成本曲线的微分方程模拟初探：一个断想[1]

王勇 （北京大学中国经济研究中心 100871）

标准的微观经济学教程中一般都会提到长期成本曲线(LTC)是短期成本曲线(STC)的下包络线(envelope curve)。这是因为短期内存在某些不变要素（如生产规模的固定，某要素数量的约束），而长期来讲这些限制都不存在，因而长期平均成本曲线一定不高于短期成本曲线，并在某些点上两者相切。

其证明过程即为著名的包络定理的展开：设短期总成本函数为 STC (x,c(x))，x 表产量，c 表短期内固定要素，它是产量 x 的函数。

$$\frac{dSTC(x,c(x))}{dx}=\frac{\partial STC}{\partial x}+\frac{\partial STC}{\partial c}\cdot\frac{dc}{dx}$$

当 c 取最优值 c* 时，

故

$$\frac{\partial STC}{\partial c}=0$$

$$\frac{dSTC(x,c^*(x))}{dx}=\frac{\partial STC}{\partial x}$$

而长期总成本 LTC(x)=STC(x,c*(x)), （a）

故有

$$\frac{dSTC(x,c^*(x))}{dx}=\frac{\partial STC(x,c)}{\partial x}\Big|_{c=c^*}$$

（b）

亦即长期边际成本等于短期内不变要素调到最优时的短期边际成本。

又

$$\frac{dLAC(x)}{dx}=\frac{d\,\frac{LTC(x)}{x}}{dx}=\frac{\frac{dLTC(x)}{dx}\cdot x-LTC(x)}{x^2}$$

$$\frac{\partial SAC(x,c)}{\partial x}=\frac{\partial\,\frac{STC(x,c)}{x}}{\partial x}=\frac{\frac{\partial STC(x,c)}{\partial x}\cdot x-STC(x,c(x))}{x^2}$$

[1] 作者感谢平新乔教授审阅了本稿。

当 c调到最优值 c^*时，由（a），（b）式可知：

$$\frac{dLAC(x)}{dx} = \frac{\partial SAC(x, c^*(x))}{\partial x}$$

即长期平均成本曲线(LAC)与短期平均成本曲线(SAC)在 c*处相切，证毕。

然而上述讨论尽管解释了 SAC 与 LAC 曲线之间的关系，但还存在两点不足之处：

1．短期平均成本函数 SAC(x,c(x))是抽象的函数，不易分析平均成本、产量及限制性条件 c 的具体数量关系。

2．短期平均成本曲线方程与长期平均成本曲线方程是形式上分离的两条不同方程,不能明确显示两者间的逻辑关系。

基于上述认识，我们自然要问：是否存在（甚至构造）一条包含 LAC 曲线信息的具体的 SAC 曲线，或是否存在（甚至构造）一条同时包含 LAC 与 SAC 信息的“综合平均成本曲线（Comprehensive Average Cost, 简称 CAC）”，以求足够好地克服传统成本曲线的这些缺点?

为解决上述问题，我们有必要引入微分几何学中“包络”的严格定义。包络是指对应于微分方程中奇解的一条特殊积分曲线，在包络线上每一点都有积分曲线簇中的一条积分曲线与之在该点相切。而奇解则是指不属于微分方程的积分曲线簇的特殊解。为便于理解，我们来看这样一条具体的非线性一阶常微分方程：

$$y - 10 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x-20)\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{(x-20)^2}{2} \qquad (1)$$

鉴于该方程的求解过程对于后续讨论是重要的，故详解如下:

解：

（1）式等价于

$$y - 10 = \left(\frac{d(y-10)}{dx}\right)^2 - (x-20)\cdot\frac{d(y-10)}{dx} + \frac{(x-20)^2}{2}$$

