 金属而言，考虑滑移的方向性，有 96 个滑移系，即有 96 个方程. 为了满足任意形状的变形，必须有 5 个或 5 个以上的滑移系满足式 (12)，且必须有 5 个独立的滑移系. 同时对所有其它的滑移系，应该满足下述条件

$$\begin{cases} i \quad m_{1\mathrm{k}}^S M_\mathrm{k} \le 1 & 对\{110\}\langle111\rangle滑移系 \\ ii \quad m_{2\mathrm{k}}^S M_\mathrm{k} \le \xi_1 & 对\{112\}\langle111\rangle滑移系 \\ iii \quad m_{3\mathrm{k}}^S M_\mathrm{k} =\le \xi_2 & 对\{123\}\langle111\rangle滑移系 \end{cases} \tag{13}$$

按照上述方法，ξ_1 和 ξ_2 取不同值时，可以分析不同情况下的 bcc 金属的单晶屈服面 (SCYS).

2.3　{110}⟨111⟩, {112}⟨111⟩ 和 {123}⟨111⟩ 混合滑移模式下的屈服应力状态

对于 bcc 金属而言，考虑 {110}⟨111⟩，{112}⟨111⟩ 和 {123}⟨111⟩ 多滑移的混合模式. 为不失一般性，本文计算三类滑移系的临界剪切应力相等时的混合屈服应力状态.

假定 $\xi_1 = \xi_2 = 1$，解上述联立方程可以得到屈服应力状态及与其相联系的活化滑移系. 结果表明总共有 1104 种屈服顶点 (考虑其负值，应力状态总数增加一倍). 根据 bcc 晶体结构的对称性，可将它们分为 58 组基本的屈服应力状态：

(1) 8 组同时活化 8 个滑移系，共有 48 种应力状态，4 组活化 4 个 {110}⟨111⟩ 和 4 个 {123}⟨111⟩ 滑移系 (24 种屈服顶点)，4 组活化 4 个 {112}⟨111⟩ 和 4 个 {123}⟨111⟩ 滑移系 (24 种屈服顶点);

(2) 2 组同时活化 6 个滑移系，共有 48 种应力状态，1 组活化 3 个 {112}⟨111⟩ 和 3 个 {123}⟨111⟩ 滑移系 (24 种屈服顶点),1 组活化 3 个 {110}⟨111⟩ 和 3 个 {123}⟨111⟩ 滑移系 (24 种屈服顶点);

(3) 48 组同时活化 5 个系，共有 1008 个顶点. 其中 15 组 (第 11 至第 25 组) 活化 2 个 {110}⟨111⟩, 1 个 {112}⟨111⟩ 和 2 个 {123}⟨111⟩ 滑移系 (288 个顶点), 3 组 (第 26 - 28 组) 活化 2 个 {110}⟨111⟩ 和 3 个 {123}⟨111⟩ 滑移系 (72 个顶点), 其中 8 组 (第 29—36 组) 活化 1 个 {110}⟨111⟩, 2 个 {112}⟨111⟩ 和 2 个 {123}⟨111⟩ 滑移系 (192 个顶点), 其中 12 组 (第 37—48 组) 活化 1 个 {110}⟨111⟩, 1 个 {112}⟨111⟩ 和 3 个 {123}⟨111⟩ 滑移系 (288 顶点), 其中 7 组 (第 49—55 组) 活化 3 个 {112}⟨111⟩ 和 2 个 {123}⟨111⟩ 滑移系 (96 顶点), 其中 3 组 (第 56—58 组) 活化 2 个 {112}⟨111⟩ 和 3 个 {123}⟨111⟩ 滑移系 (72 顶点).

表 4 列出了这 58 组基本的屈服顶点，与之相联系的活化滑移系以及 5 个独立滑移系的组合数. 同时根据文献 [12] 附录的由晶体结构对称操作得出的不同滑移系上屈服应力状态的对称变化，即可求出所有余下的等价屈服应力状态，并由此得出了各组屈服顶点的等效顶点数亦如表 4 所示. 由于每次当不同的对称操作应用于基本的屈服顶点时，其中一些对称操作也许是多余的，不一定能得到新的顶点. 因此各组的等效屈服顶点数可能不一样. 由求出来的屈服顶点和各个滑移系上的广义 Schmid 矢量，可计算出各个滑移系上的分解剪切应力. 结果发现. 在非活化滑移系上分剪切应力大多不为零，这与 {110}⟨111⟩ 滑

