非线性随机动力学与控制的哈密顿理论框架 1)

朱位秋 黄志龙 应祖光
(浙江大学力学系，杭州 310027)

朱位秋，男，1938 年 9 月生，浙江义乌人．1964 年研究生毕业于西北工业大学，现为浙江大学教授、博士生导师．主要从事非线性随机动力学与控制研究．曾先后访问美国 MIT 、University of Wisconsin-Madison 、State University of New York at Buffalo 、Florida Atlantic University 、日本 Kyoto University 、法国 Universite Blaise Pascal at CNRS ，与 S.H. Crandall 、Y.K. Lin 、T.T. Soong 等国际著名教授作较长时间合作研究．多次应邀在 IUTAM 关于非线性随机动力学讨论会及其他国际会议上作大会报告．被美国 Florida Atlantic University 应用随机学研究中心聘为 Schmidt 杰出客座教授．在国际国内重要刊物及国际学术会议上发表论文 120 余篇，1/3 为 SCI 收录．出版专著《随机振动》一部．曾获中国高校自然科学奖一等奖，国家教委科技进步奖 (理论) 二等奖，全国优秀科技图书奖二等奖．现任中国力学学会一般力学专业委员会副主任，振动工程学会非线性振动专业委员会常务委员，国际结构安全与可靠性协会及工程中随机方法委员会成员，“ Structural Safety ”、《固体力学学报》、《力学进展》、《非线性动力学学报》编委．

摘要 近几年来，笔者提出与发展了随机激励的耗散的哈密顿系统理论，包括精确平稳解、等效非线性系统法、拟哈密顿系统随机平均法、拟哈密顿系统的随机稳定性与随机分岔、首次穿越损坏分析方法及非线性随机最优控制策略，从而构成了一个非线性随机动力学与控制的哈密顿理论框架．本文简要介绍这一理论框架．

关键词 非线性系统，随机响应，随机稳定性，随机分岔，首次穿越破坏，可靠性，随机最优控制

1 引 言

非线性随机动力学的研究始于上世纪 60 年代初，主要研究随机响应预测，先后发展了福克 - 普朗克 - 柯尔莫哥洛夫 (FPK) 方程精确解法与统计 (等效) 线性化、摄动法、矩方程截断术及随机平均法等近似解析方法．此后不久，开始用李亚普诺夫直接 (函数) 法研究随机稳定性，用泊松过程模型与扩散过程模型研究首次穿越破坏．自上世纪 80 年代开始，用李亚普诺夫指数与平稳概率密度的极值分析研究随机分岔，用线性二次高斯 (LQG) 策略研究线性或等效线性随机系统的随机最优控制．直至上世纪 90 年代初，非线性随机动力学的理论成果基本上限于单自由度系统，对多自由度非线性，特别是强非线性系统缺乏有效的理论分析方法 [1,2]．

上世纪 90 年代中期，我们将多自由度非线性随机动力学系统表示成随机激励的耗散的哈密顿系统，并将它分成不可积、可积非共振、可积共振、部分可积非共振、部分可积共振 5 种情形，发展了随机响应预测、随机稳定性与分岔分析、首次穿越破坏估计及非线性随机最优控制的理论

本文于 2002-01-18 收到．
1) 国家自然科学基金项目 (19972059, 10002015) 资助．

方法.

2 非线性随机动力学系统的哈密顿表示与分类

n 自由度受控非线性随机动力学系统的运动方程可表为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{Q}_i=\partial H/\partial P_i\\&\dot{P}_i=-\partial H/\partial Q_i-c_{ij}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})(\partial H/\partial P_j)+f_{ik}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})\xi_k(t)+u_i(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})\\&\qquad i,j=1,2,\cdots,n;\quad k=1,2,\cdots,m\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中 Q_i,P_i 分别为广义位移与广义动量； $H=H(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})$ 为哈密顿量； c_{ij} 为拟线性阻尼系数； f_{ik} 为激励幅值； $\xi_k(t)$ 为随机过程，可包括周期或谐和函数； u_i 为反馈控制力. 一般式 (1) 是非线性的，称为受控的、随机激励的、耗散的哈密顿系统.

式 (1) 的核心是哈密顿系统，这里考虑的是理想、完整、自治哈密顿系统，以哈密顿量 $H(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})$ 表征. 设 n 自由度哈密顿系统有 r 个独立、对合的首次积分，则当 $r=1$ 时称该哈密顿系统为不可积的， $r=n$ 时为 (完全) 可积的， $1<r<n$ 时为部分可积的.

