

- ous flows. *Int J Numer Methods Fluids*, 1987, 7: 1053~1075
- 4 Chen K-H, Kececy FJ. Numerical and experimental study of three-dimensional liquid sloshing flows. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 1994, 8(3): 507~513
- 5 Chorin A.J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math Comput*, 1968, 22: 745~762
- 6 Hauashi M, Hatanaka K, Kawahara M. Lagrange finite element method for free surface Navier-Stokes flow using fractional step methods. *Int J Numer Methods Fluids*, 1991, 13: 805~840
- 7 Armenio V. On the analysis of sloshing of water in rectangular containers: numerical study and experimental validation. *Ocean Engng*, 1996, 23(8): 705~737
- 8 岳宝增. 三维液体大幅晃动与液弹耦合动力学研究. [博士学位论文]. 北京: 清华大学工程力学系, 1998 (Yue Baozeng. Numerical simulation of three-dimension large-scale amplitude liquid sloshing and study of hydroelastic coupling dynamics. [Ph.D. Thesis]. Beijing: Tsinghua University, 1998 (in Chinese))

LIQUID SLOSHING OF LARGE AMPLITUDE IN A CONTAINER UNDER

PITCHING EXCITATION

YUE Baozeng PENG Wu

(School of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing 10081, China)

Abstract Large-scale amplitude liquid sloshing in a rectangular open tank under a pitching excitation is studied in this paper. Firstly, the kinematics of the ALE (arbitrary Lagrange-Euler) description is introduced and the Navier-Stokes equations of fluid are revised in the ALE form. The numerical discreted equations of fractional step finite element method are developed by using Galerkin weighted residual method. The numerical simulation of large amplitude sloshing of the liquid in a rectangular tank is carried out. The computed water elevation history is obtained. Through comparing the numerical results with experiments, the efficiency of fractional step ALE finite element method is confirmed.

Key words pitching excitation, numerical simulation, finite element, large-amplitude liquid sloshing

应用分形有限元方法于外域声场计算

吴国荣 钟伟芳 吴永东 梁以德

(华中科技大学力学系, 武汉 430074) (香港城市大学建筑系, 香港)

摘要 应用二级分形有限元方法计算了外域声场. 用一人工边界把外域声场分为两部分, 人工边界以内使用常规有限元方法, 人工边界以外的无限大区域使用分形有限元方法. 使用分形有限元方法的优点是: 一方面形成几何自相似网格使得相邻层之间的单元刚度矩阵和质量矩阵具有非常简单的关系; 另一方面引用自动满足无限远辐射条件的全域插值函数把节点自由度变换为一组广义坐标, 因而计算量可以大大减少. 数值算例表明: 该方法对于计算无限大外域声场是有效的.

关键词 声, 辐射, 散射, 分形, 有限元

随着现代工业的发展, 有效地控制环境噪声、降低噪声污染对于改善居民的生活质量具有重要的意义. 近 20 年来, 各国科学家们对此进行了大量的研究, 提出了一系列的求解方法. 除了一些适用于边界几何形状比较简单的解析方法外, 有限元方法和边界元方法获得了广泛的应用^[1~7].

本文利用分形有限元与常规有限元相结合的方法, 计算了外域辐射和散射声场问题. 考虑一人工边界 S_1 将散射体或辐射边界以外的无限大区域划分为两部分 (如图 1 所示):

区域 R_1 由散射体 (或辐射空腔) 边界 S 与人工边界 S_1 所围成, 区域 R_2 为人工边界 S_1 以外的无限大域. 在区域 R_1 采用常规有限元离散, 在区域 R_2 采用分形有限元离散, 即引入一个分形因子 $\alpha > 1$, 把该区域剖分为无限多的相似单元, 选择可以自动满足无限远辐射条件的全域插值函数. 这样, 相邻层的几何相似单元 (网格) 的动刚度有着非常简单的关系, 当相似单元向外扩展时, 由于单元的相似性和全域插

