力学纵横

新千年数学大奖问题
—— 证明纳维 - 斯托克斯方程组光滑解的存在性

王振东 姜 楠

(天津大学力学系，天津 300072)

摘要 介绍克莱数学促进会悬赏的新千年百万美元数学大奖问题 —— 证明纳维 - 斯托克斯方程组光滑解的存在性.

关键词 纳维 - 斯托克斯方程，流体力学，新千年数学大奖

2000 年 5 月 24 日克莱数学促进会 (Clay Mathematics Institute, 简称 CMI) 专门在巴黎法兰西学院举行会议，公布了 7 个新千年数学大奖问题. 将 7 个在 20 世纪长期没有得到解决、在数学中极其重要的问题，作为新千年悬赏的数学问题，设置了数学大奖，每个问题的奖金都是百万美元. 在这 7 个悬赏问题中，有 2 个问题与力学和物理有关：一个是证明量子 Yang-Mille 场存在, 并存在一个质量间隙；另一个就是 (在适当的边界及初始条件下) 对 3 维纳维 - 斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程组证明或反证其光滑解的存在性.

1 克莱数学促进会及其设置的数学大奖

克莱数学促进会 (CMI) 是一个旨在增进并传播数学知识的私人的、非赢利的基金会，是美国波士顿的实业家 Landon T. Clay 在 1998 年创立的，以哈佛大学的 Arthur Jaffe 为董事长. 成立 CMI 的主要目的是试图进一步发扬数学思想的优美、力量和统一性. 为此 CMI 实行了一系列的课题：创造新的数学知识 (为推进数学前沿研究，长斯资助研究员)；传播对数学的深刻理解 (组织研讨会、学术会议和暑期学校)；鼓励优秀学生从事数学事业；识别数学研究中的非凡的成就 (每年为一位或几位数学家的研究成就提供 CMI 数学奖)；奖励特定的数学问题的解决 (如这次设置新千年数学大奖). 尽管 CMI 的基地设在美国马萨诸塞州的剑桥 (Cambridge), 但却选择了巴黎作为发布数学大奖悬赏问题的地点，目的是为了纪念希尔伯特 (David Hilbert)1900 年 8 月 8 日在巴黎举行的第二届国际数学家代表大会上发表了著名的有关尚未解决的数学问题的演讲 100 周年. 在那次著名的演讲中，希尔伯特提出了在数学史上产生重大影响的 23 个数学问题. 我国力学界广大读者所耳熟的哥德巴赫 (Goldbach) 猜想问题，正是希尔伯特提出的 23 个问题之一.

可是新千年数学大奖悬赏问题与希尔伯特的问题又有着重大的差别. 正如 CMI 科学顾问委员会成员、普林斯顿大学的 Andrew Wiles 所指出的：“希尔伯特试图以他的问题去指导数学，我们是试图去记载重大的未解决的问题”.

奖励的规则明确指出，这些 20 世纪未解决的重大数学问题解答的稿件不能直接寄给 CMI. 一个问题的解答必须发表在需要审稿的、具有国际声誉的杂志上，在发表后两年时间得到数学界的普遍接受，才能符合评奖的条件. 在这段等待时间之后， CMI 科学顾问委员会将决定是否将该项解答列入新千年奖数学问题的提名解. 如果有数学家对于悬赏问题发现反例的情形，将在同样的发表两年等待期后，有可能将已发表的该反例考虑作为提名解.

2 纳维 - 斯托克斯方程组光滑解的存在性问题

CMI 在巴黎发布会上曾邀请专家对每个新千年数学悬赏问题作了陈述，现将 C. L. Fefferman 关于纳维 - 斯托克斯方程组解的存在性与光滑性问题的陈述主要内容摘录如下.