当哈密顿系统可积时，可引入作用 - 角变量 I_i 、 θ_i. 此时，哈密顿量形为 $H=H(\boldsymbol{I})$ ，而哈密顿方程形为

$$\dot{\theta}_i=\partial H(\boldsymbol{I})/\partial I_i=\omega_i(\boldsymbol{I})\,,\quad \dot{I}_i=0,\ i=1,2,\cdots,n\tag{2}$$

其解为

$$I_i=\mathrm{const}\,,\qquad \theta_i=\omega_i(\boldsymbol{I})t+\delta_i\,,\qquad i=1,2,\cdots,n\tag{3}$$

$\omega_i(\boldsymbol{I})$ 为该可积哈密顿系统固有频率. 若这些频率满足如下共振关系

$$k_i^u\omega_i(\boldsymbol{I})=0\,,\qquad i=1,2,\cdots,n\,;\qquad u=1,2,\cdots,\alpha\tag{4}$$

式中 k_i^u 为整数，则称该哈密顿系统为 (内) 共振的， $\alpha=0$ 时称为非 (内) 共振的.

在系统 (1) 中，须引入在哈密顿力学中所没有的部分可积的概念. 原则上，可将部分可积系统化为一个可积子系统与一个不可积子系统之和. 对其中可积子系统，可引入上述作用 - 角变量及共振概念. 因此，部分可积哈密顿系统也有共振与非共振之分.

于是，按与式 (1) 相应的哈密顿系统的可积性与共振性，可将系统 (1) 分成五种情形：不可积、可积非共振、可积共振、部分可积非共振、部分可积共振. 不同情形的哈密顿系统，其运动性态是不同的. 例如，可积非共振情形，哈密顿系统之解是概周期的，不可积哈密顿系统，当系统哈密顿量达到一定值时，其运动是混沌的.

3 精确平稳解[3~5]

当式 (1) 中 $u_i=0$ ， $\xi_k(t)$ 皆为高斯白噪声时，响应 $\boldsymbol{Q}$ 、 $\boldsymbol{P}$ 为扩散马尔可夫过程，可用 FPK 方程法求其精确解. 与式 (1) 等价的 Itô 方程形为

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}Q_i=(\partial H/\partial P_i)\mathrm{d}t\\&\mathrm{d}P_i=-(\partial H/\partial Q_i+m_{ij}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})(\partial H/\partial P_j))\mathrm{d}t+\sigma_{ik}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})\mathrm{d}B_k(t)\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

式中 $B_k(t)$ 为独立单位维纳过程，$\boldsymbol{\sigma\sigma}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{fDf}^{\mathrm{T}}$, $2\boldsymbol{D}$ 为 $\xi_\kappa(t)$ 的强度矩阵，m_{ij} 为修正后拟线性阻尼系数 [3]. 与方程 (5) 相应的 FPK 方程形为

$$\frac{\partial p}{\partial t}+[H,p]=\frac{\partial}{\partial p_i}\Big(m_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}p\Big)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p_i\partial p_j}(b_{ij}p) \tag{6}$$

p 为 $\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}$ 的转移概率密度，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\sigma\sigma}^{\mathrm{T}}$. 鉴于求方程 (6) 之瞬态解极为困难，一般求 (6) 之平稳解，即 $\partial p/\partial t=0$ 时的平稳 FPK 方程 (6) 之解，亦即当系统达到统计平衡时之解.

已经应用泊松括号性质证明，式 (6) 之平稳解的泛函形式取决于与式 (5) 相应的哈密顿系统的可积性与共振性. 当该哈密顿系统不可积时，其解形为

$$p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=C\exp[-\lambda(H)]\big|_{H=H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} \tag{7}$$

式中 C 为归一化系数. 当该哈密顿系统可积非共振时，式 (6) 之平稳解为

$$p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=C\exp[-\lambda(\boldsymbol{H})]\big|_{\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} \tag{8}$$

或

$$p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=C\exp[-\lambda(\boldsymbol{I})]\big|_{\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} \tag{9}$$