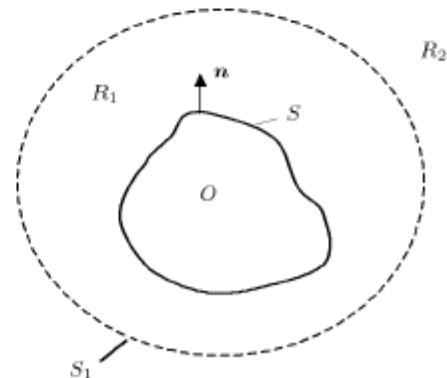


图 1 问题的几何表示

值函数的应用使得无限多自由度变换为有限的一组广义坐标系数, 其相应增加的计算工作量却很小, 因而可以在较短的计算机时与较低的内存消耗的条件下高效地给出问题的解答。

1 外域声辐射和散射问题的数学模型

考虑具有分段光滑内边界 S 的无限大区域 R (如图 1)。对于散射问题, 可把总声场分解为入射波场和散射波场两部分, 即

$$P = P^i + P^s \quad (1)$$

式中 P^i 表示入射声场, P^s 表示散射声场。散射声场 P^s 满足 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 P^s + k^2 P^s = 0 \quad \text{在 } R \text{ 内} \quad (2)$$

式中, $k = \omega/c$ 为波数, ω 为频率, c 为声速。

问题的边界条件可表示为

$$\nabla P^s \cdot \mathbf{n} = -\rho \bar{a}_n - \nabla P^i \cdot \mathbf{n} \quad (3)$$

这里 ρ 是流体的平均密度, $\bar{a}_n = \bar{a}_n(x, \omega)$ 为法向加速度 $a_n(x, t)$ 的幅值, ∇ 是梯度算子。无限远 Sommerfeld 辐射条件为

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(d-1)/2} (\partial P^s / \partial r - ik P^s) = 0 \quad (4)$$

这里 $d = 2$ 或 3 表示空间自由度 (维数), r 表示整体坐标系中坐标原点到区域 R 内一点的距离。

无限大外域声场散射问题, 归结为求解边值问题 (1)~(4)。而对于辐射问题, 只要令入射波 P^i 为零即可。

2 二级分形有限元方法

为了解答边值问题 (1)~(4), 我们引入一几何形状比较简单的人工边界 S_1 , 将域 R 划分为两部分: 区域 R_1 和区域 R_2 , 如图 1 所示。在区域 R_1 内, 用常规有限元方法; 在区域 R_2 内, 采用分形有限元方法; 为此, 引入一分形比例因子 $\alpha > 1$, 将区域 R_2 剖分成自相似单元 (计算中, 只需取有限分形层), 构造分形有限元方法的计算式。

2.1 区域 R_1 内的有限元离散方程

在区域 R_1 内, 按照常规有限元方法, 将区域分成有限个单元, 分别用 $\{P^s\}$ 和 $\{X\}$ 表示单元节点的散射声压和坐标值。对于常规等参单元, 其上任一点的声压 P^s 和坐标 \mathbf{x} , 通过等参变换可表示为

$$P^s = [N(\xi)] \{P^s\} \quad (5)$$

$$\mathbf{x} = [N(\xi)] \{X\} \quad (6)$$

式中 $N(\xi)$ 是形函数。根据相应的变分原理, 方程 (2) 可以转化成如下的矩阵方程

$$([K] - k^2[M]) \{P^s\} = \{F\} \quad (7)$$

式 (7) 称为动刚度方程式, 式中 $[K]$ 和 $[M]$ 分别是刚度矩阵和质量矩阵, $\{F\}$ 是力向量。

2.2 区域 R_2 内的分形有限元离散方程

2.2.1 动刚度矩阵方程的变换、全域插值函数

在域 R_2 上, 采用分形有限元方法。首先引入极坐标系下外域问题二维 Helmholtz 方程 (2) 的一般解^[8]

$$P^s(r, \theta) = \sum_m H_m^2(kr) (A_m \cos(m\theta) + B_m \sin(m\theta)), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