Navier-Stokes 方程描述了 $R^n(n=2$ 或 $3)$ 中流体的运动. 这些方程要对关于位置 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 和时间 $t\geq 0$ 定义的未知速度向量 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=(u_i(\boldsymbol{x},t))_{1\leq i\leq n}\in R^n$ 以及压力 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},t)\in \boldsymbol{R}^n$ 求解. 这里我们只限于考虑充满全空间 R^n 不可压流体. 于是 Navier-Stokes 方程由

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}u_i+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}=\nu\Delta u_i-\dfrac{\partial p}{\partial x_i}+f_i(\boldsymbol{x},t)\\ (\boldsymbol{x}\in R^n,t\geq 0)\end{array}\right\}\qquad(1)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0,\quad(\boldsymbol{x}\in R^n,t\geq 0)\qquad(2)$$

和初始条件

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}),\quad(\boldsymbol{x}\in R^n)\qquad(3)$$

给出，这里 $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})$ 是给定的 R^n 上的 C^∞ 非散度向量场，$f_i(\boldsymbol{x},t)$ 是给定的外力 (例如万有引力) 的分量，ν 是一个正系数 (黏性), 而 $\Delta=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 是关于空间变量的拉普拉斯 (Laplace) 算子.

方程 (1) 只是在外力 $f=(f_i(\boldsymbol{x},t))_{1\leq i\leq n}$ 以及由压力和摩擦产生的力的作用下流体元的牛顿定律 $f=ma$. 方程 (2) 只是说明流体是不可压的. 对于物理上合理的解，我们要确保当 $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ 时， $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 不会增长得很大. 因此，我们只考虑外力 f 和初始条件 $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})$ 满足条件

$$|\partial_x^\alpha \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})|\leq C_{\alpha K}(1+|\boldsymbol{x}|)^{-K},\ R^3\ 上，任意\ \alpha\ 和\ K\qquad(4)$$

和

$$\left.\begin{array}{l}|\partial_x^\alpha\partial_t^m f(\boldsymbol{x},t)|\leq C_{\alpha mK}(1+|\boldsymbol{x}|+t)^{-K}\\ R^3\times[0,\infty)\ 上,任意\ \alpha,m\ 和\ K\end{array}\right\}\qquad(5)$$

本文于 2003-03-31 收到.

我们认为式 (1)～ 式 (3) 的一个解是物理上合理的，仅当它满足

$$p, u \in C^{\infty}, \qquad (R^n \times [0,\infty)) \tag{6}$$

和

$$\int_{R^n} |u(x,t)|^2 dx < C, \text{ 对所有的 } t \geq 0 \text{ (有界的能量)} \tag{7}$$

或者，为排除在无穷远处的情形，我们可以寻求式 (1)～ 式 (3) 的空间周期解. 因此，我们假定 $u^0(x), f(x,t)$ 满足

$$\left.\begin{array}{l} u^0(x+e_j) = u^0(x) \\ f(x+e_j,t) = f(x,t) \end{array} \quad, 1 \leq j \leq n \right\} \tag{8}$$

(e_j 是 R^n 中第 j 个单位向量).

代替式 (4) 和式 (5), 我们假定 $u^0(x)$ 光滑，以及

$$\left.\begin{array}{l} |\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \leq C_{\alpha m K}(1+|t|)^{-K} \\ R^3 \times [0,\infty) \text{ 上，任意 } \alpha, m \text{ 和 } K \end{array}\right\} \tag{9}$$

于是，我们认为式 (1)～ 式 (3) 的一个解是物理上合理的，如果它满足

$$u(x,t) = u(x+e_j,t), \quad R^3 \times [0,\infty) \text{ 上}, 1 \leq j \leq n \tag{10}$$

和

$$p, u \in C^{\infty}, \qquad R^n \times [0,\infty) \tag{11}$$

我们要研究的一个基本问题是判定 Navier-Stokes 方程是否存在这种光滑的、物理上合理的解. 为给求解者合理的余地同时又保持问题的核心，我们特征求以下 4 个命题之一的证明.

(A) R^3 上 Navier-Stokes 方程解的存在性和光滑性. 取 $\nu > 0, n = 3$. 令 $u^0(x)$ 是任何满足 (4) 的光滑的、非散度型的向量场；$f(x,t)$ 恒等于零，则存在满足 (1)～(3),(6),(7) 的 $R^3 \times [0,\infty)$ 上的光滑函数 $p(x,t), u_i(x,t)$.

