

高周疲劳各向异性损伤问题研究

邵峰 王奇志

(北京航空航天大学 508 教研室, 北京 100083)

摘要 引用损伤力学方法研究金属构件疲劳问题, 并采用微结构力学模型建立了各向异性疲劳损伤本构关系与附加力-有限元解法, 以损伤划分步长预估了构件疲劳裂纹形成与扩展寿命. 用这一方法预估 30CrMnSiNi2A 材料含缺口圆棒试件全寿命. 结果表明, 理论 S-N 曲线与试验 S-N 曲线吻合良好. 该方法所需机时较少, 可用于工程实际构件的疲劳寿命预估及抗疲劳优化设计.

关键词 损伤力学, 各向异性, 疲劳全寿命

对于初始各向同性材料来说, 由于材料在不同方向的面元和线元会经历不同的应力史, 从而造成的材料损伤往往是各向异性的. 同时由于多数材料的损伤破坏是由于晶界处的微裂纹和微孔洞的形核、长大引起的, 目前所提出的各向异性损伤模型主要是从描述材料内所存在的各向异性损伤的缺陷(如微裂纹等)入手来解决问题^[1~3]. 文献[4]用能量法导出了含微裂纹弹性体应力应变关系. 文献[5]采用微裂纹扩展区损伤模型, 以单向拉伸为例, 讨论了脆性材料中的各向异性本构关系. 本文将应用基于微结构模型建立各向异性损伤模型, 采用有限元-附加力法对构件疲劳进行计及各向异性损伤的疲劳寿命预估.

1 轴对称问题计及各向异性损伤的本构关系

1.1 微结构力学模型及其元件力学性质

本文采用文献[6]中的微结构力学模型, 即对于承受一般应力状态的受损介质正方体元(图1), 用一个尺寸与之相同的面心桁架结构来代替它(图2)进行各向异性损伤分析.

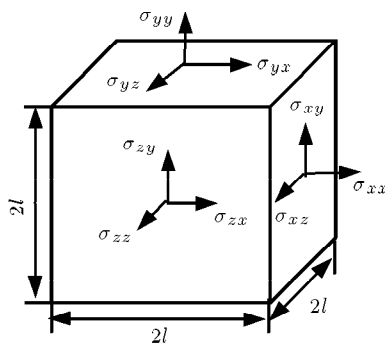


图1 受损立方元

由于微结构要模拟介质的损伤特性, 所以元件也具有损伤性质

$$N_b = K_b \varphi_b \Delta_b \quad (1)$$

$$N_s = K_s \varphi_s \Delta_s \quad (2)$$

式中 K 为杆的刚度, N 为杆的轴力, φ 为杆的连续度, Δ 为杆的伸长量, 下标 b 与 s 分别代表边杆和对角杆.

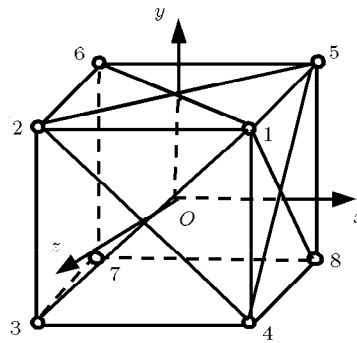


图2 桁架结构

此外, 边杆与对角杆还应是具有损伤演化特性的, 它们的损伤演化方程可被设为

$$\frac{dD}{dN} = \alpha(1 - R)^l \varepsilon^m (1 - D)^{-q} \quad (3)$$

其中 α, l, m, q 为材料常数; R 为应力比; $D = 1 - \varphi$ 为杆的损伤度.

1.2 考虑各向异性的轴对称问题本构关系

文献[6]利用介质单元的应变确定微结构各顶点的位移(除去刚体运动)满足两者变形一致的要求. 在这一前提下, 通过使用虚功原理实现微结构与介质单元的静力一致并导出各向异性的线弹性损伤的应力-应变关系.