表 4 {110}⟨111⟩, {112}⟨111⟩ 和 {123}⟨111⟩ 多滑移的屈服应力状态

Table 4 Yield stress states for {110}⟨111⟩, {112}⟨111⟩ and {123}⟨111⟩ multiple slip

58 groups of yield vertices	Number of equivalent vertices	$\vec{M}$ (unit in $\tau_{\{110\}\langle 111\rangle}$) = $\sqrt{6}/90\times$								Number of set of 5 independent slip systems	Active slip system
		M_{61}	M_{62}	M_{63}	M_{64} M_{53}	M_{65} M_{54}	M_{66} M_{55}	M_{51}	M_{52}		
1	6	15.9	0	−15.9	0	74.1	0	8.0	−23.9	52	$s_1\ s_9\ s_{12}\ s_{16}\ s_{50}\ s_{68}\ s_{83}\ s_{89}$
2	6	29.1	0	−29.1	0	60.9	0	14.5	−43.6	52	$s_1\ s_9\ s_{12}\ s_{16}\ s_{57}\ s_{63}\ s_{76}\ s_{94}$
3	6	8.7	40.6	−49.4	0	0	0	−15.9	−74.1	44	$s_1\ s_{10}\ s_{16}\ s_{19}\ s_{51}\ s_{57}\ s_{63}\ s_{69}$
4	6	0	45.0	−45.0	−13.1	0	0	−22.5	−67.5	44	$s_1\ s_{10}\ s_{16}\ s_{19}\ s_{51}\ s_{63}\ s_{83}\ s_{95}$
5	6	52.0	-21.7	−30.3	0	0	0	36.8	−45.4	56	$s_{25}\ s_{28}\ s_{31}\ s_{34}\ s_{73}\ s_{79}\ s_{85}\ s_{91}$
6	6	36.8	0	−36.8	0	−45.4	0	18.4	−55.2	56	$s_{25}\ s_{28}\ s_{45}\ s_{48}\ s_{51}\ s_{69}\ s_{82}\ s_{88}$
7	6	41.1	0	−41.1	0	−32.5	0	20.6	−61.7	56	$s_{25}\ s_{28}\ s_{45}\ s_{48}\ s_{54}\ s_{72}\ s_{79}\ s_{85}$
8	6	0	−4.3	4.3	77.9	0	0	2.1	6.4	56	$s_{25}\ s_{31}\ s_{40}\ s_{46}\ s_{49}\ s_{61}\ s_{82}\ s_{94}$
9	24	10.8	−26.0	15.1	45.4	0	32.5	18.4	22.7	6	$s_{25}\ s_{30}\ s_{44}\ s_{68}\ s_{82}\ s_{90}$
10	24	24.7	−4.4	−20.3	0	60.9	13.1	14.5	−30.5	5	$s_1\ s_9\ s_{12}\ s_{57}\ s_{68}\ s_{76}$
11	12	15.4	−7.7	−7.7	−9.9	45.0	45.0	11.5	−11.5	1	$s_1\ s_7\ s_{34}\ s_{57}\ s_{71}$
12	24	13.9	−7.0	-7.0	−12.1	40.7	49.3	10.4	−10.4	1	$s_1\ s_7\ s_{34}\ s_{57}\ s_{73}$
13	24	8.0	−4.0	−4.0	−20.9	40.7	49.3	6.0	−6.0	1	$s_1\ s_7\ s_{34}\ s_{73}\ s_{93}$
14	12	6.6	−3.3	−3.3	−23.0	45.0	45.0	5.0	−5.0	1	$s_1\ s_7\ s_{34}\ s_{83}\ s_{93}$
15	24	9.6	5.7	−15.2	25.2	60.9	8.2	1.9	−22.8	1	$s_1\ s_9\ s_{29}\ s_{57}\ s_{86}$
16	24	13.8	5.7	−19.5	20.9	60.9	3.9	4.1	−29.3	1	$s_1\ s_9\ s_{29}\ s_{57}\ s_{89}$
17	24	7.9	4.0	−11.9	20.2	65.9	8.2	1.9	−17.9	1	$s_1\ s_9\ s_{29}\ s_{68}\ s_{86}$
18	24	10.8	2.6	−13.4	11.7	70.2	3.9	4.1	20.0	1	$s_1\ s_9\ s_{29}\ s_{68}\ s_{89}$
19	12	2.0	2.0	−4.0	−15.9	15.9	68.0	0.0	−6.0	1	$s_1\ s_{11}\ s_{33}\ s_{54}\ s_{57}$
20	24	0.1	4.2	−4.0	−20.2	15.9	65.9	−2.1	−6.0	1	$s_1\ s_{11}\ s_{33}\ s_{54}\ s_{96}$
21	12	2.0	2.0	−4.0	−29.1	29.1	54.9	0.0	−6.0	1	$s_1\ s_{11}\ s_{33}\ s_{73}\ s_{83}$
22	24	4.2	−0.1	−4.0	−24.8	29.1	57.1	0.0	−6.0	1	$s_1\ s_{11}\ s_{33}\ s_{73}\ s_{93}$
23	12	22.7	22.7	−45.4	−15.9	15.9	6.0	0.0	−68.0	1	$s_1\ s_{11}\ s_{42}\ s_{54}\ s_{57}$
24	24	13.9	27.0	−41.0	−29.1	15.9	6.0	−6.6	−61.5	1	$s_1\ s_{11}\ s_{42}\ s_{54}\ s_{83}$
25	12	18.3	18.3	−36.6	−29.1	29.1	6.0	0.0	−54.9	1	$s_1\ s_{11}\ s_{42}\ s_{73}\ s_{83}$
26	24	−10.0	5.0	5.0	15.0	31.9	58.1	−7.5	7.5	1	$s_1\ s_7\ s_{57}\ s_{61}\ s_{93}$