令 p=$\frac{d(y-10)}{dx}$;则有

$$y - 10 = p^2 - (x-20)\cdot p + \frac{(x-20)^2}{2} \qquad (2)$$

再将(2)式两边对 x求导,整理后得:

$$(p'-1)\cdot(2p - x + 20) = 0$$

(i)

$$p' - 1 = 0 \Rightarrow p = x + \tilde{c}$$

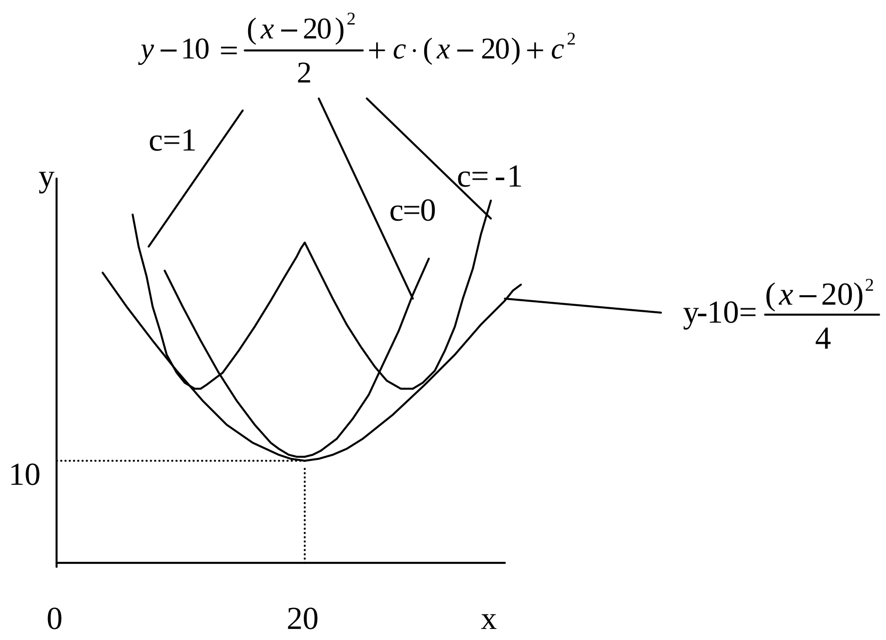
其中$\tilde{c}$ 为任意实数，再代入（2）式，有

其中 c=$\tilde{c}$ +20,**亦为任意实数**. (3)

(ii)2p-x+20=0,**代入（2）式，整理后得：**

$$y-10=\frac{(x-20)^2}{4} \tag{4}$$

从而微分方程（1）的解对应的图像如图一所示：



图一

其中（3）式对应于一个抛物曲线簇，而（4）式则是这样的解：它与该抛物曲线簇中的任何一条都相切，但又不属于该积分曲线簇，即（4）式为微分方程（1）的奇解，几何意义上则称之为包络。显然如果 y **轴表示平均成本，**x**轴表示产量，这正是** LAC **曲线（对应（4）式）与** SAC **曲线簇（对应（3）式），并且最低长期平均成本为** 10，**对应产量为** 20。**所有这些信息竟然能浓缩在单独一条微分方程（1）式之中！而这正是我们要找的“耶利亚女郎”——不显含短期生产条件限制参数（这里指** c）**的“综合平均成本方程”！**

对于短期平均成本曲线方程

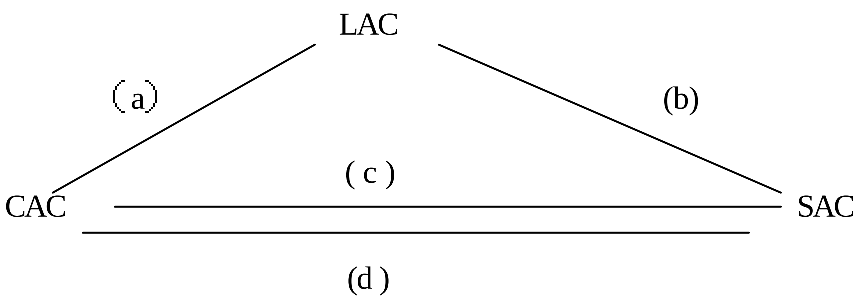
$$y-10=\frac{(x-20)^2}{2}+c\cdot(x-20)+c^2, x\in R$$