在轴对称问题中, 采用圆柱坐标系 (r, θ, z) 较为方便. 由于圆柱坐标系与笛卡尔坐标系为正交坐标系, 我们可以将图1中的 z 轴对应于图3中的 z 轴, x 轴对应于 r 轴, y 轴对应于 θ 轴. 则本构关系可用矩阵表示为

$$\bar{\sigma} = \bar{C} \bar{\varepsilon} \quad (4)$$

式中

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_2 & B_1 & B_2 & 0 \\ A_3 & B_2 & C_1 & A_4 \\ A_4 & 0 & A_4 & A_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix}$$

式中 $A_1 \sim A_4, B_1, B_2, C_1$ 为杆的连续度组合。

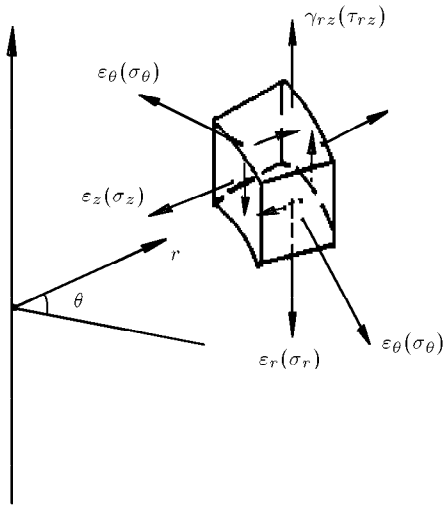


图 3 轴对称弹性体的应力与应变

由于模型模拟的是 $\nu = 1/4$ 情况，式 (4) 可写为

$$\sigma = \bar{C}_e \varepsilon - \bar{D} \varepsilon \quad (5)$$

式中

$$\bar{C}_e = \frac{2}{5} E \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D} = \frac{1}{5} E \begin{bmatrix} A'_1 & A'_2 & A'_3 & A'_4 \\ A'_2 & B'_1 & B'_2 & 0 \\ A'_3 & B'_2 & C'_1 & A'_4 \\ A'_4 & 0 & A'_4 & A'_3 \end{bmatrix}$$

式中 $A'_1 \sim A'_4, B'_1, B'_2, C'_1$ 为杆的损伤度组合。

2 给定损伤场时应力分析的附加力 - 有限元法

引入常应变元，单元内应变列阵 ε 可通过几何方程以节点位移列阵 δ_e 表示为

$$\varepsilon = B \delta_e \quad (6)$$

式中， B 为单元几何矩阵。

将式 (6) 代入式 (5) 可得

$$\sigma = C_e B \delta_e - D B \delta_e \quad (7)$$

单元节点列阵 F_e 可通过虚功原理用节点位移列阵表示为

$$F_e = K_e \delta_e - F_e^D \quad (8)$$

式中， K_e 是单元的无损弹性刚度矩阵，同时

$$F_e^D = D_e \delta_e \quad (9)$$

设总体位移列阵为 δ ，则由位移协调条件，可将单元位移列阵表示为

$$\delta_e = A_e \delta \quad (10)$$

于是，根据虚功方程，总体外力列阵为

$$K \delta = F + F^D \quad (11)$$

式中， K 是总体的无损弹性刚度矩阵。

由此可见，给定损伤场的位移分析问题，在引入附加外力列阵后，可以转化为无损的位移分析问题。这样，在损伤力学分析中，可以保持结构刚度矩阵不变，只需修改载荷列阵。

3 轴对称问题损伤分析与寿命预估

考虑到轴对称问题的对称性有

$$\Delta_{18} = \Delta_{27} = \Delta_{45} = \Delta_{36} = \sqrt{2}l(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \quad (12)$$

$$\Delta_{13} = \Delta_{57} = \Delta_{24} = \Delta_{68} = \sqrt{2}l(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \quad (13)$$

