

金属橡胶材料的动态力学模型*

李宇明 郑 坚 白鸿柏

(军械工程学院)

摘 要 提出了用等效粘性阻尼理论和试验相结合, 建立金属橡胶材料动态力学模型的一种新方法. 用此方法, 把金属橡胶材料的阻尼耗能机理等效为粘性阻尼, 金属橡胶的恢复力由高阶非线性多项式和等效的粘性阻尼力叠加而成. 模型中考虑了振幅和频率的影响, 参数可通过试验数据辨识出来. 用所建模型可以重新构造其它振幅和频率下的恢复力与位移的滞后曲线, 得到了金属橡胶材料阻尼特性在振幅和频率影响下的变化规律.

关键词 材料科学基础学科, 金属橡胶, 动态力学模型, 结构阻尼, 粘性阻尼, 滞后环

分类号 TB302

文章编号 1005-3093(2003)05-0499-06

Dynamic mechanics model of metal-rubber materials

LI Yuming** ZHENG Jian BAI Hongbai

(The Ordnance Engineering University, Shijiazhuang 050003)

* Supported by National Natural Science Foundation of China No.50105021. Manuscript received December 16, 2002; in revised form July 24, 2003.

** To whom correspondence should be addressed, Tel:(0311)7992172, E-mail:liyuming1976@sina.com.

ABSTRACT A new method for setting up the dynamic model of metal-rubber materials was proposed by using the equivalent viscous damping theory. With this method, the damping mechanism of the metal-rubber material can be equivalent to the viscous damping, and the resuming force can be overlapped by high-step nonlinear polynomial and equivalent viscous damping force. The influences of the amplitude and frequency of deformation were considered, and the parameters in the model were determined by fitting the test data. The resuming force and hysteresis curve of displacement at different amplitudes and frequencies have been obtained. It showed that this model can describe the nonlinear vibration of metal-rubber material very well.

KEY WORDS foundational discipline in materials science, metal-rubber, dynamical model, structural damping, viscous damping, hysteresis loop

金属橡胶^[1]是一种具有高阻尼性能的新型弹性减振材料, 在受到振动位移时, 金属橡胶内部金属丝之间相互摩擦可耗散大量能量而起到减振作用. 用金属橡胶做成的减振器有许多优点, 如阻尼性能、弹性性能好, 使用寿命长等, 具有广泛的应用前景. 为了进行减振系统的动力学设计和动力优化, 需要建立金属橡胶材料的动态力学模型. 由金属橡胶材料构成的迟滞非线性系统, 其建模方法通常有非参数模型和参数模型. 采用正交多项式逼近非线性力的非参数模型^[2,3]不含系统参数, 物理意义不清晰; 属于参数模型的双折线模型^[4], 通常用微分方程描述迟滞系统的恢复力, 但各参数物理意义不明确, 其微分形式不利于系统辨识, 较难用于分析迟滞系统的稳态

* 国家自然科学基金资助项目 50105021. 2002 年 12 月 16 日收到初稿; 2003 年 7 月 24 日收到修改稿.
本文联系人: 李宇明, 石家庄市 050003, 军械工程学院训练部高教研究所

响应. 本文用一种能综合反映金属橡胶动态的新方法建立金属橡胶材料的动态模型.

1 阻尼等效理论

金属橡胶构件在减振系统中受到振动位移时, 金属橡胶材料的阻尼耗能机理很复杂, 例如金属橡胶材料内部微元弹簧接触面之间的摩擦力所引起的阻尼可以归结为结构阻尼; 另一方面, 由于部分金属丝之间的滑移和扭转变形不能完全复原, 产生了永久性的变形, 表现为粘性阻尼. 这些消耗的功以热能的形式耗散在周围环境中, 从而起到缓冲和减振的功效^[5~7]. 大量实验表明, 金属橡胶材料的阻尼特性既和振幅有关, 又和频率有关. 因为对金属橡胶材料内部微元弹簧之间接触点的数量和接触面之间的摩擦力没有充分的了解, 在考虑结构阻尼时采用等效粘性阻尼方法^[8].

