双面理想完整约束系统的机械能守恒律[1)]

李广成[†,*] 梅凤翔[†]

[†](北京理工大学应用力学系，北京 100081) [*](商丘师范学院物理系，河南商丘 476000)

摘要 研究双面理想完整约束系统在约束不是定常且主动力不是有势时的机械能守恒律. 建立系统的能量变化方程，给出存在机械能守恒律的充分必要条件. 分析有机械能守恒律的 12 种情况. 最后给出说明性算例.

关键词 双面理想约束，完整约束，能量变化方程，机械能守恒律

机械能守恒律是一条重要的物理定律，通常表述为：如果系统约束是定常的，且主动力是有势的，则动能与势能之和为常量[1~7]. 这只是力学系统存在机械能守恒律的一个充分条件. 如果约束不是定常的，主动力不是有势的，那么系统是否可能存在机械能守恒律？本文给出具有双面完整约束系统存在机械能守恒律的充分必要条件.

1 双面理想完整约束系统的能量方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定. 所受约束是双面理想完整的，运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s \quad (s=1,\cdots,n) \tag{1}$$

其中 $L=T-V$ 为系统 Lagrange 函数， T 为动能， V 为势能， Q_s 为非势广义力. 将方程 (1) 两端乘以 $\dot{q}_s$ 并对 s 求和，整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L\right)+\frac{\partial L}{\partial t}=Q_s\dot{q}_s \tag{2}$$

相同的指标表示求和，方程可表示为

$$(T_2-T_0-V)'+\frac{\partial L}{\partial t}=Q_s\dot{q}_s \tag{3}$$

其中 T_2 为动能对广义速度的二次型， T_0 为动能中不含速度的项. 方程 (2) 或 (3) 为能量变化方程.

2 机械能守恒律存在的充要条件

首先，假设系统 (1) 存在机械能守恒律

$$T+V=\text{const.} \tag{4}$$

于是有

$$\dot{T}+\dot{V}=0$$

或

$$\dot{T}_2+\dot{T}_1+\dot{T}_0+\dot{V}=0 \tag{5}$$

式 (3), 式 (5) 相减得

$$-2\dot{T}_0-\dot{T}_1+\frac{\partial L}{\partial t}=Q_s\dot{q}_s \tag{6}$$

本文于 2002–06–17 收到.

1) 国家自然科学基金项目 (19972010) 资助.

其次，假设式 (5) 成立. 将式 (3), 式 (6) 相减，便得式 (4), 因此存在机械能守恒律式 (4). 这就证明了具有双面完整约束系统存在机械能守恒律的充分必要条件是式 (6).

3 机械能守恒律的全面分析

机械能守恒律存在的充分必要条件式 (6) 中有 4 个量，即： $\dot{T}_0,\dot{T}_1,\dfrac{\partial L}{\partial t},Q_s\dot{q}_s$. 4 个量中全部为零的有 $C_4^0=1$ 种； 1 个不为零的有 $C_4^1=4$ 种，但这是不可能的； 2 个不为零的有 $C_4^2=6$ 种； 3 个不为零的有 $C_4^3=4$ 种； 4 个不为零的有 $C_4^4=1$ 种. 总计可能的情况有 $C_4^0+C_4^2+C_4^3+C_4^4=12$ 种. 下面分列出 12 种情形.

3.1 情形 1

$$\dot{T}_1=\dot{T}_0=\frac{\partial L}{\partial t}=Q_s\dot{q}_s=0 \tag{7}$$

如果 $Q_s=0$, 就是通常的情形. 如果 $Q_s\neq 0$, 但 $Q_s\dot{q}_s=0$, 这是有广义陀螺力的情形. 广义陀螺力不影响机械能守恒律.

3.2 情形 2

$$\dot{T}_1=\dot{T}_0=0,\quad \frac{\partial L}{\partial t}\neq 0,\quad Q_s\dot{q}_s\neq 0 \tag{8}$$

此时式 (6) 给出

$$\frac{\partial L}{\partial t}=Q_s\dot{q}_s \tag{9}$$

3.3 情形 3

$$\dot{T}_0=\frac{\partial L}{\partial t}=0,\quad \dot{T}_1\neq 0,\quad Q_s\dot{q}_s\neq 0 \tag{10}$$

此时式 (6) 给出

$$-\dot{T}_1=Q_s\dot{q}_s \tag{11}$$

3.4 情形 4

$$\dot{T}_0=0,\quad Q_s\dot{q}_s=0,\quad \dot{T}_1\neq 0,\quad \frac{\partial L}{\partial t}\neq 0 \tag{12}$$

此时式 (6) 给出

$$-\dot{T}_1+\frac{\partial L}{\partial t}=0 \tag{13}$$

3.5 情形 5

$$\dot{T}_1=\frac{\partial L}{\partial t}=0,\quad \dot{T}_0\neq 0,\quad Q_s\dot{q}_s\neq 0 \tag{14}$$