(B) R^3/Z^3 上 Navier-Stokes 方程解的存在性和光滑性. 取 $\nu > 0, n = 3$. 令 $u^0(x)$ 是任何满足 (8) 的光滑的、非散度型的向量场；$f(x,t)$ 恒等于零. 则存在满足 (1)～(3),(10),(11) 的 $R^3 \times [0,\infty)$ 上的光滑函数 $p(x,t), u_i(x,t)$.

(C) R^3 上 Navier-Stokes 方程解的破裂. 取 $\nu > 0, n = 3$. 则存在满足 (4),(5) 的 R^3 上光滑的、非散度型的向量场 $u^0(x)$ 以及在 $R^3 \times [0,\infty)$ 上的光滑函数 $f(x,t)$, 使得在 $R^3 \times [0,\infty)$ 上 (1)～(3),(6),(7) 不存在解 (p, u).

(D) R^3/Z^3 上 Navier-Stokes 方程解的破裂. 取 $\nu > 0, n = 3$. 则存在满足 (8),(9) 的 R^3 上光滑的、非散度型的向量场 $u^0(x)$ 以及在 $R^3 \times [0,\infty)$ 上的光滑函数 $f(x,t)$, 使得在 $R^3 \times [0,\infty)$ 上 (1)～(3),(10),(11) 不存在解 (p, u).

3 几点看法

纳维 - 斯托克斯方程是法国力学家、工程师纳维 (Claude-Louis-Marie-Henri Navier 1785～1836) 于 1821 年和英国力学家、数学家斯托克斯 (George Gabriel Stokes 1819～1903) 于 1845 年分别建立的，普遍认为这个方程组刻划了黏性不可压缩流体的运动规律. 现在人们对于自然界、国防和各种工程技术中的流体力学问题，都在用它进行计算、分析和研究.

鉴于纳维 - 斯托克斯方程解的存在性问题至今尚未解决 (在一些简化的特殊情况下，已知有不多的准确解存在)，笔者认为当使用纳维 - 斯托克斯方程时似应注意：

3.1 对于流体力学问题，数值计算 (现亦称数值实验) 与物理实验的本质差别并未消失. 对纳维 - 斯托克斯方程进行大规模数值计算是必需的，但也需要巧妙设计物理实验以检验计算分析的正确性.

3.2 由于对同一微分方程，边界条件提得合适否有可能影响问题的解存在与否，似应关心数学界对纳维 - 斯托克斯方程研究的进展，并使我们在进行计算、分析问题时将边界条件提得在物理上和数学上都合理.

3.3 瑞士数学家、力学家欧拉 (Leonhard Euler 1707～1783) 于 1752 年给出连续性方程，1755 年建立了理想流体动力学方程. 对于理想流体的欧拉方程，尽管比纳维 - 斯托克斯方程简单得多，但因解的存在性也并未解决，在进行数值计算分析时似也应注意以上问题.

Fefferman 还指出，对于 $\nu = 0$ 时的 Euler 方程，以上问题也尚未解决，但 Euler 方程不属于 CMI 奖励的问题.

4 附录：新千年悬赏的数学问题

"Notices"(美国数学会 (AMS) 的会刊) 为悬赏问题准备了如下的简介：

P 与 NP 问题：一个问题称为是 P 的，如果它可以通过运行多项式次 (即运行时间至多是输入量大小的多项式函数) 的一种算法获得解决. 一个问题称为是 NP 的，如果所提出的解答可以用多项式次算法来检验. P 等于 NP 吗？

Riemann 假设：黎曼 ζ 函数的每个非平凡零点有等于 1/2 的实部.

Poincaré 猜想：任何单连通闭 3 维流形同胚于 3 维球.

Hodge 猜想：任何 Hodge 类关于一个非奇异复射影代数簇都是某些代数闭链类的有理线性组合.

Birch 及 Swinnerton-Dyer 猜想：对于建立在有理数域上的每一条椭圆曲线，它在 1 处的 L 函数变为零的阶等于该曲线上有理点的阿贝尔群的秩.

Navier-Stokes 方程组：(在适当的边界及初始条件下) 对 3 维 Navier-Stokes 方程组证明或反证其光滑解的存在性.

Yang-Mills 理论：证明量子 Yang-Mills 场存在并存在一个质量间隙.

(下转第 58 页)