

设

$$\chi(\zeta) = \bar{\omega}\left(\frac{R^2}{\zeta}\right) \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \psi(\zeta), \quad |\zeta| > R \quad (5)$$

将式 (4) 代入式 (5)，得  $\chi(\zeta)$  在圆外的奇性主部

$$\chi(\zeta) = N \ln(\zeta - \zeta_0) + \frac{a_0 M}{\zeta - \zeta_0} \quad (6)$$

式中  $a_0 = \frac{(R^4 + \zeta_0^2)\zeta_0}{R^2(\zeta_0^2 - 1)} - \frac{\zeta_0^2(\bar{\zeta}_0^2 + 1)}{\bar{\zeta}_0(\zeta_0^2 - 1)}$ .

将  $\varphi(\zeta), \chi(\zeta)$  延拓至圆内<sup>[3]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= -\bar{\chi}\left(\frac{R^2}{\zeta}\right) = -\bar{N} \ln\left(\zeta - \frac{R^2}{\bar{\zeta}_0}\right) + \\ &\quad \bar{N} \ln \zeta + \frac{\bar{a}_0 \bar{M} R^2}{\left(\zeta - \frac{R^2}{\bar{\zeta}_0}\right) \bar{\zeta}_0^2} \end{aligned} \right\}, \quad |\zeta| < R \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi(\zeta) &= -\bar{\varphi}\left(\frac{R^2}{\zeta}\right) = -\bar{M} \ln\left(\zeta - \frac{R^2}{\bar{\zeta}_0}\right) + \\ &\quad \bar{M} \ln \zeta \end{aligned} \right\}$$

由推广的 Liouville 定理有

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= M \ln(\zeta - \zeta_0) - \bar{N} \ln\left(\zeta - \frac{R^2}{\bar{\zeta}_0}\right) + \\ &\quad \bar{N} \ln \zeta + \frac{\bar{a}_0 \bar{M} R^2}{\left(\zeta - \frac{R^2}{\bar{\zeta}_0}\right) \bar{\zeta}_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi(\zeta) &= N \ln(\zeta - \zeta_0) + \frac{a_0 M}{\zeta - \zeta_0} - \\ &\quad \bar{M} \ln\left(\zeta - \frac{R^2}{\bar{\zeta}_0}\right) + \bar{M} \ln \zeta \end{aligned} \right\}$$

于是整个弹性场完全确定。直接由式 (8) 代入式 (2) 可求得  $z$  平面应力，位移场。

## 2 裂纹解答

在式 (8) 的第 1 式中令  $b \rightarrow 0$ ，则  $c \rightarrow a, R \rightarrow 1$ ，得图 3 所示，含  $2a$  长裂纹的弹性平面基本解。

$$\varphi'(\zeta) = \frac{M}{\zeta - \zeta_0} - \frac{\bar{N}}{\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_0}} + \frac{\bar{N}}{\zeta} - \frac{\bar{a}_0 \bar{M}}{\bar{\zeta}_0^2} \frac{1}{\left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right)^2} \quad (9)$$

式中  $\bar{a}_0 = \frac{(1 + \bar{\zeta}_0^2)\zeta_0 \bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta}_0^2(\zeta_0^2 + 1)}{\zeta_0(\bar{\zeta}_0^2 - 1)}$

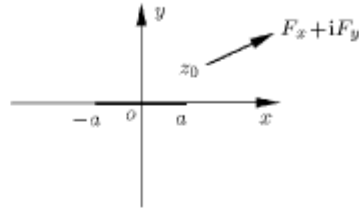


图 3

裂纹尖端  $a$  应力强度因子

$$K_1 - iK_2 = 2\sqrt{\frac{\pi}{a}} \varphi'(1) = 2\sqrt{\frac{\pi}{a}} \left[ \frac{M}{1 - \zeta_0} + \frac{\bar{N}}{1 - \bar{\zeta}_0} - \frac{\bar{a}_0 \bar{M}}{(\bar{\zeta}_0 - 1)^2} \right] \quad (10)$$

