

# Level Set 追踪等温非牛顿熔体前沿界面<sup>1)</sup>

郑素佩 欧阳洁<sup>2)</sup>

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

**摘要** 应用 Level Set 方法追踪薄壁型腔内 Hele-Shaw 熔体流动前沿界面, 采用 5 阶加权本质无振荡格式耦合中心差分格式实现了充填阶段的动态模拟. 准确追踪到了不同时刻熔体前沿界面, 并得到了对应的压力等值线分布, 数值结果表明 Level Set 方法是准确追踪注塑成型熔体前沿界面的一种行之有效的办法.

**关键词** Level Set 方法, WENO 格式, 熔体前沿, 注塑成型

## THE LEVEL SET METHOD FOR TRACKING THE ISOTHERMAL NON-NEWTON MELT FRONT SURFACE<sup>1)</sup>

ZHENG Supei OUYANG Jie<sup>2)</sup>

(Department of Applied Mathematics, North Western Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract** In order to track the polymer melt front precisely, the Level Set method is used. The controlling mechanism is the Hele-Shaw model. The level set equations are discretized by the fifth order weighted essentially non-oscillatory scheme, and physical quantities are obtained by central difference scheme. The melt front is tracked accurately and the distribution of the pressure is discussed at different times during the injection molding. The results are promising.

**Key words** Level Set method, weighted essentially non-oscillatory scheme, melt front, injection-molding

准确地确定聚合物熔体前沿的位置具有非常重要的意义. 目前聚合物熔体前沿追踪方法中比较常用的是流体体积 (volume of fluid, VOF) 法<sup>[1]</sup> 和控制体积法<sup>[2]</sup>, 但这两种方法均是根据熔体体积比数值将前沿界面控制在某个区域范围内, 降低了数值精度; 另外, 这两种方法均不能准确地刻画前沿界面的几何特征. 而由 Osher 等<sup>[3]</sup> 于 1988 年提出的 Level Set 方法能够准确追踪产生拐角、尖角和拓扑变化剧烈的前沿界面, 且易于向三维推广. 目前它受到众多学者的广泛关注和研究. 已广泛应用于物理学、流体力学、固体力学、材料力学、图形图像处理、计算机可视化和半导体加工等领域. 但是, 在化工领域应用还比较少<sup>[4]</sup>.

基于聚合物熔体前沿界面研究在注塑成型研究中的重要作用, 以及目前熔体前沿界面追踪方法存在的不足, 本文用 Level Set 函数代替 VOF 方法和控制体积法中的流体体积比函数. 采用高阶 WENO 格

式求解 Level Set 方程, 耦合求解物理量控制方程的中心差分格式完成对熔体前沿的追踪. 最后通过数值算例验证 Level Set 方法追踪前沿界面的准确性.

### 1 Level Set 方法数学描述

设  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  分别为区域  $\Omega$  内两种互不相溶的流体  $A, B$  在时刻  $t$  所在的区域,  $\Gamma(t)$  为两种流体的分界面, 如图 1 所示. 为准确追踪前沿界面, 等值面函数要始终满足是点  $x$  到界面  $\Gamma(t)$  的符号距离这一性质. 将运动界面  $\Gamma(t)$  定义为函数  $\varphi(x, t)$  (Level Set 函数) 的零等值面, 让 Level Set 函数以适当的速度移动, 这样, 在任意时刻, 只要知道了  $\varphi(x, t)$  的值, 求出其零等值面也就知道了此时的活动界面. 因此移动界面问题就等价于对 Level Set 函数  $\varphi$  的更新问题, 这可以通过求解 Level Set 函数控制方程来实现. 通常该类控制方程有多种形式, 这与所研究的具体问题及研究者的喜好有关, 下面给出其中

2006-05-16 收到第 1 稿, 2006-10-24 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金重大项目 (10590353) 和陕西省自然科学基金 (2005A16) 资助.