27	24	6.3	4.8	−11.1	27.6	60.9	13.1	-0.7	−16.6	1	$s_1\ s_9\ s_{57}\ s_{68}\ s_{86}$
28	24	−4.1	9.1	−5.0	−29.1	15.9	60.0	−6.6	−7.5	1	$s_1\ s_{11}\ s_{54}\ s_{83}\ s_{96}$
29	24	−9.1	43.7	−34.6	24.8	3.9	7.8	−26.4	−52.0	1	$s_1\ s_{29}\ s_{35}\ s_{57}\ s_{77}$
30	24	−9.4	43.6	−34.2	25.2	4.1	8.2	−26.5	−51.3	1	$s_1\ s_{29}\ s_{35}\ s_{57}\ s_{86}$
31	24	−17.8	48.1	−30.3	11.7	3.9	7.8	−32.9	−45.4	1	$s_1\ s_{29}\ s_{35}\ s_{77}\ s_{83}$
32	24	−18.1	47.9	−29.8	12.1	4.1	8.2	-33.0	−44.7	1	$s_1\ s_{29}\ s_{35}\ s_{83}\ s_{86}$
33	24	29.1	7.8	−36.8	−11.7	41.5	3.9	10.6	−55.2	1	$s_1\ s_{34}\ s_{42}\ s_{57}\ s_{63}$
34	24	29.0	8.1	−37.1	−12.1	40.7	4.1	10.4	−55.6	1	$s_1\ s_{34}\ s_{42}\ s_{57}\ s_{73}$
35	24	20.3	12.1	−32.5	−24.8	41.5	3.9	4.1	−48.7	1	$s_1\ s_{34}\ s_{42}\ s_{63}\ s_{83}$
36	24	20.2	12.5	−32.7	−25.2	40.7	4.1	3.9	−49.1	1	$s_1\ s_{34}\ s_{42}\ s_{73}\ s_{83}$
37	24	−5.6	44.6	−39.0	20.9	2.6	3.9	-25.1	−58.4	1	$s_1\ s_{29}\ s_{57}\ s_{77}\ s_{89}$
38	24	4.3	3.1	−7.4	12.1	71.3	8.2	0.6	−11.1	1	$s_1\ s_{29}\ s_{68}\ s_{83}\ s_{86}$
39	24	9.0	2.2	−11.2	7.8	72.8	3.9	3.4	−16.8	1	$s_1\ s_{29}\ s_{68}\ s_{83}\ s_{89}$
40	24	−14.4	48.9	−34.6	7.8	2.6	3.9	−31.6	−51.9	1	$s_1\ s_{29}\ s_{77}\ s_{83}\ s_{89}$
41	24	−1.6	4.9	−3.3	−13.8	11.7	70.2	−3.2	−5.0	1	$s_1\ s_{33}\ s_{54}\ s_{57}\ s_{96}$
42	24	−18.9	11.4	7.5	5.4	33.3	52.8	−15.1	11.2	1	$s_1\ s_{33}\ s_{61}\ s_{83}\ s_{93}$
43	24	−21.2	14.7	6.5	2.6	24.8	57.1	−18.0	9.8	1	$s_1\ s_{33}\ s_{61}\ s_{83}\ s_{96}$
44	24	3.2	0.3	−3.5	−27.6	33.3	52.8	1.4	−5.3	1	$s_1\ s_{33}\ s_{73}\ s_{83}\ s_{93}$
45	24	29.5	4.3	−33.8	−7.8	49.3	2.6	12.6	−50.7	1	$s_1\ s_{34}\ s_{57}\ s_{63}\ s_{76}$
46	24	17.5	−7.7	−9.8	−7.8	49.3	38.6	12.6	−14.7	1	$s_1\ s_{34}\ s_{57}\ s_{71}\ s_{76}$
47	24	20.7	8.7	−29.4	−20.9	49.3	2.6	6.0	−44.1	1	$s_1\ s_{34}\ s_{63}\ s_{76}\ s_{83}$
48	24	5.7	−2.1	−3.5	−25.2	40.7	47.9	3.9	−5.3	1	$s_1\ s_{34}\ s_{73}\ s_{83}\ s_{93}$
49	12	50.5	−25.3	−25.3	2.1	−4.3	−4.3	37.9	−37.9	1	$s_{25}\ s_{28}\ s_{31}\ s_{82}\ s_{91}$
50	24	39.7	−3.6	−36.1	2.1	−36.8	−4.3	21.6	−54.2	1	$s_{25}\ s_{28}\ s_{45}\ s_{72}\ s_{82}$
51	12	−0.7	−0.7	1.4	41.1	41.1	34.7	0.0	2.1	1	$s_{25}\ s_{30}\ s_{35}\ s_{74}\ s_{82}$
52	12	−1.4	0.7	0.7	43.3	−36.8	36.8	−1.1	1.1	1	$s_{25}\ s_{30}\ s_{35}\ s_{74}\ s_{90}$
53	12	11.6	−23.1	11.6	41.1	2.1	41.1	17.3	17.3	1	$s_{25}\ s_{30}\ s_{44}\ s_{79}\ s_{90}$
54	12	14.4	−28.8	14.4	36.8	−2.1	36.8	21.6	21.6	1	$s_{25}\ s_{30}\ s_{44}\ s_{82}\ s_{87}$
55	12	1.4	−0.7	−0.7	75.8	4.3	4.3	1.1	−1.1	1	$s_{25}\ s_{31}\ s_{40}\ s_{79}\ s_{94}$
56	24	−1.9	−0.5	2.4	45.4	−38.3	32.5	−0.7	3.6	1	$s_{25}\ s_{30}\ s_{74}\ s_{82}\ s_{90}$
57	24	−2.1	4.3	−2.1	73.7	−6.4	8.6	−3.2	−3.2	1	$s_{25}\ s_{40}\ s_{52}\ s_{61}\ s_{79}$
58	24	21.0	−9.4	−11.6	4.3	47.6	36.8	15.2	−17.3	1	$s_{25}\ s_{41}\ s_{51}\ s_{65}\ s_{82}$