式中 $\boldsymbol{H}=[H_1\ H_2\ \cdots\ H_n]^{\mathrm{T}}$ 为相应哈密顿系统的 n 个独立、对合的首次积分组成的矢量. 当相应哈密顿系统为可积共振时，式 (6) 之平稳解为

$$p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=C\exp[-\lambda(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\psi})]\big|_{\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{\psi}=[\psi_1\cdots\psi_\alpha]^{\mathrm{T}}$, $\psi_u=k_i^u\theta_i$ 为成共振关系的各自由度的角变量组合. 类似地，当相应哈密顿系统为部分可积非共振与共振 (β 个共振关系) 时，式 (6) 之平稳解分别为

$$p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=C\exp[-\lambda(\boldsymbol{H}')]\big|_{\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} \tag{11}$$

与

$$p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=C\exp[-\lambda(\boldsymbol{I}',H_r,\boldsymbol{\psi}')]\big|_{\boldsymbol{I}'=\boldsymbol{I}'(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),H_r=H_r(q,p),\boldsymbol{\psi}'=\boldsymbol{\psi}'(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} \tag{12}$$

式中 $\boldsymbol{H}'=[H_1\ H_2\ \cdots\ H_r]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{I}'=[I_1\ I_2\ \cdots\ I_{r-1}]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\psi}'=[\psi_1\ \psi_2\ \cdots\ \psi_\beta]^{\mathrm{T}}$, $\beta\le r-2$. H_r 为不可积部分之哈密顿量. 式 (7)~ 式 (12) 中，势函数 λ 的具体形式由式 (6) 确定.

解式 (7) 具有能量等分之性质，即各自由度之间的能量比是固定的，随机激励与阻尼只能控制系统总能量的概率分布，因此称为能量等分解. 而式 (8)~ 式 (12) 为能量非等分解，随机激励与阻尼不仅可控制系统总能量的概率分布，还可调配各自由度之间的能量比. 国际上，直至上世纪 90 年代初，所得到的精确平稳解皆属能量等分解，能量非等分解乃由我们首先得到.

法国 Soize 将陀螺力看成作用在系统上的外力，且未考虑到哈密顿系统的可积性，因此，他得出了陀螺力对系统的随机响应无影响的结论. 我们将陀螺力看成哈密顿系统的一部分，并区分不可积与可积情形，得出结论：当包含陀螺力在内的哈密顿系统为不可积性，陀螺力确实不影响系统的随机响应；当该哈密顿系统为可积时，陀螺力影响响应的概率分布，但总能量的均值保持不变，从而纠正了 Soize 的不正确结论.

4　等效非线性系统法[6~8]

当得不到上述形式的精确平稳解时，可应用等效非线性系统法. 该法的基本思想是，对一给

定无精确平稳解之系统，寻求一个具有精确平稳解同时其性态与给定系统性态在某种统计意义上很相近的等效系统，以该等效系统的精确平稳解作为给定系统的近似平稳解.

设给定系统的 Itô 方程形为

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}Q_i=(\partial H/\partial P_i)\mathrm{d}t\\&\mathrm{d}P_i=-(\partial H/\partial Q_i+M_{ij}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})(\partial H/\partial P_j))\mathrm{d}t+\sigma_{ik}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})\mathrm{d}B_k(t)\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

与具有精确平稳解的系统 (5) 的哈密顿结构及随机激励相同，仅拟线性阻尼系数不同. 等效非线性系统法的任务就是由给定 M_{ij} 求 m_{ij}，使式 (5) 具有精确平稳解，同时使式 (5) 与式 (13) 之差在某种统计意义上为最小. 为此，提出了 3 种等效准则：一是原系统与等效系统的阻尼力之差的均方值最小；二是两系统的阻尼力所消耗的能量之差均方值最小；三是两系统首次积分的平均时间变化率相等.

在实际执行等效非线性系统法时，可不必求 m_{ij}，而直接求等效非线性系统法的精确平稳解. 由于该解取决于相应哈密顿系统的可积性与共振性，因此，在应用该法之前，需先确定与给定系统 (13) 相应的哈密顿系统属于 5 种情形中的哪一种. 这种方法的好处是可直接给出解析形式的近似平稳解. 例如，设与式 (13) 相应的哈密顿系统为不可积，相应的等效系统精确平稳解形为式 (7). 根据上述第一种等效准则，可推出