则微结构模型中各杆的具体损伤演化方程由式 (3) 得

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_1 &= \Delta D_{12} = \Delta D_{34} = \Delta D_{56} = \Delta D_{78} = \\ &\alpha(1-R)^l \varepsilon_{rr}^m (1-D_1)^{-q} \Delta N \\ \Delta D_2 &= \Delta D_{14} = \Delta D_{23} = \Delta D_{67} = \Delta D_{58} = \\ &\alpha(1-R)^l \varepsilon_{\theta\theta}^m (1-D_2)^{-q} \Delta N \\ \Delta D_3 &= \Delta D_{15} = \Delta D_{26} = \Delta D_{37} = \Delta D_{48} = \\ &\alpha(1-R)^l \varepsilon_{zz}^m (1-D_3)^{-q} \Delta N \\ \Delta D_4 &= \Delta D_{18} = \Delta D_{27} = \Delta D_{45} = \Delta D_{36} = \\ &\alpha(1-R)^l \left[\frac{1}{2}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right]^m (1-D_4)^{-q} \Delta N \\ \Delta D_5 &= \Delta D_{16} = \Delta D_{47} = \alpha(1-R)^l \left[\frac{1}{2}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \gamma_{rz}) \right]^m (1-D_5)^{-q} \Delta N \\ \Delta D_6 &= \Delta D_{25} = \Delta D_{38} = \alpha(1-R)^l \left[\frac{1}{2}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} - \gamma_{rz}) \right]^m (1-D_6)^{-q} \Delta N \\ \Delta D_7 &= \Delta D_{13} = \Delta D_{57} = \Delta D_{24} = \Delta D_{68} = \\ &\alpha(1-R)^l \left[\frac{1}{2}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \right]^m (1-D_7)^{-q} \Delta N \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

令

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{rr}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{\theta\theta}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_4 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \\ \varepsilon_5 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \gamma_{zr}) \\ \varepsilon_6 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} - \gamma_{zr}) \\ \varepsilon_7 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

所以式 (14) 可表示为

$$\Delta D_i = \alpha(1 - R)^l \varepsilon_i^m (1 - D_i)^{-q} \Delta N \quad i = 1, \dots, 7 \quad (16)$$

在一个单元 (0) 内, 已知一杆的损伤度增量 $\Delta D_i(0)$, 则其它杆的损伤度增量可由 $\Delta D_i(0)$ 表示为

$$\Delta D_j = \left(\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}\right)^m \left(\frac{1 - D_i(0)}{1 - D_j(0)}\right)^q \Delta D_i \quad (j \neq i) \quad (17)$$

其余单元 (x) 内各个损伤杆的损伤增量由 $\Delta D_i(0)$ 表示为

$$\Delta D_i(x) = \left(\frac{\varepsilon_i(x)}{\varepsilon_i(0)}\right)^m \left(\frac{1 - D_i(0)}{1 - D_i(x)}\right)^q \Delta D_i(0) \quad (18)$$

$$\Delta D_j(x) = \left(\frac{\varepsilon_j(x)}{\varepsilon_i(x)}\right)^m \left(\frac{1 - D_i(x)}{1 - D_j(x)}\right)^q \Delta D_i(x) \quad (j \neq i) \quad (19)$$

将计及各向异性损伤耦合效应的本构关系式 (5) 引入附加力 - 有限元法, 可对轴对称问题进行各向异性损伤前提下的全寿命预估. 在预估裂纹形成与扩展寿命时, 公式中上标 (0) 与 (n) 分别代表疲劳裂纹形成以及扩展方程中的危险单元, 下标中 0 与 n 代表程序循环次数, ξ 与 η 代表损伤单元中的损伤杆. 中标 (0) 与 (x) 分别代表危险单元与任意单元.

首先, 分析裂纹形成过程中的损伤场并且预估裂纹形成寿命

(1) 令 $D_\xi^{(0)}(0) = 0$. 由此应用有限元法分析无损伤的位移与应变场, 并以 $u_{i0}^{(0)}$ 与 $\varepsilon_{ij0}^{(0)}$ 表示.

(2) 由应变场 $\varepsilon_{ij0}^{(0)}$ 确定在危险单元 (即最大应变的单元) 中的桁架模型的危险杆 ξ 杆 (即最大应变杆).