其中 c **可以理解为短期内不变要素。如果该方程两边对** x **求导两次；则可得到成本曲线方程（1）式。而长期平均成本曲线（4）亦可由短期平均成本曲线直接计算得到：**

（2）式两边对 c 求偏导，得到：$c=-\frac{x-20}{2}$，代入（3）式，消去 c后即可得（4）式[2]。而$c=-\frac{x-20}{2}$正说明限制性条件 c应该如何随产量作最优调整才能达到最低平均成本。这说明长期平均成本曲线依某一规律充分微调（calibration）后得到的。反之，倘若仅仅知道长期平均成本曲线方程则无法推测短期平均成本曲线，这种计算上的不可逆性也正符合两种平均成本曲线之间的关系：时间向量是不可逆的，长期平均成本变动当然后于短期平均成本变化。

另外，倘若仅晓得“综合成本曲线 ”方程（1），亦可直接求解长期平均成本曲线[3]。将（1）化为（2）式后，对 p 求偏导，得：2p=x-20,代回（2）式即得 LAC 曲线方程（4）式。

以上我们讨论了综合平均成本曲线方程,短期平均成本方程，即长期平均成本方程之间的相互换算方法。可归纳为图二如下。



其中，（a）：求 p-判别曲线或换元求解
（b）：求 c-判别曲线
（c）：换元求解
（d）：求两阶导数

图二

至此，本文已用实例直观地阐明了综合成本曲线在用微分方程模拟之后所具有的理论优点（高信息量、简洁）以及三种成本曲线的内在联系与转换方式，这正是本文目的之所在。如果能够用计量的方法找到相应的综合平均成本方程和相关参数（如 c）的计量值，则不但可以帮助生产决策者尽快找到长期最有效率生产点，而且还可推出短期制约要素应如何调整的具体方式，这是极具现实经济操作意义的。至于如何通过样本数据，用计量方法来模拟综合成本曲线，则需专门讨论，这已超出本文范围。不过有两点可提请计量经济学家注意：

[2] 这实际上是求单参数曲线簇的包络线，应从对应的 c-判别曲线中找，计算 $\Phi_c(x,y,c)=0$ 后与上式联系，消去 c 而可得 c-判别曲线。但注意 c-判别曲线中有些可能不是包络线。

[3] 这是从中求包络。令 $\frac{dy}{dx}=p$；求 $F_p(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ 与前式联立消去 p,即得 p-判别曲线，包络线应从 p-判别曲线中寻找，但注意 p-判别曲线中有些可能不是包络线。

（1） 模拟综合平均成本曲线的关键在于寻求短期平均成本曲线簇方程。

（2） 这里先验假设长期平均成本曲线为抛物线型[4] $y=ax^2+bx+d$ ，而决定抛物线形状的二次项系数 a是始终不变的，并可由任意短期平均成本数据样本得到。而 b,d对于不同的"短期"是变化的，其中既包括长期最优效率规模点（即长期平均成本曲线的最低点）的信息，又包括反映各期限制性生产条件的参数 c，而 c在短期平均成本曲线上的具体数值要依时间序列样本而定。

参考文献：

《微观经济学高级教程》第三版 H.R.Varian著 周洪等译 经济科学出版社 pp74-78,pp524-526

《常微分方程》（第二版） 王高雄等编 高等教育出版社 pp53-55,pp93-99

[4] 这种假定的合理性是值得进一步讨论的，本文之所以采用该假定主要由于：（1）这种数学形式最简单（解对应的非线性微分方程通常很困难，高阶则更困难）；（2）这种形式较好地体现了平均成本曲线的诸多基本经济学性质。