变换至  $z$  平面，注意到  $\zeta_0 = \frac{1}{a}(z_0 + \sqrt{z_0^2 - a^2})$ ，有

$$K_1 - iK_2 = \frac{F_x + iF_y}{2\sqrt{\pi a(1 + \kappa)}} \left[ \frac{z_0 + a}{\sqrt{z_0^2 - a^2}} - \frac{\kappa(z_0 + a)}{\sqrt{\bar{z}_0^2 - a^2}} - 1 + \kappa \right] + \frac{F_x - iF_y}{2\sqrt{\pi a(1 + \kappa)}} \frac{a(\bar{z}_0 - z_0)}{(\bar{z}_0 - a)\sqrt{\bar{z}_0^2 - a^2}} \quad (11)$$

该结果与文献 [1] 相同，但求解过程更为简捷。

## 参 考 文 献

- 1 Paris P, Sih G. Stress analysis of cracks. In: Fracture Toughness Testing and its Applications. Special Technical Publication No 381. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1965. 30
- 2 Мусхелишвили НИ. 数学弹性力学的基本问题. 北京: 科学出版社, 1966
- 3 森口繁一著. 平面弹性论. 刘亦琦译. 上海科学技术出版社, 1962

# 从 Stokes 第一问题的精确解谈起<sup>1)</sup>

朱克勤 李 征

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

**摘要** 以 Stokes 第一问题为例，阐述在 Navier-Stokes 方程精确解的教学过程中，如何引导学生从不同数学方法的角度展开积极思维。研究发现，除了在国内外流体力学教材中普遍使用的量纲分析法，还可以使用分离变量法、拉普拉斯变

换和运算微积分等多种方法求解 Stokes 第一问题。在此基础上，可不断提出新问题，鼓励学生探索创新，给出了几个例子。

**关键词** Navier-Stokes 方程，精确解，Stokes 第一问题

本文于 2003-06-15 收到。

1) 清华大学研究生精品课程项目资助。

## 1 引言

在流体力学的研究中,寻找 Navier-Stokes 方程(简称 N-S 方程)的精确解一直是一个困难但又令人感到兴趣的问题. N-S 方程是一个非线性的偏微分方程组,至今还没有找到通解.由于电子计算机技术的高速发展,使用数值方法已经可以解决很多实际问题.但由于精确解在稳定性分析、验证数值方法的精度、推动数学方法的研究等方面的重要作用,同时也可以对许多流动现象和规律作出更深入的解释,人们一直没有放弃寻找 N-S 方程精确解的努力.

1851 年 Stokes 在他的论文“关于流体内摩擦对摆锤运动的影响”中给出了无限大平板突然启动和作简谐振荡的两个精确解,被称为 Stokes 第一和第二问题.它们已成为黏性流体力学教科书中 N-S 方程精确解的经典例子.在过去的一百多年里人们只找到了 N-S 方程有限数目的精确解,根据粗略的统计,这个数目大约在 80 左右<sup>[1]</sup>.

在“黏性流体力学”课程的教学中,求基本方程组的精确解问题占有重要地位.学生在学完微积分、数学物理方程等高等数学课程后,通过求解流体力学方程的精确解,可以切身体会到数学在力学中的重要地位,这为充分发挥他们的积极思维开辟了天地.事实上,除 N-S 方程之外,在 Stokes 近似下得到的蠕流方程、在大雷诺数下得到的边界层方程等也涉及一系列求精确解的问题.在后续的“高等流体力学”课程的教学中,介绍 N-S 方程精确解研究的最新进展和提高学生求精确解的能力对于他们今后开展流动稳定性和非牛顿流等前沿课题的研究具有重要意义.多年来,在清华大学流体力学相关课程的教学实践中,在关于 N-S 方程精确解方面,我们注意引导学生用不同的数学方法求解同一物理问题,力求沟通不同问题精确解之间的联系,积极鼓励思维和创新.本文将从 Stokes 第一问题谈起,介绍这方面的一些体会和例子,希望能起到抛砖引玉的作用.

## 2 用多种方法求解同一问题的精确解

以 Stokes 第一问题为例,这是在静止流体中无限大平板的突然启动问题.一块水平放置的静止无限长平板,上半空间充满黏性不可压缩的静止流体.在  $t = 0$  瞬时,平板以常速度  $U_0$  沿自身平面内的  $x$  轴方向突然启动,此后保持等速运动,求流场的速度分布.