此时式 (6) 给出

$$-2\dot{T}_0=Q_s\dot{q}_s \tag{15}$$

3.6 情形 6

$$\dot{T}_1 = Q_s\dot{q}_s = 0\,,\quad \dot{T}_0 \neq 0\,,\quad \frac{\partial L}{\partial t} \neq 0 \tag{16}$$

此时式 (6) 给出

$$-2\dot{T}_0 + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{17}$$

3.7 情形 7

$$\frac{\partial L}{\partial t} = Q_s\dot{q}_s = 0\,,\quad \dot{T}_0 \neq 0\,,\quad \dot{T}_1 \neq 0 \tag{18}$$

此时式 (6) 给出

$$-2\dot{T}_0 - \dot{T}_1 = 0 \tag{19}$$

3.8 情形 8

$$\dot{T}_0 = 0\,,\quad \dot{T}_1 \neq 0\,,\quad \frac{\partial L}{\partial t} \neq 0\,,\quad Q_s\dot{q}_s \neq 0 \tag{20}$$

此时式 (6) 给出

$$-\dot{T}_1 + \frac{\partial L}{\partial t} = Q_s\dot{q}_s \tag{21}$$

3.9 情形 9

$$\dot{T}_1 = 0\,,\quad \dot{T}_0 \neq 0\,,\quad \frac{\partial L}{\partial t} \neq 0\,,\quad Q_s\dot{q}_s \neq 0 \tag{22}$$

此时式 (6) 给出

$$-2\dot{T}_0 + \frac{\partial L}{\partial t} = Q_s\dot{q}_s \tag{23}$$

3.10 情形 10

$$Q_s\dot{q}_s = 0\,,\quad \dot{T}_1 \neq 0\,,\quad \dot{T}_0 \neq 0\,,\quad \frac{\partial L}{\partial t} \neq 0 \tag{24}$$

此时式 (6) 给出

$$-2\dot{T}_0 - \dot{T}_1 + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{25}$$

3.11 情形 11

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0\,,\quad \dot{T}_0 \neq 0\,,\quad \dot{T}_1 \neq 0\,,\quad Q_s\dot{q}_s \neq 0 \tag{26}$$

此时式 (6) 给出

$$-2\dot{T}_0 - \dot{T}_1 = Q_s\dot{q}_s \tag{27}$$

3.12 情形 12

$$\dot{T}_0 \neq 0\,,\quad \dot{T}_1 \neq 0\,,\quad \frac{\partial L}{\partial t} \neq 0\,,\quad Q_s\dot{q}_s \neq 0 \tag{28}$$

此时式 (6) 给出

$$-2\dot{T}_0 - \dot{T}_1 + \frac{\partial L}{\partial t} = Q_s\dot{q}_s \tag{29}$$

4 算　例

例 1　单自由度系统

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + at\dot{q} + \frac{1}{2}a^2t^2$$

$$V = V(q)\,,\quad Q = \frac{at}{\dot{q}+at}\frac{\partial V}{\partial q}$$

由于属于情形 12, 有机械能守恒

$$T + V = h$$

例 2　二自由度系统

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + a\dot{q}_1 + b\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

$$V = \frac{1}{2}c(q_1 + at)^2\,,\quad Q_1 = Q_2 = 0$$

由于属于情形 4, 有机械能守恒

$$T + V = h$$

例 3　单自由度系统

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + a\dot{q}\,,\quad V = \frac{1}{2}bq^2\,,\quad Q = \frac{abq}{\dot{q}+a}$$

由于属于情形 3, 有机械能守恒

$$T + V = h$$

例 4　二自由度系统

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + a(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1) + \frac{1}{2}a^2(q_1^2 + q_2^2)$$

$$V = \mathrm{const.}\,,\quad Q_1 = Q_2 = 0$$

由于属于情形 7, 有机械能守恒

$$T + V = h$$

5 结　论

本文给出双面理想完整约束系统存在机械能守恒律的 12 种情形. 情形 1 是通常的结果, 其余 11 种情形都是在 $T \neq T_2$ 或 $Q_s \neq 0$ 或 $\dfrac{\partial L}{\partial t} \neq 0$ 下得到的.

参 考 文 献

1 Appell P. Traité de mécanique rationnelle. Tome II, Sixieme edition. Paris: Gauthier-Villars, 1953

2 Whittaker ET. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Forth Edition. Cambridge: Cambridge Univ-Press, 1952

3 Hamel G. Theoretische Mechanik. Berlin: Springer-Verlag, 1949

4 汪家禾. 分析动力学. 北京：高等教育出版社， 1958

5 Луръе АИ. Аналитическая механика. Москва: ТИФМЛ, 1961

6 陈滨. 分析动力学. 北京：北京大学出版社， 1987

7 梅凤翔, 刘桂林. 分析力学基础. 西安：西安交通大学出版社, 1987