

骰子中灌铅对掷骰子结果的影响

施卫平

耿爱芳

(吉林大学数学科学院力学教研室, 长春 130012) (长春理工大学, 长春 130022)

摘要 骰子是一种常用的赌博工具, 骰子灌铅后, 重心可能偏离其几何中心. 将骰子视为刚体, 将掷骰子过程看作刚体自由下落然后与桌面碰撞的刚体动力学过程. 本文计算出重心偏离的骰子下落后, 各个面向下的概率.

关键词 骰子, 刚体, 重心

骰子是一种常用的赌博工具, 它应当是正六面体, 且正六面体内的质量分布均匀, 这样才能保证它的重心在其几何中心位置. 赌徒和科学家们费尽心机的研究赌什么数赢的几率最大^[1~3]. 在骰子中灌铅是赌徒们常想到的欺诈行为. 骰子灌铅后, 重心会偏离其几何中心. 下面我们分析若骰子的重心偏离其几何中心, 在统计意义上对掷骰子结果的影响.

1 二维骰子

为了表述方便, 先分析“二维骰子”问题. 假定骰子是一个如图 1 所示的正方形 $ABCD$. 它在重力 g 的作用下沿 y 轴的负方向自由下落, 正方形被限定在 xoy 平面内运动, 桌面是水平的, 且与 x 轴重合. 假定正方形 $ABCD$ 是一个刚体, 则掷骰子过程可看作是二维平面刚体动力学问题. 当正方形刚体 $ABCD$ 作自由落体运动时, 转动角速度的方向是随机的, 它对掷骰子结果的影响在统计意义上可以忽略. 故假定刚体只有向下的平动, 而无转动.

如图 1 所示, 刚体落在桌面的瞬间, A 点与桌面接触.

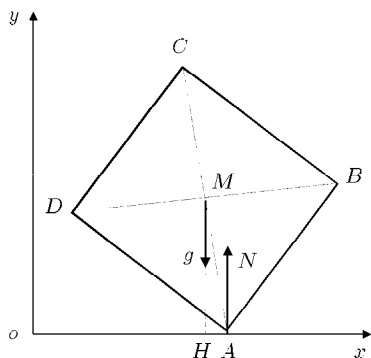


图 1 二维骰子落地时的受力分析

假设 1: 桌面是光滑的, 刚体受到一个作用在 A 点, 且垂直向上的作用力 N . 若重力 g 和作用力 N 不在同一直线上, 则此二力将使刚体转动起来; 即刚体与桌面碰撞后, 在向上反弹的过程中, 刚体将发生转动. 设刚体重心 M 在桌面的投影为 H , 则转动的方向由 H 与 A 的相对位置决定.

假设 2: 反弹的高度很小, 刚体在反弹后很短的时间内又落下. 在反弹过程中刚体所转过的角度小于或等于 $\pi/4$.

因为若转过的角度大于 $\pi/4$, 有可能使重心 H 的投影由原来经过 AD 边, 转动后使重心 H 的投影经过 DC 边. 若刚体反弹的高度不是很小, 当刚体反弹后达到最高点时, 我们从这一刻重新开始分析刚体自由下落时的情况. 这时刚体转动的方向仍是随机的. 所以假设 2 是合理的.

由以上分析我们可以得出结论: 若刚体重心 M 的垂直投影线 MH 过 DA 边, 则刚体落地后 DA 边向下. 刚体下落时, 初始位置是随机的, 在固定于刚体 $ABCD$ 上的坐标系下看, 重力 g 的指向也是随机的; 重心的投影线 MH 经过 DA 边的概率是 $P_{DA} = \angle DMA / (2\pi)$, P_{DA} 就是 DA 边向下的概率.

2 正六面体骰子

对于正六面体的骰子, 它落在桌面的情况与“二维骰子”的情况相似. 如图 2 所示, 在固定于正六面体上的坐标系下

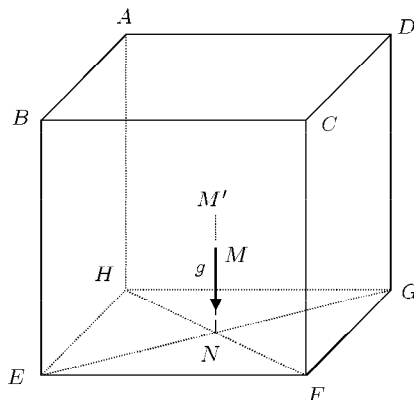


图 2 正六面体的骰子

看, 作用于重心 M 的重力 g 的指向在三维空间内是随机的. 设以重心 M 为中心, 经过 $EFGH$ 面的立体角为 Ω_{EFGD} , 则骰子落下后 $EFGH$ 面向下的概率 P_{EFGH} 为 Ω_{EFGH} 在全空间的立体角 4π 中所占的比例