取直角坐标系,  $xOz$  平面与平板重合,  $y$  轴垂直于平板.根据对流场特性的分析,可知压力为常数,速度仅有  $x$  方向的分量,且与  $x, z$  无关,即  $u_x = u(y, t)$ ,  $u_y = u_z = 0$ , 相应的 N-S 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

初始条件为

$$u(y, 0) = 0 \quad (2)$$

边界条件为

$$u(0, t > 0) = U_0, \quad u(\infty, t > 0) = 0 \quad (3)$$

它作为 N-S 方程精确解的一个经典问题,在“黏性流体力学”教材中给出的求解方法都是通过量纲分析得到无量纲变量  $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ , 将以上偏微分方程的定解问题转化为常微分方程的定解问题,从而得到速度场<sup>[2]</sup>

$$u(y, t) = U_0[1 - \operatorname{erf}(\eta)] \quad (4)$$

其中误差函数

$$\operatorname{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha \exp(-\lambda^2) d\lambda \quad (5)$$

我们指导并鼓励学生探索用不同的方法求解 Stokes 第一问题,发现除了以上通常在教科书中出现的解法,该问题还可以用分离变量法、运算微积和拉氏变换 3 种方法来求解,由于这种探索可以充分发挥学生的数学分析和推演的能力,这就极大提高了学生的学习兴趣.

### 2.1 分离变量法求解 Stokes 第一问题

表面上看,解(4)中的变量  $y$  和  $t$  是不能分离变量的.但如果利用迭加原理,在找到原方程的一个特解后,将方程和边界条件转化为齐次的,就可以用分离变量法求解.最后利用变量代换得到解(4),详细的求解过程可参见文献[3].

若将量纲分析法和分离变量法的求解过程相比,前者将偏微分方程化简为一个常微分方程求解,较为简洁,但这需要在解题之前对问题的物理特性作深入和透彻的分析,将两个自变量组合成一个新的自变量.在对问题的物理特性尚不清楚的情况下,使用作为通用方法的分离变量法仍然不失为一种重要选择.

### 2.2 用拉普拉斯变换求解 Stokes 第一问题

由于  $t$  的变化范围是  $[0, \infty)$ ,  $u(y, t)$  关于  $t$  的 Laplace 变换为

$$U(y, s) = \int_0^\infty u(y, t) e^{-st} dt \quad (6)$$

方程(1)两边作 Laplace 变换得到

$$sU(y, s) = \nu \frac{d^2 U(y, s)}{dy^2} \quad (7)$$

解得

$$U(y, s) = C_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\nu}} y\right) + C_2 \exp\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} y\right) \quad (8)$$

由无穷远边界条件知  $C_2 = 0$ .对固壁边界条件(3)进行 Laplace 变换得到

$$U(0, s) = \int_0^\infty U_0 e^{-st} dt = \frac{U_0}{s} \quad (9)$$

所以  $C_1 = U_0/s$ , 式(8)成为

$$U(y, s) = \frac{U_0}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\nu}} y\right) \quad (10)$$

进行反变换得到

$$\begin{aligned} u(y, t) &= L^{-1} \left[ \frac{U_0}{s} \exp \left( -\sqrt{\frac{s}{\nu}} y \right) \right] = \\ &U_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty} \exp(-\eta^2) d\eta = \\ &\frac{2U_0}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_{\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}}^0 \exp(-\eta^2) d\eta \right] \quad (11) \end{aligned}$$

其中利用了积分公式  $\int_0^{\infty} \exp(-\eta^2) d\eta = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 它与其它方法得到的解 (4) 是完全一致的.

### 2.3 用运算微积分法求解 Stokes 第一问题

运算微积分引入 Heaviside 算子, 它的特点是纯粹的符号运算, 定义了一套分数阶导数的运算公式, 通常难以给出和分析中间步骤的物理意义. 但它处理问题的方法直接, 并且最后的结果具有明确的物理意义, 与经典方法的解完全一致, 给人以异曲同工的感受. 掌握该方法对于有潜力的优秀学生是很有挑战性和吸引力的. 详细的求解过程可参见文献 [4].

### 3 沟通不同精确解之间的联系

以平行平板间 Couette 流的起动过程为例. 考虑两块相距  $h$  的无限大平行平板, 最初充满运动黏性系数为  $\nu$  的静止流体, 然后在某一初始时刻, 下板突然以匀速  $U$  开始运动, 并带动流体运动, 上板一直保持静止, 在足够长时间后成为定常的 Couette 流.