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\lambda}{\partial H}=\frac{\displaystyle\int_\Omega\Big[\Big(M_{ij}\frac{\partial H}{\partial P_j}+2\frac{\partial b_{ij}}{\partial P_j}\Big)\Big(2b_{ij}\frac{\partial H}{\partial P_j}\Big)\Big/\frac{\partial H}{\partial P_1}\Big]\mathrm{d}Q_1\cdots\mathrm{d}Q_n\mathrm{d}P_2\cdots\mathrm{d}P_n}{\displaystyle\int_\Omega\Big[\Big(2b_{ij}\frac{\partial H}{\partial P_j}\Big)\Big(2b_{ij}\frac{\partial H}{\partial P_j}\Big)\Big/\frac{\partial H}{\partial P_1}\Big]\mathrm{d}Q_1\cdots\mathrm{d}Q_n\mathrm{d}P_2\cdots\mathrm{d}P_n}\\&\Omega=\{(Q_1,\cdots,Q_n;P_2,\cdots,P_n)|H(Q_1,\cdots,Q_n,0,P_2,\cdots,P_n)\le H\}\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

在上述等效非线性系统法中，等效系统与原系统不仅具有相同的哈密顿结构 (非线性刚度) 与随机激励，而且用一个等效非线性阻尼代替原非线性阻尼，等效非线性系统保留了原系统的非线性特性. 因此，该法可应用于具有本质非线性特性的随机系统. 这是等效非线性系统法与等效线性化的本质差别.

对哈密顿系统 5 种情形，都给出了高斯白噪声激励下耗散的哈密顿系统的等效非线性系统及其平稳解. 通过与数字模拟解比较表明，此法具有比较好的精度.

5 拟哈密顿系统随机平均法[9~11]

设系统 (1) 在一个周期量级的时间内，随机激励输入系统的能量与阻尼消耗能量之差与系统本身总能量相比为小，式 (1) 就称为拟哈密顿系统. 数学上，常设 c_{ij} 、 u_i 及 $\sigma_{ik}\sigma_{jk}$ 同为 ε 阶小量， ε 为一小参数，从而在高斯白噪声激励情形拟哈密顿系统运动方程形为

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}Q_i=(\partial H/\partial P_i)\mathrm{d}t\\&\mathrm{d}P_i=-(\partial H/\partial Q_i+\varepsilon\bar{m}_{ij}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})(\partial H/\partial P_j))\mathrm{d}t+\varepsilon^{1/2}\bar{\sigma}_{ik}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})\mathrm{d}B_k(t)\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

在拟哈密顿系统中，广义位移与动量为快变过程，而原哈密顿系统中的首次积分为慢变过程. 按随机平均原理，慢变过程近似为扩散过程，可用平均 Itô 方程或 FPK 方程描述，平均方程的维数与形式取决于相应哈密顿系统的可积性与共振性.

设与式 (15) 相应的哈密顿系统不可积，只有哈密顿量是一个慢变过程，因此，平均 Itô 方程是一维的

$$\mathrm{d}H = m(H)\mathrm{d}t + \sigma(H)\mathrm{d}B(t) \tag{16}$$

漂移系数 m 与扩散系数 σ 可按一定公式从原系统的系数求出 [9]. 其平稳解为

$$p(H) = C\exp\{-\int[(\mathrm{d}\sigma^2(x)/\mathrm{d}x - 2m(x))/\sigma^2(x)]\mathrm{d}x\} \tag{17}$$

原系统的平稳概率密度近似为 [9]

$$p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = [p(H)/T(H)]\big|_{H=H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} \tag{18}$$

当相应哈密顿系统为可积非共振时，原哈密顿系统的 n 个首次积分变成拟哈密顿系统中 n 个慢变过程，此时，平均 Itô 方程是 n 维的

$$\mathrm{d}H_r = m_r(\boldsymbol{H})\mathrm{d}t + \sigma_{rk}(\boldsymbol{H})\mathrm{d}B_k(t) \tag{19}$$

m_r, σ_{rk} 可按一定公式由原方程系数得到 [10]. 与式 (19) 相应的 FPK 方程，只含概率势流而无概率环流，如有精确平稳解，则属平稳势类，从而更易求得平稳解. 式 (19) 之平稳解形为

$$p(\boldsymbol{H}) = C\exp\Big[-\int_0^{\boldsymbol{H}}(\partial\lambda/\partial H_r)\mathrm{d}H_r\Big] \tag{20}$$

式中指数内为线积分，$\partial\lambda/\partial H_r$ 可从与式 (19) 相应的 FPK 方程求得,并需满足协调条件 $\partial^2\lambda/\partial H_r\partial H_s = \partial^2\lambda/\partial H_s\partial H_r$. 根据 $\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 关系还可由式 (20) 得原系统近似平稳概率密度 $p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$.