式中 H_m^2 表示第二类第 m 阶汉克尔函数。

利用式 (8), 将节点散射声压 $\{P^s\}$ 变换为用广义坐标 $\{a\}$ 来表示

$$\{P^s\} = [T] \{a\} \quad (9)$$

其中 $[T]$ 为变换矩阵, 由方程 (8) 得出。把式 (9) 代入推导有限元的变分式中, 得

$$[T]^T ([K] - k^2[M]) [T] \{a\} = [T]^T \{F\} \quad (10)$$

这里上标 'T' 表示矩阵转置。式 (10) 和式 (7) 相比, 由于广义坐标 $\{a\}$ 的分量的数目远比 $\{P^s\}$ 的少, 因此求解方程 (10) 比方程 (7) 快得多。

2.2.2 质量矩阵与刚度矩阵的分形变换

现在, 在区域 R_2 采用分形几何概念, 引入分形比例因子 $\alpha > 1$, 形成自相似网格。可以证明, 两相邻层对应的相似单元的坐标具有如下简单的关系^[9]

$$\left. \begin{aligned} X_i^{(m+1)} &= \alpha X_i^{(m)} \\ Y_i^{(m+1)} &= \alpha Y_i^{(m)} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式 (11) 中上标表示单元所在的分形层数。

局部坐标 (ξ, η) 下刚度矩阵和质量矩阵的计算公式如下

$$k_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[[J]^{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{array} \right\} \right]^T \cdot \left[[J]^{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \partial N_j / \partial \xi \\ \partial N_j / \partial \eta \end{array} \right\} \right] \cdot \det([J]) d\xi d\eta \quad (12)$$

$$m_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i N_j \det([J]) d\xi d\eta \quad (13)$$

式中

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (14)$$

于是由方程 (6), (11) 和 (14) 可以得到

$$[J]^{(m+1)} = \alpha [J]^{(m)} \quad (15)$$

将方程 (15) 代入式 (12) 和 (13), 可以分别得到两相邻层间的刚度矩阵和质量矩阵的简单关系

$$[K]^{(m+1)} = [K]^{(m)}, \quad [M]^{(m+1)} = \alpha^2 [M]^{(m)} \quad (16)$$

将人工边界 S_1 上的节点定义为主节点, 分形层中其他节点定义为从节点, 分别记为 $\{P_m\}$ 和 $\{P_s\}$. 根据前面分形变换的结果, 只需对从节点的声压进行变换. 为此, 根据主从节点, 对第一层的刚度矩阵 $[K^f]$ 和质量矩阵 $[M^f]$ 进行分块如下

$$([K^f] - k^2[M^f])\{P\}^f = \begin{pmatrix} K_{11}^f & K_{12}^f \\ K_{21}^f & K_{22}^f \end{pmatrix} - k^2 \begin{pmatrix} M_{11}^f & M_{12}^f \\ M_{21}^f & M_{22}^f \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_m\}^f \\ \{P_s\}^f \end{Bmatrix} \quad (17)$$

上标 'f' 表示第一层, 相应的变换矩阵为 $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T^f \end{bmatrix}$. 经过变换后, 有

$$\begin{pmatrix} K_{11}^f & K_{12}^f T^f \\ T^{fT} K_{21}^f & T^{fT} K_{22}^f T^f \end{pmatrix} - k^2 \begin{pmatrix} M_{11}^f & M_{12}^f T^f \\ T^{fT} M_{21}^f & T^{fT} M_{22}^f T^f \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_m\}^f \\ \{a\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (18)$$

对于内层 n , 变换矩阵可以表示为如下形式

$$[T]^T [K^f - k^2 \cdot \alpha^{2(n-1)} M^f] [T] \quad (19)$$

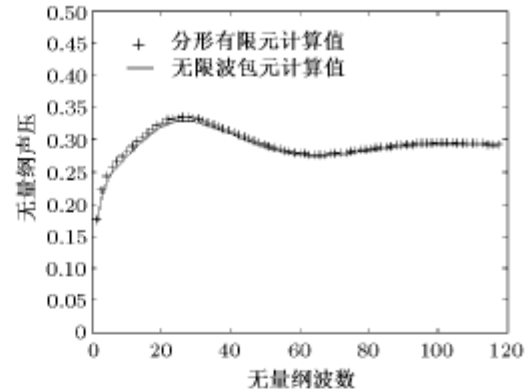
由方程 (18) 和 (19) 经过逐层累加可以得到区域 R_2 的整体刚度矩阵和质量矩阵, 然后和常规有限元一起装配形成总的动刚度矩阵.