本问题的基本方程和初始条件仍为式 (1), 式 (2), 边界条件为

$$u(0, t > 0) = U_0, \quad u(h, t > 0) = 0 \quad (12)$$

通常利用分离变量法 [2] 或运算微积分法 [5] 可以得到问题的精确解

$$\frac{u}{U_0} = \left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \nu t}{h^2}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{h}\right) \quad (13)$$

其中  $y$  是距运动平板的垂直距离.

基于以上精确解, 我们可以进一步思考一个有意义的问题: 如果令两平板间的距离  $h \rightarrow \infty$ , 本问题将从物理上逼近 Stokes 第一问题, 而精确解 (13) 是如何向 Stokes 第一问题的精确解 (4) 逼近的? 即两个精确解之间数学上的沟通问题. 在  $h \rightarrow \infty$  的情况下, 粗略地看, 精确解 (13) 的右边项会退化成为 1, 似乎无法向精确解 (4) 逼近. 实际并非如此, 精确解 (13) 的右边项是无限多个无穷小量之和, 为了求出它的值, 令

$$\xi = \frac{n\pi}{h} \quad (14)$$

将解 (13) 改写为

$$\frac{u}{U_0} = \left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp(-\xi^2 \nu t) \sin(\xi y) \frac{\pi}{h} \quad (15)$$

在  $h \rightarrow \infty$  的情况下, 对于任何确定的  $y$ ,  $y/h \rightarrow 0$ ; 在式 (15) 中,  $n$  的离散变化成为无限小的变化  $\pi/h$ , 即  $d\xi$ ; 求和  $n$  从 1 到  $\infty$  变成积分从 0 到  $\infty$

$$\frac{u}{U_0} = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp(-\xi^2 \nu t) \sin(\xi y) d\xi \quad (16)$$

不难证明, 上式右边的积分就是误差函数. 由此从数学上证明了, 在  $h \rightarrow \infty$  时, 精确解 (13) 的确逼近 Stokes 第一问题的精确解 (4).

### 4 因材施教, 鼓励创新

在 N-S 方程精确解的教学中, 对于优秀的学生, 应该强调因材施教, 鼓励他们参与探索未知精确解的工作. 对此, 学生需要较大时间的投入, 可采用期末专题报告的形式来进行, 优秀的专题报告可以取代期末考试. 几年来的教学实践表明, 这种做法不但可行, 而且取得了较好的效果. 应该注意的是, 由于学生的经验和文献阅读量不足, 教师应该在专题报告的立题和研究中给以具体的指导, 注意充分发挥学生在数学演绎和分析制图方面的优势.

我们在近几年的教学过程中, 就已经提出了 Maxwell 流体在一系列情况下求精确解的问题, 其中由本科生参与完成的较之文献 [6] 更复杂的两个精确解: Maxwell 流体在直圆管内的起动流的精确解 [7] 和 Maxwell 流体在直圆管内的振荡流的精确解 [8], 已经在有关学术刊物上发表. 这是在流体力学关于 N-S 方程精确解教学的过程中, 鼓励学生参与研究和创新工作的两个典型例子.

### 参 考 文 献

- 1 Wang CY. Exact solutions of the steady NS equations. *Annu Rev Fluid Mech*, 1991, 23: 159~177
- 2 王致清. 黏性流体动力学. 第三章第五节. 哈尔滨工业大学出版社, 1990
- 3 熊俊, 朱克勤. 用分离变量法求解 Stokes 第一问题. *力学与实践*, 2000, 22(5): 62~63
- 4 朱克勤, 彭杰. Stokes 第一问题的分数阶导数解. *力学与实践*, 2002, 24(2): 12~13
- 5 朱克勤, 王侃. 平行平板间 Couette 流起动过程的运算微积分. *力学与实践*, 2003, 25(6): 70~71
- 6 Fetcau C, Fetcau Corina. A new exact solution for the flow of a Maxwell fluid past an infinite plate. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, 38: 423~427
- 7 朱克勤, 路英杰, 沈平等. Maxwell 流体管内起动流的研究. *力学学报*, 2003, 35(2): 218~223
- 8 朱克勤, 范勇, 沈平等. Maxwell 流体管内振荡流的壁面摩擦研究. *石油学报*, 2003, 24(1): 89~91