假设在粘性阻尼系统每一个周期的强迫振动中, 能量损失和简谐振动的幅值 X 是相同的, 则阻尼力耗散的能量为

$$\Delta E = \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} cX^2\Omega^2 \sin^2(\Omega t - \varphi) dt = \pi c\Omega X^2 \quad (1)$$

无数次循环加载后, 力与位移之间关系形成了一条封闭的滞后曲线^[9]. 设结构阻尼在一周内消耗的能量为

$$\Delta E_1^* = aX^2 \quad (2)$$

其中 a 为与频率无关的常数. 由 (1) 式可得系统所固有的粘性阻尼在一周内消耗的能量为

$$\Delta E_2^* = \pi c\Omega X^2 = b\Omega X^2 \quad (3)$$

其中 b 为与频率和振幅均无关的常数.

等效粘性阻尼系数为

$$c_{eq} = \frac{\Delta E_1^* + \Delta E_2^*}{\pi\Omega X^2} = \frac{a + b\Omega}{\pi\Omega} \quad (4)$$

2 动态力学模型

对于用于减振缓冲系统中的金属橡胶材料^[10], 可以采用高阶非线性多项式和等效的粘性阻尼力叠加的方法构造其动态模型, 描述其在减振系统中的迟滞恢复力.

在减振支承元件性质相同和安装几何对称的情况下, 可以认为上下两条恢复力曲线是位移反对称的, 按最小二乘原理拟合出上下两条恢复力曲线. 设用于拟合上曲线数据的幂函数多项式为

$$F_u(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad \dot{x} > 0 \quad (5)$$

其中 $\dot{x} > 0$ 表示加载速度为正. 根据反对称原理, 用于拟合下曲线数据的幂函数多项式为:

$$F_l(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} a_i x^i, \quad \dot{x} < 0 \quad (6)$$

其中 $\dot{x} < 0$ 表示卸载速度为负, F_u, F_l 表示减振支承迟滞恢复力的上、下曲线, 为幂函数多项式系数, 幂函数多项式所取项数 n 按所拟合的滞后曲线形状和对表达式要求的精度而定.

将式中幂函数多项式的奇、偶项分别写为:

$$F_u(x) = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} a_{(2i-1)} x^{2i-1} + \sum_{i=0}^{(n-1)/2} a_{(2i)} x^{2i}, \quad \dot{x} > 0 \quad (7)$$

$$F_l(x) = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} a_{(2i-1)} x^{2i-1} - \sum_{i=0}^{(n-1)/2} a_{(2i)} x^{2i}, \quad \dot{x} < 0 \quad (8)$$

两式可以合并为:

$$F(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} a_{(2i-1)} x^{2i-1} + \sum_{i=0}^{(n-1)/2} a_{(2i)} x^{2i} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (9)$$

$$F(x, \dot{x}) = F_k(x) + F_{c_{eq}}(x, \dot{x}) \quad (10)$$

以上数学处理和图 1 表明, 减振支承的迟滞恢复力可以分解为 $F_k(x)$ 和 $F_{c_{eq}}(x, \dot{x})$, $F_k(x)$ 表示非线性弹性力, $F_{c_{eq}}(x, \dot{x})$ 表示等效的粘性阻尼力. $F_k(x)$ 为一条单值非线性函数曲线, $F_{c_{eq}}(x, \dot{x})$ 为一条双值非线性闭合曲线.