3 算例和结论

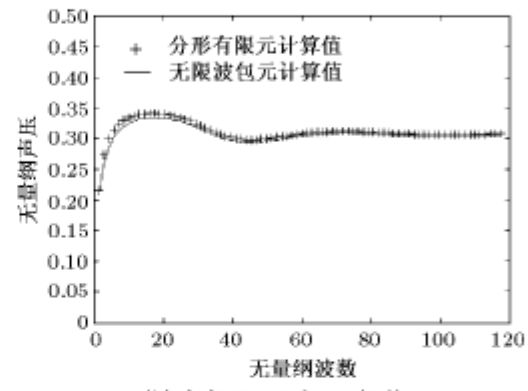
算例就外域声场的辐射和散射问题进行了数值计算. 椭圆辐射空腔及刚性散射体椭圆截面的长短轴比为 $l_b/l_a = 1.5$, 人工边界的半径为椭圆长半轴长度的 2.5 倍, 介质声速为 1400 m/s, 分形比 α 取值 1.15, 式 (8) 的截断项数为 $m = 60$, 分形层数取值为 31. 人工边界内单元数为 7×17 , 人工边界外单元数为 31×17 .

在空腔辐射的数值计算中, 假设辐射边界 S 上受幅值为一余弦分布的声压 $\bar{P} \cos(\theta)$ 作用, 计算频率范围为 35 Hz 至 2835 Hz. 图 2 表示的是椭圆辐射空腔的辐射声压值. 图中纵坐标为无量纲声压 $|P/\bar{P}|$, 横坐标为无量纲波数 k .

在散射问题数值运算中, 假设散射体为刚性散射物, 入射波为一沿 x 轴正方向传播的平面波: $P^i = P_0 \exp(-ikx)$. 散射算例计算了一无限长刚性椭圆柱体对入射平面波的散射, 并和无限波包元计算的结果进行了比较. 图 3(a)~图 3(d) 给出的是频率分别为 155 Hz, 1555 Hz, 3555 Hz, 4555 Hz 在 $R = 11.2a$ (a 为椭圆的短半轴的长度) 散射声压的极坐标图.