$$P_{EFGH} = \Omega_{EFGH} / (4\pi) \tag{1}$$

若正六面体是均质的, 重心 M 在其几何中心上, 则正六面体各个面相对于重心 M 的立体角相等. 每个面向下的概率也相等, 都等于 $1/6$. 如果正六面体不是均质的, 例如在正六面体内灌铅, 它的重心可能偏离其几何中心. 如图 2 所示, 设点 N 是正方形 $EFGH$ 的中心, 点 M' 是正六面体的几何中心. 考虑一种特殊情况, 设重心 M 在直线 $M'N$ 上, MN 与正六面体的棱长之比为 h . 则正方形 $EFGH$ 相

本文于 2002-05-24 收到.

对于重心 M 的立体角

$$\Omega_{EFGH} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\arctg(\frac{1}{2h \cos \varphi})} \sin \theta d\theta =$$

$$8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ 1 - \cos \left[\arctg \left(\frac{1}{2h \cos \varphi} \right) \right] \right\} d\varphi \quad (2)$$

这是一个以 h 为参数的定积分, 我们采用数值积分方法计算出 Ω_{EFGH} 的值, 然后代入式 (1), 即得到 $EFGH$ 面向下的概率. 图 3 给出了 P_{EFGH} 随 h 变化的曲线, 其中的 $h \in [0, 1]$. 当 $h = 0.5$, 即重心在正六面体的几何中心上, 由数值积分得到的计算值 $P_{EFGH} = 0.16664$, 与精确值 $1/6$ 非常接近. 当 $h = 1/3$ 时, 重心偏离了其几何中心, 向 $EFGH$ 面移动了 $\overline{AB}/6$, 其中 \overline{AB} 是正六面体的棱长.

$$P_{EFGH} = 0.24343 = 0.07676 + \frac{1}{6}$$

$$P_{ABCD} = 0.11722 = -0.04945 + \frac{1}{6}$$

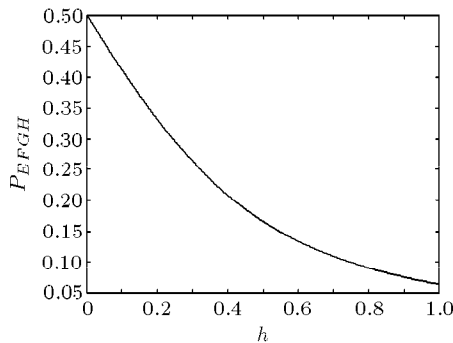


图 3 $EFGH$ 面向下的概率 P_{EFGH} 随重心高度 h 的变化曲线

其它 4 个面向下的概率为 $(1 - (P_{EFGH} + P_{ABCD}))/4 = 0.15984 = -0.00683 + \frac{1}{6}$. 由此看出, $EFGH$ 面向下的概率增加了 0.07676, $ABCD$ 面向下的概率减少了 0.04945, 其它四个面向下的概率减少了 0.00683.

以上分析仅是骰子落地过程的一个简化模型, 若认为地面不是光滑的, 还需要考虑骰子与地面碰撞时受到的摩擦

力, 若再考虑自由下落的骰子具有一定的转动角速度, 分析过程将更复杂, 但得到的结果会更符合实际. 这是我们下一步要做的工作.

参 考 文 献

- 1 Shen Z, Marston CM. A study of a dice problem. *Applied Mathematics and Computation*. 1995, 73(2): 231-247
- 2 周齐编译. 旋转的骰子. 国外科技动态. 2000(3): 26~27
- 3 Siqueira PTD, et al. Gambling as a teaching aid in the introductory physics laboratory. *European J of Physics*, 1998, 19(4): 337~346

THE EFFECT ON DICE THROWING RESULTS OF A DICE FILLED WITH LEAD

SHI Weiping

(Mathematics Department, Jilin University,
Changchun 130012, China)

GENG Aifang

(Changchun University of Science and Technology,
Changchun 130022, China)

Abstract Dice is a commonly used tool for gambling. The gravitational center of a dice may deviate its geometrical center, if the dice is filled with lead. The dice can be treated as a rigid body, and the process of dice throwing can be described as the dynamics of a free body falling down and bounce back off the table. For a dice filled with lead, we calculate the probability of its downward side on the table.

Key words dice, rigid body, gravitational center