当相应哈密顿系统为可积而共振时，除了 n 个作用量 I_r 外， α 个成共振关系的角变量的组合 $\psi_\mu = k_i^\mu\theta_i$ 在拟哈密顿系统中也是慢变过程. 因此，平均 Itô 方程形为

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}I_r = m_r(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\psi})\mathrm{d}t + \sigma_{rk}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\psi})\mathrm{d}B_k(t)\\&\mathrm{d}\psi_\mu = m_\mu(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\psi})\mathrm{d}t + \sigma_{\mu k}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\psi})\mathrm{d}B_k(t)\\&r=1,2,\cdots,n;\ \mu=1,2,\cdots,\alpha;\ k=1,2,\cdots,m\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

类似于可积非共振情况，式 (21) 的平稳解形为

$$p(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\psi}) = C\exp\Big[-\Big(\int_0^{\boldsymbol{I}}(\partial\lambda/\partial I_r)\mathrm{d}I_r + \int_0^{\boldsymbol{\psi}}(\partial\lambda/\partial\psi_\mu)\mathrm{d}\psi_\mu\Big)\Big] \tag{22}$$

$\partial\lambda/\partial I_r, \partial\lambda/\partial\psi_\mu$ 可从与式 (21) 相应的平稳 FPK 方程求得，也要满足相容条件. 还可由式 (22) 经变换得到原系统的近似平稳概率密度 $p(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$.

在部分可积非共振与部分可积共振情形，可分别按可积非共振与可积共振情形类似的方法得到平均方程与相应平稳解.

由上可知，在白噪声激励情形，拟哈密顿随机平均方程的维数等于相应哈密顿系统独立、对合首次积分个数与 (内) 共振关系个数之和. 由拟哈密顿系统随机平均法给出的平稳解的形式与第 3 节中给出的精确平稳解一致. 特别是当原系统有精确平稳解时，随机平均法给出相同精确平稳解.

当拟可积哈密顿系统受宽带随机激励时，也可得到类似于白噪声激励情形的平均 Itô 方程，方程维数也一样，只是其系数的表达式不一样. 若在随机激励中除白噪声与 (或) 宽带过程外，还含有谐和激励，那么，除了上述内共振外，还可能发生外共振或组合共振. 此时，平均 Itô 方程的维数就等于独立、对合首次积分数与内、外共振关系数之和. 当随机激励含有窄带随机激励，例如有界噪声时，也有类似结论.

上述各种情形随机平均法之解皆已用数字模拟解证实，具有良好精度. 鉴于随机平均方程比原方程简单、维数低、慢变过程为扩散过程，且与等效非线性系统法一样，能反映原系统的非线性特性，因此，适宜用平均 Itô 方程代替原方程研究随机稳定性、分岔、首次穿越及最优控制.

6 随机稳定性与分岔[11~15]

6.1 随机稳定性

对拟哈密顿系统 (15)，可通过求其平均 Itô 方程的最大 Lyapunov 指数确定平凡解概率为 1 渐近稳定性. 对拟不可积哈密顿系统，以 $H^{1/2}$ 作范数定义稳定性与 Lyapunov 指数 λ，线性化平均 Itô 方程 (16)，可得

$$\lambda = (1/2)[m'(H) - (1/2)(\sigma'(H))^2]\big|_{H=0} \tag{23}$$

式中 “$'$” 表示导数. 由 $\lambda < 0$ 得概率为 1 渐近稳定的充要条件. 此外，由平均过程 $H(t)$ 在 $H=0$ 与 H 为有限值或无穷大处的边界的类别也可判定平凡解的概率为 1 渐近稳定性. 一般由 Lyapunov 指数 $\lambda < 0$ 得到的是局部稳定条件，而由两端边界类别得到的则是全局或大范围稳定条件.