移屈服顶点在非活化滑移系全为零不同.

同时应该指出，对于纯 $\{110\}\langle 111\rangle$ 滑移，引起活化滑移系选择的模糊性问题 (即超过 5 个活化滑移系) 的屈服顶点的百分数为 100%; 由以上分析方法，根据计算，可以得出对于 $\{112\}\langle 111\rangle$ 和 $\{110\}\langle 111\rangle$ 临界剪切应力相等情况下的混合滑移模式，其百分数为 22.2%; 对于 $\{110\}\langle 111\rangle$，$\{112\}\langle 111\rangle$ 和 $\{123\}\langle 111\rangle$ 混合滑移模式，活化多于 5 个滑移系的屈服应力状态的百分数为 8.7%. 由此可见，对于 bcc 金属而言，随着 $\{112\}\langle 111\rangle$ 和 $\{123\}\langle 111\rangle$ 滑移系的引入，引起活化滑移系不确定性的屈服顶点百分数与纯 $\{110\}\langle 111\rangle$ 滑移相比，逐渐下降. 根据晶体塑性理论，由于对于任一取向的晶体，在体积不变的情况下，仅需 5 个独立的活化滑移系即可相容任意形状的变形. 而形变织构的演变恰好是由活化滑移系确定的，对于超过 5 个活化系的屈服顶点，由于活化滑移系选择的模糊性，相应地，形变织构具有不确定性. 因此可以推断，随着 $\{112\}\langle 111\rangle$ 和 $\{123\}\langle 111\rangle$ 滑移系的引入，形变织构的不确定性程度也将越来越小.