(3) 确定危险杆损伤度增长量 (步长) $\Delta D_{\xi 0}^{(0)}(0)$. 由式 (16) 确定相应的载荷循环次数 $\Delta N_{\xi 0}^{(0)}$

$$\Delta N_{\xi 0}^{(0)} = \frac{\Delta D_{\xi 0}^{(0)}(0)}{\alpha(1 - R)^l (\varepsilon_{\xi 0}^{(0)})^m} \quad (20)$$

(4) 危险单元的其余各杆的损伤增量以及任意单元中各杆的损伤增量由式 (17) ~ 式 (19) 得到.

(5) 令

$$D_0(0) = \Delta D_0(0), \quad D_0(x) = \Delta D_0^{(0)}(x) \quad (21)$$

由此应用附加力有限元法分析有损伤的位移与应变场并以 $u_{i1}^{(0)}$ 与 $\varepsilon_{ij1}^{(0)}$ 表示. 考虑到式 (4), 计算各单元系数行列式 $\det_0|\bar{C}(0)|$, $\det_0|\bar{C}(x)|$ 的值.

(6) 由最小系数行列式 $\min(\det_0|\bar{C}(x)|, \det_0|\bar{C}(0)|)$ 的值确定危险单元, 在危险单元中以最大应变确定桁架模型中危险杆 ξ 杆.

以上步骤进行到 $\det_n|\bar{C}(0)| = 0$, 即出现第一个破坏单元为止, 其余各单元系数行列式的值为 $\det_n|\bar{C}(x)|$. 相应的载荷循环次数即疲劳裂纹形成寿命

$$N_0 = \sum_{n=0}^k \Delta N_{\xi n}^{(0)} \quad (22)$$

相应的损伤场为

$$D_k^{(0)}(x) = D_{k-1}^{(0)}(x) + \Delta D_{k-1}^{(0)}(x) \quad (23)$$

由此应用附加力有限元法得到疲劳裂纹形成寿命对应的位移与应变场, 并以 $u_{ik}^{(0)}$, $\varepsilon_{ijk}^{(0)}$ 表示.

然后, 分析裂纹扩展过程中的损伤场并且预估裂纹扩展寿命.

对第二个危险单元重复第一个破坏单元的损伤步骤直到 $\det_n|\bar{C}(1)| = 0$ 即第二个单元破坏为止. 相应载荷循环次数即裂纹扩展寿命的第一阶段为

$$N_1 = \int_{D_0^{(1)}}^1 \frac{dD(1)}{\alpha(1 - R)^l \{\varepsilon^{(1)}(1)\}^m \{1 - D(1)\}^{-q}} \quad (24)$$

同理, 设 (r) 代表第 r + 1 个危险单元, 可知裂纹扩展寿命的第 r 阶段

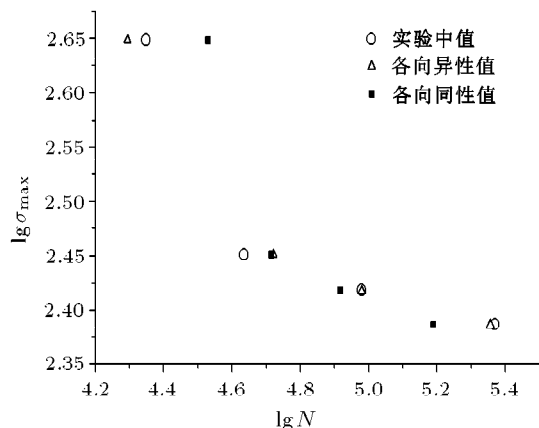
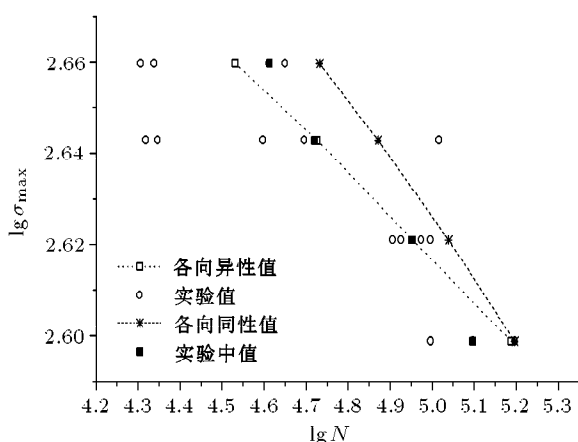
$$N_r = \int_{D_{0(r)}}^1 \frac{dD(r)}{\alpha(1 - R)^l \{\varepsilon^{(r)}(r)\}^m \{1 - D(r)\}^{-q}} \quad (25)$$