对非共振拟可积哈密顿系统，取平均 Itô 方程 (19) 的线性化方程，设 $\bar{H} = \sum_{r=1}^{n} H_r$，作变换

$$\rho = \ln\bar{H}^{1/2} = (1/2)\ln\bar{H}, \qquad \alpha_r = H_r/\bar{H} \tag{24}$$

可用 Itô 微分公式由式 (19) 得到关于 ρ、α_r 的 Itô 方程. 以 $\bar{H}^{1/2}$ 作范数定义稳定性与 Lyapunov 指数，可导得最大 Lyapunov 指数表达式

$$\lambda_1 = \int Q(\boldsymbol{\alpha}')p(\boldsymbol{\alpha}')\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}' \tag{25}$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}' = [\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_{n-1}]$, $Q(\boldsymbol{\alpha}')$ 为 ρ 的漂移系数，$p(\boldsymbol{\alpha}')$ 为 $\boldsymbol{\alpha}'$ 的平稳概率密度，通过求解与 $\boldsymbol{\alpha}'$ 的 Itô 方程相应的平稳 FPK 方程得到.

对共振拟可积哈密顿系统，取平均 Itô 方程 (21)，线性化关于 I_r 的方程. 设 $\bar{I} = \sum_{r=1}^{n} I_r$，作变换

$$\rho = \ln\bar{I}^{1/2} = (1/2)\ln\bar{I}, \qquad \alpha_r = I_r/\bar{I} \tag{26}$$

用 Itô 微分公式从式 (21) 导得关于 ρ、α_r 的 Itô 方程. 以 $\bar{I}^{1/2}$ 作范数定义稳定性与 Lyapunov 指数，可导得如下最大 Lyapunov 指数表达式

$$\lambda_1 = \int Q(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\psi})p(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\psi})\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}'\mathrm{d}\boldsymbol{\psi} \tag{27}$$

对非共振与共振拟部分可积哈密顿系统，也可分别导出类似于式 (25) 与式 (27) 的最大 Lyapunov 指数表达式，从而得到概率为 1 渐近稳定的充要条件.

6.2 随机分岔

随机分岔理论研究动态系统族的定性性态随参数的变化而发生的变化．随机分岔分成两类：动态分岔即 D- 分岔与唯象分岔即 P- 分岔． D- 分岔研究动态系统的不变概率测度的稳定性随参数变化而发生的变化，用 (最大)Lyapunov 指数符号变化来判别． P- 分岔乃研究平稳概率密度的峰的个数、位置及形态随参数的变化而发生的变化，可通过对平稳概率密度作极值分析来判别．

对拟哈密顿系统，在平凡解处不变概率测度的 D- 分岔参数值，可令其平均 Itô 方程的最大 Lyapunov 指数式 (23) 、 (25) 、 (27) 等于零得到．而 P- 分岔参数值可从对上述精确平稳概率密度，用等效非线性系统法，或用拟哈密顿随机平均法得到的近似平稳概率密度作极值分析得到．

对拟不可积哈密顿系统，由式 (18) 对 q_i 、 p_i 求导并令导数为零，可知，概率密度的峰值一般在使 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}H=0$ 的 H 值上．据此，由 $p(H)$ 在 $H=0$ 处的渐近表达式可得发生 P- 分岔的参数值 [15]．

7 首次穿越损坏[16~18]

对拟哈密顿系统，平均后的慢变过程为扩散过程，因此，可用扩散过程模型确定首次穿越损坏的概率与统计量 [1]．对拟不可积哈密顿系统，平均哈密顿量为一维扩散过程，条件可靠性函数 $R(t|H_0)$ 满足一维后向 Kolmogorov 方程

$$\frac{\partial R}{\partial t}=m(H_0)\frac{\partial R}{\partial H_0}+\frac{1}{2}\sigma^2(H_0)\frac{\partial^2 R}{\partial H_0^2} \tag{28}$$

在适当边初值条件下求解式 (28) 可得条件可靠性函数，然后用

$$p(T|H_0)=-\left.\frac{\partial R(t|H_0)}{\partial t}\right|_{t=T} \tag{29}$$

$$T^n(H_0)=n\int_0^\infty T^{n-1}R(T|H_0)\mathrm{d}T \tag{30}$$

得寿命的条件概率密度与条件矩．

对其他情形的拟哈密顿系统，在平均方程基础上，易写出条件可靠性函数满足的后向 Kolmogorov 方程及相应初、边值条件．原则上可通过数值求解得首次穿越损坏的概率或统计量．如前所述，不仅平均方程维数比原方程低，而且平均方程中不含概率环流项．因此，求解平均后的后向 Kolmogorov 方程要容易得多．此外，在宽带、宽带加谐和或窄带激励情况，原系统响应不是扩散过程，不能直接应用上述扩散过程理论方法．而经应用拟哈密顿系统随机平均法后慢变过程变成扩散过程，可应用上述扩散过程理论方法，这大大有助于多自由度非线性随机系统首次穿越损坏问题的解决．