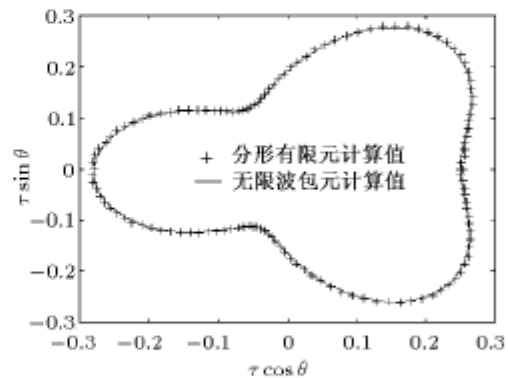


(a) 在点 $R = 9, \theta = \pi/4$ 处

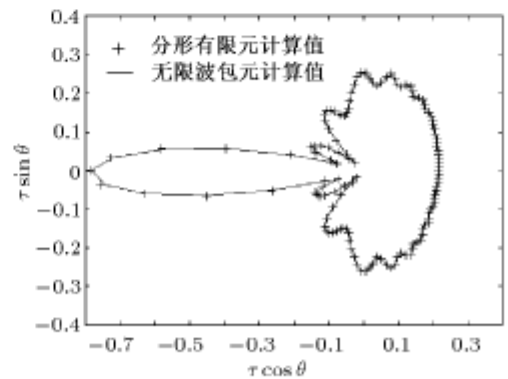


(b) 在点 $R = 9, \theta = \pi/6$ 处

图 2 长短轴比为 $l_b/l_a = 1.5$ 的椭圆辐射空腔无量纲辐射声压值



(a) $\omega = 155$ Hz



(b) $\omega = 1555$ Hz

图 3 无限长刚性椭圆柱体对平面入射波在 $R = 11.2a$ 处的无量纲散射声压值

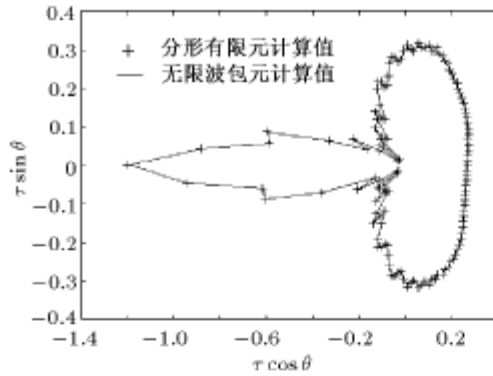
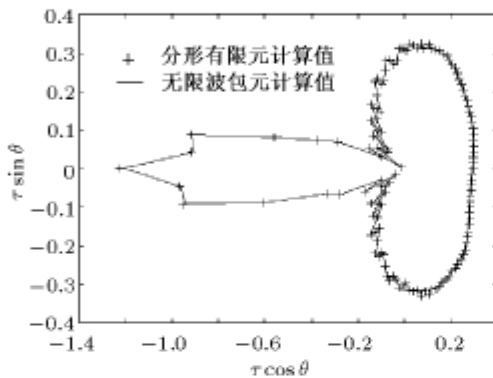
(c) $\omega = 3555 \text{ Hz}$ (d) $\omega = 4555 \text{ Hz}$

图 3 无限长刚性椭圆柱体对平面入射波在 $R = 11.2a$ 处的无量纲散射声压值 (续)

数值计算结果表明: 对于无限外域声场的辐射和散射问题, 二级分形有限元方法可以较快地给出足够精确的解答。该方法具有两个明显的优点: 一是全局插值函数的使用, 使得未知量大大减少; 另一是应用分形几何概念形成自相似网格, 从而可以简便地形成总动刚度矩阵。

参 考 文 献

- 1 Assaad J, Decarpigny JN, Bruneel C. Application of the finite element method to two-dimensional radiation problem. *Journal of Acoustic Society of America*, 1993, 94: 562~573
- 2 Kallivokas LF, Bielak J. Time-domain analysis of transient structural acoustics problems based on the finite element method and a novel absorbing boundary element. *Journal of Acoustic Society of America*, 1993, 94: 3480~3492
- 3 Astly R.J. Wave envelope and infinite elements for acoustic radiation. *Int Numer Methods Fluids*, 1983, 3: 507~526
- 4 Astly R.J, Eversman W. Wave envelope elements for acoustic radiation in inhomogeneous media. *Computers and*

Structures, 1988, 3: 801~810

- 5 Astly R.J, Macaulay G.J, Coyette J.P. Mapped wave envelope elements for acoustic radiation and scattering. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 170: 97~118
- 6 Seybert AF, Cheng CYR, Wu TW. The solution of coupled interior/exterior acoustic problems using the boundary element method. *Journal of Acoustic Society of America*, 1990, 88: 1612~1618
- 7 Gennaretti M, Giordani A, Morino L. A third-order boundary element method for exterior acoustics with applications to scattering by rigid and elastic shells. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 222: 699~722
- 8 Skudrzyk E. The foundations of acoustics. Wien-New York: Springer-Verlag, 1971
- 9 Leung A.Y.T, Su R.K.L. Mixed mode 2D crack problem by fractal two level finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 1995, 51: 889~895

FRACTAL FINITE ELEMENT METHOD FOR EXTERIOR SOUND RADIATION AND SCATTERING

WU Guorong ZHONG Weifang WU Yongdong
(Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

LEUNG A.Y.T.

(Department of Civil Building & Construction, City University of Hong Kong, Hong Kong, China)

Abstract The fractal finite element method is extended to solve exterior acoustic problems. An artificial boundary is introduced to divide the exterior domain into two parts. The conventional finite element method is adopted within the artificial boundary, and the fractal finite element method is employed in the outer region beyond the artificial boundary. Because of the facts that the relationships of element matrices between the adjacent fractal layers are very simple and the node degrees of freedom are transformed into a set of general coordinates by using the global interpolation functions, which satisfy automatically Sommerfeld's radiation conditions, the computer time can be reduced greatly by the fractal finite element method. The numerical results show that this method is effective in solving exterior acoustic problems.

Key words sound, radiation, scattering, fractal, FEM