这个过程进行到裂纹贯穿截面或第 k 阶段的载荷循环次数可以略去不计为止. 试件疲劳全寿命为

$$N_t = N_0 + \sum_{r=1}^k N_r \quad (26)$$

4 计算例题

为了检验本文方法的可行性, 我们选取了文献 [7] 中 30CrMnSiNi2A 的 3 种试件 ($K_t = 1.0, 3.0, 5.0$) 的疲劳曲线. 采用 $K_t = 1.0$ 与 5.0 两种试件疲劳曲线确定损伤参数, 然后根据 $K_t = 3.0$ 试件的疲劳曲线检验预估构件疲劳全寿命的损伤力学 - 有限元方法. 两种结果比较见图 4 与图 5.

图 4 $K_t = 5.0$ 缺口试件计算曲线与试验点比较图 5 $K_t = 3.0$ 缺口试件计算曲线与试验点比较

5 结 论

(1) 根据以上理论疲劳寿命曲线与试验疲劳曲线的对比, 利用微结构力学模型建立的各向异性疲劳损伤本构关系在实际中可得到较理想的结果;

(2) 采用损伤力学 - 有限元方法预估构件疲劳全寿命是一种有前途的可行方案;

(3) 以损伤代替载荷循环次数划分计算步长并以附加应力法代替刚度法分析耦应力场, 可以大为节省机时;

(4) 实践表明, 采用上述方法获得理论曲线所需费用约为试验曲线的 1/100 数量级;

(5) 计算值与实验值在低应力情况下有一定的误差, 需要引入阈值校正, 这项工作有待于进一步研究。

参 考 文 献

- 1 Kachanov M. Effective elastic properties of cracked solids: Critical review of some basic concepts. *Appl Mech Review*, 1992, 47(8): 304~337
- 2 Ju JW, Tseng KH. A three-dimensional statistical micromechanical theory for brittle solids with interacting microcracks. *Int J Damage Mech*, 1992, 1(1): 102~131
- 3 余寿文, 冯西桥. 损伤力学. 北京: 清华大学出版社, 1997
- 4 周建平, 李爱丽, 余芳儒. 含微裂纹弹性体的应力应变关系. *力学学报*, 1994, 26(1): 49~59
- 5 余寿文, 冯西桥. 脆性材料的各向异性损伤及其测量方法. *清华大学学报*, 1995, 35(2): 6~11
- 6 张行, 赵军. 金属构件应用疲劳损伤力学. 北京: 国防工业出版社, 1998
- 7 吴学仁. 飞机结构金属材料力学性能手册. 北京: 航空工业出版社, 1996

ANISOTROPIC DAMAGE UNDER HIGH CYCLE FATIGUE

GAO Feng WANG Qizhi

(Div.508 Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract Damage mechanics method is applied to study fatigue problems of metallic structure members. Using the micro-structural mechanical model, the anisotropic damage coupled constitutive relations and finite element-additional loading method are established. Fatigue crack formation and propagation lives of structural members are predicted with the damage increment as the step length. Total lives of typical notched bars made of 30CrMnSiNi2A are estimated. The results show that the agreements between theoretical S-N curves and experimental ones are very good. This method requires not much of CPU time and can be applied to engineering practice in estimating lives and designing against fatigue.

Key words damage mechanics, anisotropic model, total fatigue life