2) E-mail: jieouyang@nwpu.edu.cn

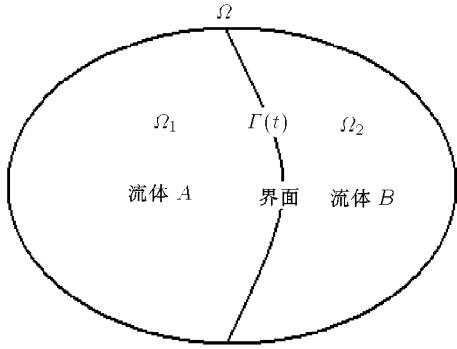


图 1 Level Set 追踪界面示意图

的一种形式 [5]

$$\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y = 0 \tag{1}$$

其中  $u, v$  为流体流动速度。

为了使 Level Set 函数  $\varphi(x, t)$  能够保持其良好的性质, 需要进行“重新初始化”。这一过程在理论上是通过求解如下偏微分方程初值问题的稳定解来实现的。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{sign}(\varphi_0)(1 - |\nabla \varphi|), \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \tag{2}$$

## 2 Level Set 方法数值实现

对照 Level Set 方法追踪自由面问题的求解步骤 [5], 以薄壁型腔内聚合物熔体前沿界面的追踪为例对求解过程进行详细阐述。其中 Level Set 函数与物理量的耦合采用了 Ghost Fluid 方法 [6]。

### 2.1 Level Set 方程的求解

Level Set 函数控制方程 (1) 及重新初始化方程 (2) 均属 Hamilton-Jacobi 方程, 对该类偏微分方程的求解, 本文采用具有高阶精度且数值结果稳定无振荡的 5 阶 WENO (weighted ENO) 格式。WENO 格式是由 Liu 等 [7] 于 1994 年在 ENO (essentially non-oscillatory) 格式的基础上提出的。2000 年, Jiang 等 [8] 将其应用于 Hamilton-Jacobi 方程的求解中。该格式不仅保留了原有 ENO 格式的优点, 而且在计算模板节点相同的情况下, 具有数值精度高和稳定性好的特点。

### 2.2 物理量控制方程的求解

在工程实际中, 注塑成型加工的塑件大部分都是薄壁件, 壁厚方向的尺寸远小于其它两个方向的尺寸。这种型腔内非牛顿流体在等温条件下的流动控制方程可以用广义 Hele-Shaw 模型来描述 [9]。

连续性方程

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

运动方程

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \tag{5}$$

其中  $h$  为型腔的厚度,  $\bar{u}, \bar{v}$  分别为  $x, y$  方向的速度,  $\mu, v$  在型腔厚度方向上的平均,  $p$  为压力,  $z$  表示模腔的厚度坐标,  $\mu$  表示剪切黏度, 此处用幂率黏度模型, 即

$$\left. \begin{aligned} \mu &= A \exp\left(\frac{T_a}{T}\right) \dot{\gamma}^{n-1} = m(T) \dot{\gamma}^{n-1} \\ \dot{\gamma} &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

其中  $m(T)$  是一个与温度 ( $T$ ) 有关的函数, 本文处理的是等温熔体流动, 不涉及温度变化, 故  $m(T)$  为一常数,  $\dot{\gamma}$  为剪切速率。

流动平面边界条件为:

(1) 在型腔壁面上, 速度采用无滑移边界条件, 即  $u(x, y, h, t) = 0 = v(x, y, h, t)$ , 压力采用无渗透边界条件, 即  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ ;

(2) 速度、压力关于中面对称, 即

$$\frac{\partial u(x, y, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial v(x, y, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial p(x, y, 0, t)}{\partial z} = 0$$

(3) 前沿界面上压力为零。

利用上述边界条件, 将等温物理量控制方程简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( S \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( S \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= 0 \\ \bar{u} &= \frac{S}{h} A_x, \quad \bar{v} = \frac{S}{h} A_y \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

其中  $S = \int_0^h \frac{z^2}{\mu} dz$ 。

对上面这组偏微分方程 (7) 及相应的上述定解条件, 除非做大量的假设和简化, 否则很难得到解析解, 因此只能借助于数值方法来实现。本文采用中心差分格式对其进行了离散求解。