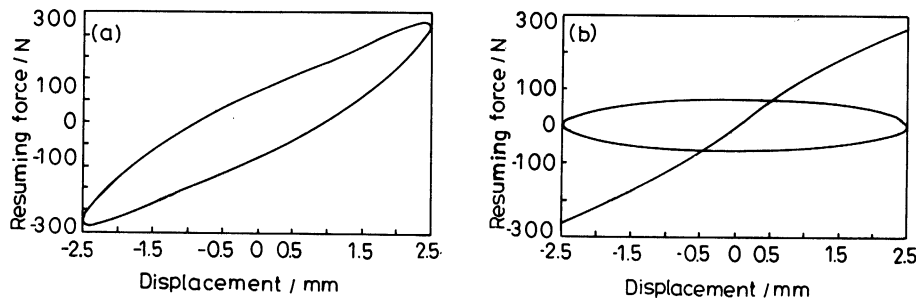


图 1 恢复力与位移的关系, 滞环由曲线和椭圆叠加而成

Fig.1 Relationship between resuming force and displacement: hysteresis loop is overlapped by a curve and an ellipse

由式 (9), 取 $n=1$ 可得线性恢复力

$$F_{(k)}(x) = a_1 x \quad (11)$$

取 $n=5$ 时可得强非线性恢复力

$$F_k(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 \quad (12)$$

于是可以得到非线性弹性恢复力为

$$F_k = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} K_{2i-1} \cdot x^{2i-1} \quad (13)$$

其中 K_{2i-1} 为刚度系数.

因为等效粘性阻尼系数 c_{eq} 随着频率 Ω 变化, 非线性等效阻尼力为

$$F_{c_{eq}} = c_{eq}(\Omega) \cdot |\dot{x}| \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (14)$$

其中 $c_{eq}(\Omega)$ 为等效粘性阻尼系数. 于是迟滞恢复力为

$$F(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} K_{(2i-1)} \cdot x^{2i-1} + c_{eq}(\Omega) \cdot |\dot{x}| \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (15)$$

将 $\dot{x}(t) = -X\Omega \sin(\Omega t - \varphi)$ 和 $c_{eq} = \frac{a+b\Omega}{\pi\Omega}$ 代入, 得到

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} K_{(2i-1)} \cdot x^{2i-1} + \frac{a+b\Omega}{\pi\Omega} |X\Omega \sin(\Omega t - \varphi)| \operatorname{sgn}(-X\Omega \sin(\Omega t - \varphi)) \\ &= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} K_{(2i-1)} \cdot x^{2i-1} \pm \frac{a+b\Omega}{\pi} \sqrt{X^2 - x^2} \end{aligned} \quad (16)$$

由式 (16) 可见, 迟滞恢复力与频率 Ω 和振幅 X 均有关系.

3 参 数 识 别

略去高阶无穷小项, 取 $n=5$, 式 (16) 给出

$$F(x) = K_1 \cdot x + K_3 \cdot x^3 + K_5 \cdot x^5 \pm \frac{a+b\Omega}{\pi} \sqrt{X^2 - x^2} \quad (17)$$

其中 K_1, K_3, K_5, a 和 b 为未知参数.

为了求出这些未知参数, 用非线性最小二乘参数辨识法编制 matlab 程序. 实验数据通过 MTS810 材料实验机采集. 试件由丝径 0.2 mm 的 0Cr18Ni9Ti 不锈钢金属丝压制而成, 成型压

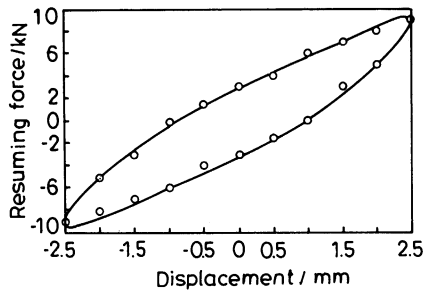


图 2 频率 2 Hz, 振幅 2.5 mm 下测试与拟合的恢复力 - 位移关系曲线

Fig.2 Relationship between resuming force and displacement under frequency 2 Hz and amplitude 2.5 mm