进一步分析可知，利用本文求出的屈服应力状态，结合最大塑性功原理，在分析 bcc 金属轴对称塑性流动的 Taylor 因子和活化滑移系时，其结果与 Chin 等 [13] 使用最小内功原理是一致的. 这证明了本文的分析结果是正确的. 因此，对于任意取向晶粒的不同变形方式，由本文计算的屈服顶点，既可计算出它的 Taylor 因子，预测其变形的难易，也可确定相应的活化滑移系，计算晶粒的旋转和取向变化. 此外，对于 bcc 单晶和具有强织构的多晶材料，根据 Montheillet 等 [14] 提出的 CMTP 方法，应用本文计算的应力状态，可以导出简单的屈服面来描述其流变行为，在此不再多述.

3 结论

(1) 基于 Taylor/Bishop-Hill 晶体塑性理论，系统分析了 bcc 金属在 $\{110\}\langle 111\rangle$, $\{112\}\langle 111\rangle$ 和 $\{123\}\langle 111\rangle$ 上滑移的单晶屈服面.

(2) 求出了 $\{110\}\langle 111\rangle$, $\{112\}\langle 111\rangle$ 和 $\{123\}\langle 111\rangle$ 多滑移的临界剪切相等时的混合屈服应力状态，并将其按结构对称性加以分类. 结果表明：共有 58 组屈服应力状态，它们分别活化 8, 6 或 5 个滑移系：其中 8 组活化 8 个滑移系，共有 48 种应力状态； 2 组活化 6 个系，共有 48 种顶点； 48 组活化 5 个系，共有 1008 种顶点.

(3) 与纯 $\{110\}\langle 111\rangle$ 滑移相比，随着 $\{112\}\langle 111\rangle$ 和 $\{123\}\langle 111\rangle$ 滑移的引入，活化滑移系选择的不确定性程度逐渐降低.

参考文献

[1] Taylor G I. *J Inst Metals*, 1938; 62: 307

[2] Houtte P V. *ICOTOM 6*, 1981; 1: 428

[3] Kocks U F, Canova G R, Jonas J J. *Acta Metall*, 1983; 31: 1243

[4] Bishop J F W, Hill R. *Philos Mag*, 1951; 42: 1298

[5] Bishop J F W. *Philos Mag*, 1952; 42: 51

[6] Piehler H R, Backofen W A. *Metall Trans*, 1971; 2: 249

[7] Raphanel J L, Schmitt J H. *Mater Sci Eng*, 1984; 64: 255

[8] Schmitt J H, Raphanel J L. *Mater Sci Eng*, 1986; 80: 31

[9] Orlans–Joliet B, Bacroix B, Montheillet F, Driver J H, Jonas J J. *Acta Metall*, 1988; 36: 1365

[10] Chen Z Y, Zhang X M, Zhou Z P, Li S Y, Yang Y, Liu C M. *Acta Metall Sin*, 1999; 35: 796
(陈志永，张新明，周卓平，李赛毅，杨　扬，刘楚明. 金属学报， 1999; 35: 796)

[11] Chen Z Y, Zhang X M, Liu C M, Zhou Z P, Li S Y, Yang Y. *J Mater Sci Technol*, 2001; 17: 605

[12] Chen Z Y, Zhang X M, Zhou Z P, Li S, Liu C M. *Metall Mater Trans A*, 2000; 31A: 2449

[13] Chin G Y, Mammel W L. *Trans TMS-AIME*, 1967; 239: 1400

[14] Montheillet F, Gilormini P, Jonas J J. *Acta Metall*, 1985; 33: 705