8 非线性随机最优控制[19~24]

在拟哈密顿系统随机平均法基础上，结合 Bellman 的动态规划原理，发展了非线性随机最优控制策略．该策略不仅可以控制系统响应，还可以使系统稳定化，使首次穿越损坏概率最小．对线性随机系统，数例表明，非线性随机控制比 LQG 控制效果好，效率高．此外，应用我们的控制策略，可以解析地求出未控与已控系统的响应、稳定性及可靠性．因此，具有十分诱人的发展前景．

对受控的哈密顿系统 (1)，将反馈控制力 u_i 分成保守部分 $u_i^{(1)}$ 与耗散部分 $u_i^{(2)}$， $u_i^{(1)}$ 可与 $-\partial H/\partial Q_i$ 合并形成一个新哈密顿量，以改变哈密顿结构．例如可将哈密顿系统从可积变成不可积或反之，等等．这样，可改变系统内响应的分布．对改造后的系统 (1)，可应用拟哈密顿系统随机平均法．由于 $u_i^{(2)}$ 为未知，暂不平均，得部分随机平均方程，它描述受控扩散过程．在一定最优目标下，应用 Bellman 的动态规划原理，可建立动态规划 (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程．例如，对受控拟不可积哈密顿系统，可得部分随机平均方程

$$\mathrm{d}H = [m(H) + u_i^{(2)}(\partial H/\partial P_i)]\mathrm{d}t + \sigma(H)\mathrm{d}B(t) \tag{31}$$

设性能指标为

$$J = E\Big[\int_0^{t_f} L(H(\tau), \boldsymbol{u}^{(2)}(\tau))\mathrm{d}\tau + \Psi(H(t_f))\Big] \tag{32}$$

引进值函数

$$V(H,t) = \min_{\boldsymbol{u}^{(2)}} E\Big[\int_t^{t_f} L(H(\tau), \boldsymbol{u}^{(2)}(\tau))\mathrm{d}\tau + \Psi(H(t_f))\Big] \tag{33}$$

可建立如下动态规划方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \min_{\boldsymbol{u}^{(2)}}\Big\{L(H,\boldsymbol{u}) + \frac{\partial V}{\partial H}\Big[m(H) + u_i^{(2)}\frac{\partial H}{\partial p_i}\Big] + \frac{1}{2}\sigma^2(H)\frac{\partial^2 V}{\partial H^2}\Big\} \tag{34}$$

及终时条件 $V(H,t_f) = E[\Psi(H(t_f))]$, 求解 (34) 可得最优控制律 $\boldsymbol{u}^{(2)*}$，将 $u_i^{(2)*}$ 代替 (31) 中 $u_i^{(2)}$ 并平均该项，得完全平均 Itô 方程．求解与之对应的 FPK 方程，可得控制后系统响应．还可对完全平均 Itô 方程，应用公式 (23) 得控制后系统的 Lyapunov 指数．对首次穿越问题，若以条件可靠性函数或平均寿命为最优目标，也可在部分平均 Itô 方程基础上，建立相应动态规划方程，求得最优控制规律，并确定最大条件可靠性函数或最长平均寿命．按照这一思路，对不可积、可积及部分可积拟哈密顿系统响应、稳定性及可靠性的非线性随机最优控制皆已进行了研究．

9 结 语

上述理论方法构成了一个非线性随机动力学与控制的哈密顿理论框架，为解决非线性特别是多自由度强非线性随机系统的响应、稳定性、分岔、可靠性及控制这些十分重要而十分困难的问题提供了一条有效的新途径．美国工程院院士、随机结构动力学宗师 Y.K. Lin 教授认为这些成果标志着非线性随机动力学发展中的一个里程碑．

为应用上述理论方法解决工程中的实际问题，尚需做许多工作．例如，尚需为更多种随机激励模型建立随机平均方程，还需研究如何求解很高维数的 FPK 方程、后向 Kolmogorov 方程及动态规划方程，等等．上述理论方法还可作进一步的推广，例如，有可能推广于无穷多维非线性随机系统等．此外，还有可能应用于物理学乃至生物学领域的非线性随机系统，这些将是我们今后努力的方向．