## 3 数值算例

本文考虑长, 宽, 高分别为 17.76 mm, 11.76 mm 和 0.2 mm 的矩形薄壁型腔。计算所采用的工艺条件和物质参数为: 熔体和型腔壁面温度  $T = 200^\circ\text{C}$ , 熔体注射压力  $p = 70 \text{ MPa}$ 。黏度模型中的参数  $n = 1/3, A = 0.24 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n, T_a = 6000 \text{ K}^{[2]}$ 。

图 2, 图 3 给出了注射点为 6 个节点时, 在不同时刻熔体前沿界面的形状、位置和相应时刻的压力

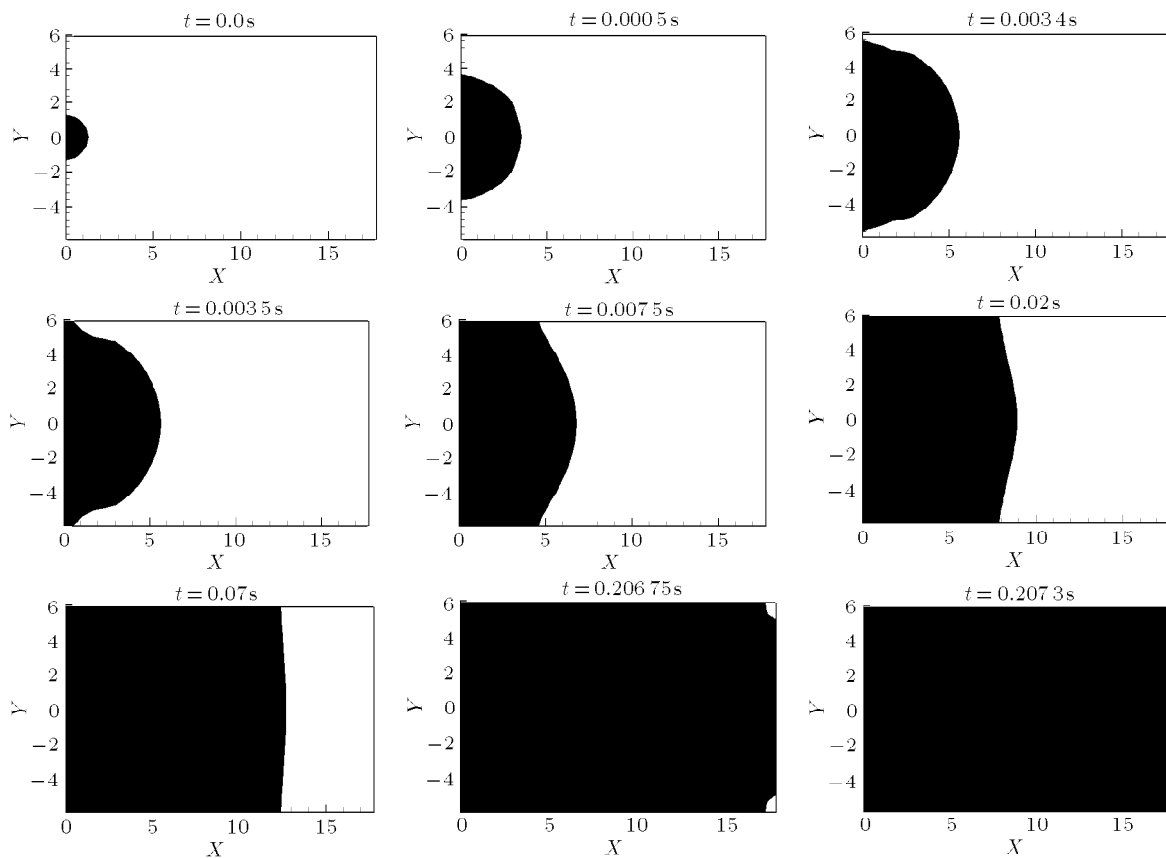


图 2 不同时刻熔体前沿界面

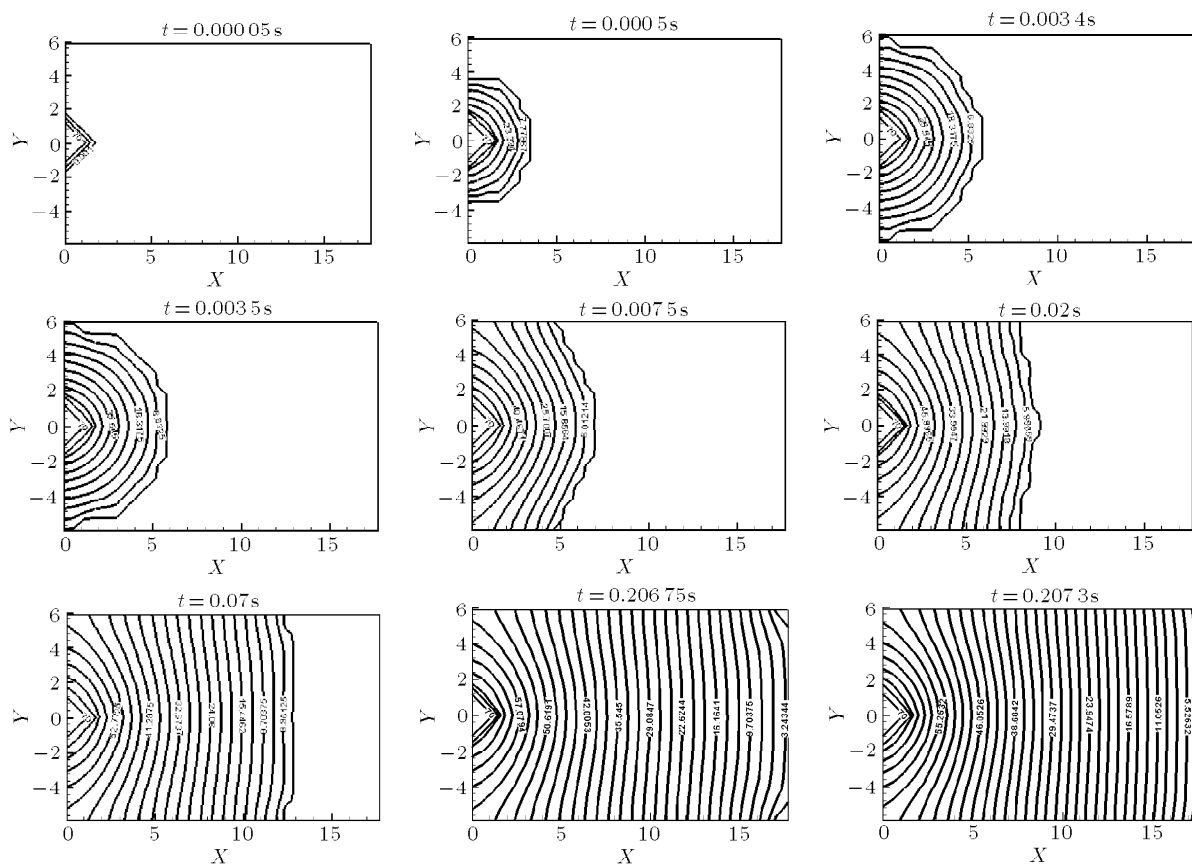


图 3 不同时刻压力等值线分布

等值线分布图, 时间单位为 s, 压力单位为 MPa, 长度单位为 mm. 图 2 中阴影区域表示熔体已充填, 白色区域表示空气或者熔体未充填. 从图中可以看出熔体前沿界面在未达到上下壁面以前, 在  $x, y$  方向以相等的速度向前发展, 前沿界面近似为一半圆面; 随着时间的增加, 半圆面状的熔体前沿界面逐渐变得平滑, 并以平滑的弧线向前发展, 最后几乎发展为一直线. 整体上来看, 熔体充填流动过程中, 离注射口近的充填区域熔体流动速度快, 而离注射口远的地方熔体流动速度慢, 熔体在型腔内的流动过程整体上呈现前快后慢的趋势. 由理论上熔体流动速率与压力梯度的关系推知在注射口处熔体压力梯度最大, 而离注射口越远的地方熔体压力梯度越小. 图 3 为不同时刻的压力等值线分布图, 注射点的压力最大, 然后逐渐递减, 直至前沿界面减少为零; 由图中的压力等值线分布可以看出压力梯度在注射口处最大, 离注射口越远越小, 这与理论分析结果一致.