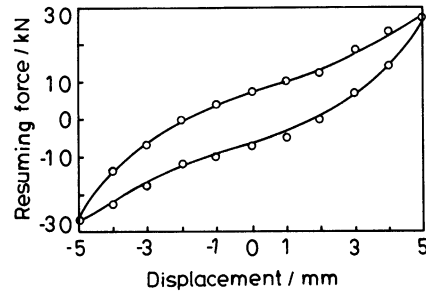


图 3 频率 2 Hz, 振幅 5 mm 下测试与拟合的恢复力 - 位移关系曲线

Fig.3 Relationship between resuming force and displacement under frequency 2 Hz and amplitude 5 mm

力约为 8×10^4 N, 成型后试件的密度为 0.4 g/mm^3 , 横截面积为 $10.81 \text{ mm} \times 11.36 \text{ mm}$. 在频率为 2 Hz, 振幅为 2.5 mm 的交变拉压振动下, 拟合出金属橡胶材料动态力学模型的未知参数和经验公式, 图 2 为滞后曲线.

将 $K_1=2.9043$, $K_3=0.1128$, $K_5=-6.698 \times 10^{-4}$, $a=1.2293$, $b=1.3764$ 代入式 (17), 可得到恢复力的数学模型

$$F(x) = 2.9043 \cdot x + 0.1128 \cdot x^3 - 6.698 \times 10^{-4} \cdot x^5 \pm \frac{1.2293 + 1.3764\Omega}{\pi} \sqrt{X^2 - x^2} \quad (18)$$

根据此式可以画出频率为 2 Hz, 振幅为 5 mm, 和频率为 10 Hz, 振幅分别为 2.5 mm 和 5 mm 的滞后曲线 (图 3~7). 可以看出, 理论滞后曲线与试验滞后曲线吻合得比较好. 采用高阶非线性多项式表示的非线性弹性恢复力和等效粘性阻尼力叠加方法构造的金属橡胶动态模型, 可以比

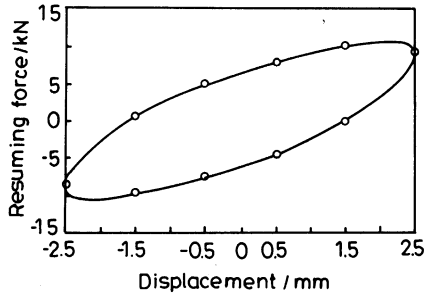


图 4 频率 5 Hz, 振幅 2.5 mm 下测试与拟合的恢复力 - 位移关系曲线
Fig.4 Relationship between resuming force and displacement under frequency 5 Hz and amplitude 2.5 mm

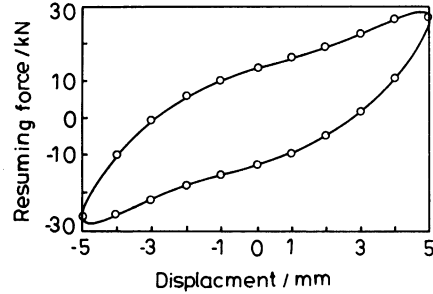


图 5 频率 5 Hz, 振幅 5 mm 下测试与拟合的恢复力 - 位移关系曲线
Fig.5 Relationship between resuming force and displacement under frequency 5 Hz and amplitude 5 mm

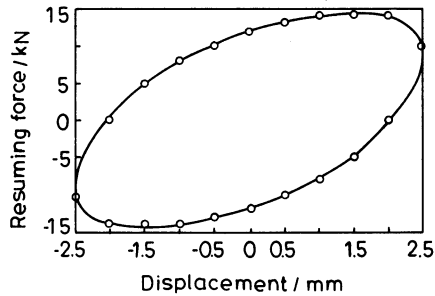


图 6 频率 10 Hz, 振幅 2.5 mm 下测试与拟合的恢复力 - 位移关系曲线
Fig.6 Relationship between resuming force and displacement under frequency 10 Hz and amplitude 2.5 mm