参 考 文 献

1 朱位秋．随机振动 (第一、二版)．北京：科学出版社， 1992, 1998

2 Lin YK, Cai GQ. Probabilistic Structural Dynamics, Advanced Theory and Applications. New York: McGraw-Hill, 1995

3 Zhu WQ, Yang YQ. Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated Hamiltonian systems. *ASME J Appl Mech*, 1996, 63: 493~500

4 Zhu WQ, Huang ZL. Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated partially integrable Hamiltonian systems. *Int J Non-Linear Mech*, 2001, 36: 39~48
5 Ying ZG, Zhu WQ. Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated gyroscopic systems. *Int J Non-Linear Mech*, 2000, 35: 837~848
6 Zhu WQ, Soong TT, Lei Y. Equivalent nonlinear system method for stochastically excited Hamiltonian systems. *ASME J Appl Mech*, 1994, 61: 618~623
7 Zhu WQ, Lei Y. Equivalent nonlinear system method for stochastically excited and dissipated integrable Hamiltonian systems. *ASME J Appl Mech*, 1997, 64: 209~216
8 Zhu WQ, Huang ZL, Suzuki Y. Equivalent nonlinear system method for stochastically excited and dissipated partially integrable Hamiltonian systems. *Int J Non-Linear Mech*, 2001, 36: 773~786
9 Zhu WQ, Yang YQ. Stochastic averaging of quasi-nonintegrable-Hamiltonian systems. *ASME J Appl Mech*, 1997, 64: 157~164
10 Zhu WQ, Huang ZL, Yang YQ. Stochastic averaging of quasi-integrable-Hamiltonian systems. *ASME J Appl Mech*, 1997, 64: 975~984
11 Zhu WQ, Huang ZL, Suzuki Y. Stochastic averaging and Lyapunov exponent of quasi partially integrable Hamiltonian systems. *Int J Non-Linear Mech*, 2002, 37: 419~437
12 Zhu WQ, Huang ZL. Stochastic stability of quasi-nonintegrable-Hamiltonian systems. *J Sound Vib*, 1998, 218: 769~789
13 Zhu WQ, Huang ZL. Lyapunov exponent and stochastic stability of quasi-integrable-Hamiltonian systems. *ASME J Appl Mech*, 1999, 66: 211~217
14 Huang ZL, Zhu WQ. Lyapunov exponent and almost sure asymptotic stability of quasi-linear gyroscopic systems. *Int J Non-Linear Mech*, 2000, 35: 645~655
15 Zhu WQ, Huang ZL. Stochastic Hopf bifuration of quasi-nonintegrable-Hamiltonian systems. *Int J Non-Linear Mech*, 1999, 34: 437~447
16 Gan CB, Zhu WQ. First passage failure of quasi-non-integrable-Hamiltonian systems. *Int J Non-Linear Mech*, 2001, 36: 209~222
17 Zhu WQ, Deng ML, Huang ZL. First-passage failure of quasi integrable Hamiltonian systems. *ASME J Appl Mech*, in press
18 Zhu WQ, Huang ZL, Deng ML. First-passage failure and its feedback minimization of quasi partially integrable Hamiltonian systems. *Int J Non-Linear Mech*, in press
19 Zhu WQ, Ying ZG, Soong TT. An optimal nonlinear feedback control strategy for randomly excited structural systems. *Nonlinear Dynamics*, 2001, 24: 31~51
20 Zhu WQ, Ying ZG, Ni YQ, Ko JM. Optimal nonlinear stochastic control of hysteretic structures. *ASCE J Engng Mech*, 2000, 126: 1027~1032
21 Zhu WQ, Ying ZG. Nonlinear stochastic optimal control of paritially observable linear structures. *Engineering Structures*, 2002, 24: 333~342
22 Zhu WQ, Huang ZL. Feedback stabilization of quasi integrable Hamiltonian systems. *ASME J Appl Mech*, in press
23 Zhu WQ, Huang ZL, Deng ML. Feedback minimization of first-passage failure of quasi non-integrable Hamiltonian systems. *Int J Non-Linear Mech*, in press
24 Zhu WQ, Huang ZL, Ko JM, N YQ. Optimal feedback control of strongly nonlinear systems excited by bounded noise. *ASCE J Engng Mech*, in press

HAMILTONIAN FRAMEWORK OF NONLINEAR STOCHASTIC DYNAMICS AND CONTROL

ZHU Weiqiu　HUANG Zhilong　YING Zuguang
(Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract　In recent years, we proposed and developed a theory of stochastically excited and

(下转第 29 页)