#### 4 结 论

本文采用 Level Set 方法对薄壁型腔内聚合物熔体前沿进行了追踪. 得出:

(1) 熔体流动过程采用 Hele-Shaw 模型, 用高阶 WENO 格式求解 Level Set 方程, 中心差分格式求解 Hele-Shaw 模型, 采用 Ghost Fluid 方法将二者进行耦合. 确定了熔体前沿界面的准确位置, 实现了充填阶段的熔体流动过程的动态模拟. 表明 Level Set 方法是准确追踪聚合物熔体前沿界面的一种非常有效的方法.

(2) 在准确追踪聚合物熔体前沿界面的基础上, 研究了聚合物熔体的压力等值线分布, 压力梯度与熔体流动速率的变化关系与理论上两者之间的关系一致.

#### 参 考 文 献

- 1 Shen Changyu, Zhai Ming. An improved algorithm for the simulation of injection- molding filling process. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2005, 24(7): 691~698
- 2 王利霞, 申长雨, 陈静波等. 非对称边界的注塑模充填模拟. *力学与实践*, 2001, 23(3): 13~16 (Wang Lixia, Shen Changyu, Chen Jingbo, et al. Simulation of filling stage in injection molding with asymmetrical boundary. *Mechanics in Engineering*, 2001, 23(3): 13~16(in Chinese))
- 3 Osher S, Sethian JA. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 1988, 79(1): 12~49
- 4 Maitre E, Witomski P. Transport equation with boundary conditions for free surface localization. *Numer Math*, 1999, 84: 275~303
- 5 刘儒勋, 王志峰. 数值模拟方法和运动界面追踪. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2001. 196~200
- 6 Fedkiw R, Aslam T, Merriman B, et al. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *J Comput Phys*, 1999, 152: 457-492.
- 7 Liu XD, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *J Comput Phys*, 1994, 115: 200~212
- 8 Jiang GS, Peng DP. Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations. *SIAM J Sci Comput*, 2000, 21: 2126~2143
- 9 刘春太, 陈静波, 王利霞等. 注塑模充模过程的数值分析. *力学与实践*, 1999, 21(2): 37~39 (Liu Chuntai, Chen Jingbo, Wang Lixia, et al. Numerical analysis of injection mold filling process. *Mechanics in Engineering*, 1999, 21(2): 37~39(in Chinese))

## 第六届全国周培源大学生力学竞赛进展情况

受教育部高等教育司委托, 由教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会、中国力学学会和周培源基金会共同主办的第六届全国周培源大学生力学竞赛于 2007 年 5 月 20 日上午 9 时~12 时在全国 35 个大中城市同时举行初赛, 来自全国 29 个省(市)、自治区的 197 所高校 9736 人报名参赛.

中国力学学会理事长李家春院士、副理事长程耿东院士、郑晓静教授、戴世强教授; 周培源基金会副理事长兼秘书长周如苹教授; 教育部高等学校力学教学指导委员会副主任、力学基础课程教学指导分委员会主任洪嘉振教授分别到所在地赛区看望了参赛选手.

从本届的竞赛规则和试题形式上都有较大的变化. 竞赛内容不再是单纯考试型的题目, 而是融趣味性、综合性为一体的

内容. 通过一些有趣的场景引出问题, 以考查考生对力学基础知识理解及应用的能力. 本届的命题单位是清华大学.

根据竞赛程序和规则, 由竞赛组织委员会组织专家组最终评定出全国初赛个人一、二、三等奖以及优秀奖. 此次初赛选拔出的 20 个团队将参加 2007 年 8 月 16 日~19 日在北京工业大学举行的决赛. 决赛采用团队课题研究方式. 在 2007 年 8 月 20~22 日在京召开的中国力学学会学术大会上给全国竞赛优胜者颁奖.

本届试题以及参考答案已在中国力学学会全国周培源大学生力学竞赛的网站 (<http://www.cstam.org.cn/zpy/index.asp>) 上公布, 敬请查阅. 全国个人获奖名单以及参加决赛的团队名单也将于 6 月中旬在该网站上公布, 敬请关注. (刘俊丽)