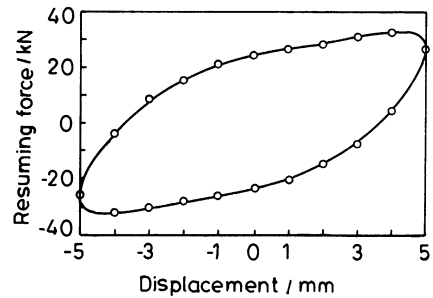


图 7 频率 10 Hz, 振幅 5 mm 下测试与拟合的恢复力 - 位移关系曲线
Fig.7 Relationship between resuming force and displacement under frequency 10 Hz and amplitude 5 mm

较准确的描述金属橡胶材料在减振系统中的迟滞恢复力, 滞后曲线的形状和宽窄与振幅和频率有关. 如果以滞后曲线所围的面积表示阻尼耗能系数的大小, 随着激振频率的增加, 阻尼系数表现出递增的趋势; 在振幅较小时, 金属橡胶材料具有粘性阻尼特性, 随着振幅的增加, 逐渐转变为结构阻尼特性. 用该方法能有效地构造和辨识出对应的函数和参数, 获得金属橡胶减振器恢复力的精确表达式.

4 结 论

采用高阶非线性多项式表示的非线性弹性恢复力和等效粘性阻尼力叠加方法构造的金属橡胶动态模型, 可以比较准确的描述金属橡胶材料在减振系统中的迟滞恢复力, 滞后曲线的形状与振幅和频率有关. 随着激振频率的增加, 阻尼系数表现出递增的趋势; 在振幅较小时, 金属橡胶材料表现为粘性阻尼特性, 随着振幅的增加, 逐渐转变为结构阻尼特性.

参 考 文 献

- 1 Д. Е. ЧЕГОДАЕВ, О. П. МУЛЮИН, Е. В. КОЛТЫГИН, LI Zhongying(李中鄂), *Design of Metal-Rubber Component* (金属橡胶构件的设计) (Beijing, National Defence Industry Press, 2000.4)
- 2 S.F.Masri, T.K.Caughey, A Random Vibration of Hysteretic System, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, **4**, 249(1976)
- 3 S.F.Masri, Nonparameter Identification of Nearly Arbitrary Nonlinear System, *Appli.Mech.*, **49**(3), 619(1982)
- 4 HUANG Xieqing(黄协清), ZHANG Tieshan(张铁山), ZHANG Junhua(张俊华), Research on Vibration Isolation Characteristics of Metal-Rubber Material (金属橡胶材料隔振特性研究), *Mechanical Science and Technology* (机械科学与技术), **6**, 977(2000)
- 5 DAI Depei(戴德沛), *Engineering Application of Damping Technology*(阻尼技术的工程应用) (Beijing, Tsinghua University Press, 1991.17)
- 6 J.B.Roberts, F.Kaya, Vibration Control of A Flexible Transmission Shaft by Means of A Squeeze-Film Damper, An Experimental Investigation, *Journal of Sound and Vibration*, **113**(2), 57(1987)
- 7 D.S.Jones, An Approximate Boundary Condition in Acoustics, *Journal of Sound and Vibration*, **121**(1), 37(1988)
- 8 WANG Bin(王 彬), *Analysis and Application of Vibration*(振动分析及应用) (Beijing, HaiChao Press, 1992.58)
- 9 BAI Hongbai(白鸿柏), *Hysteresis Vibration System and Engineering Application* (滞迟振动系统及其工程应用) (Beijing, Science Press, 2002.1)
- 10 GONG Xiansheng(龚宪生), TANG Yike(唐一科), New Method for Modeling of a Nonlinear Vibration System with Hysteresis Characteristics(一类迟滞非线性振动系统建模新方法), *Chinese Journal of Mechanical Engineering*(机械工程学报), **4**, 11(1999)