

识别复杂形体转动惯量的一种新方法¹⁾

赵邦义 徐铭陶

(重庆大学, 重庆 630044)

摘要 本文导出了约束三线摆有阻尼自由摆动的非线性微分方程 提出复杂形体转动惯量的约束三线摆非线性等效识别法 对识别误差作了讨论 指出该法应用于复杂形体转动惯量甚至惯性张量的高精度识别的可能性

关键词 转动惯量, 约束三线摆, 非线性等效识别法

航天器的姿态控制, 机动变轨; 体育科学中的选材、训练以及临床医学中的体检等都对复杂形体的转动惯量, 及惯性张量进行高精度识别

本文导出了约束三线摆有阻尼自由摆动的非线性微分方程 吸取了文[1]中等效识别思想和三线摆在结构上的简单性, 提出转动惯量的约束三线摆非线性等效识别法 该法从摆动时程记录而非“周期”记录出发, 突破了提高识别精度的“线性瓶颈” 约束的引入则使该法能应用于复杂形体转动惯量, 甚至惯性张量的识别, 而不必限于盘类形体

1 摆动方程

图1为本文建议的约束三线摆结构和运动简图 摆盘A带轴受轴承架1约束 轴上装有重庆大学GDZ型圆光栅光电编码器, 其测角分辨率为0.044度/脉冲 盘上装重庆大学QGB型光栅位移传感器, 分辨率为20μm/脉冲 B为复杂形体安装于A上, 其回转半径ρ_B是待识别的

摆的位形可用悬点P的柱坐标(R, φ, z)描述如图1(b), R为P点半径, L为摆长, 注意到

$$(R \cos \varphi - R)^2 + R^2 \sin^2 \varphi + (L - z)^2 = L^2 \quad (1)$$

取φ为广义坐标 应用动量和动量矩定理可得

$$m \dot{z} = 3T \cos \gamma - F_z(z) - mg \quad (2)$$

$$m \rho^2 \ddot{\varphi} = -3TR \sin \gamma \cos \frac{\varphi}{2} - M_z(z) \dot{\varphi} \quad (3)$$

式中, m, ρ分别为A+B的质量和对OO₁轴的回转半径, T为摆线张力, γ为其与铅垂线的夹角, F_z为移动阻力, M_z为转动阻力矩 应用关系

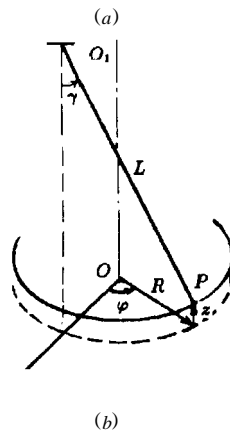
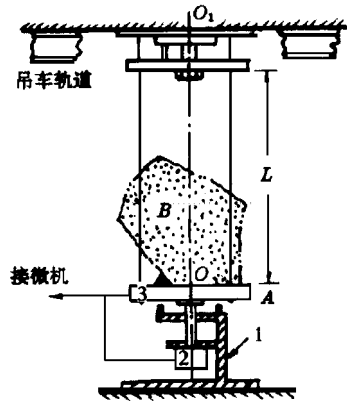


图1 约束三线摆及其运动

$$L \sin \gamma = 2R \sin \frac{\varphi}{2} \quad (4)$$

并消去T, 则可由(2)得出约束三线摆有阻尼自由摆动微分方程

$$\left[\frac{R^2 \sin^2 \varphi}{L^2 - 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} + \frac{\rho^2}{R^2} \right] \ddot{\varphi} + \frac{(L^2 - 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \cos \varphi}{R^2 \sin \varphi} \dot{\varphi}^2 = \frac{R^2 \sin^2 \varphi}{L^2 - 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \ddot{\varphi} +$$

¹⁾中国工程物理研究院院外基金项目资助

$$\frac{M_z(\Phi\dot{\Phi})}{mR^2} = 0 \quad (5)$$

其解 $\mathcal{Q}(t)$ 依赖于初态并且是衰减的 只有当 Φ 与 $\dot{\Phi}$ 同为一阶小量并忽略阻尼, 则式(5)线性化为

$$\rho^2 \ddot{\mathcal{Q}}R^2 + g\mathcal{Q}L = 0, \text{ 并有 } \tau_0 = \frac{2\pi\rho}{g} \sqrt{\frac{L}{g}} \text{ (周期)} \quad (6)$$

2 非线性等效识别的原理和方法

τ_0 只有理论意义, 实际上是个近似量, 具有模糊性 实测 τ_0 时 Φ 与 $\dot{\Phi}$ 的初值该取多小? 弱阻尼下, τ_0 已是“条件”周期, 只允许取摆通过平衡位置的瞬时作为度量 τ_0 的起、止时刻, 这样的时刻是难于准确判定的 如此, 以测 τ_0 作转动惯量的高精度识别, 在理论上就受到限制, 即有线性瓶颈

鉴于对摆动时程, 即式(5)的解 $\mathcal{Q}(t)$ 作高精度测量与处理并非难事, 本文拟订出从测 $\mathcal{Q}(t)$ 去识别转动惯量的高精度方法

2.1 原理

设 C 为另一物体, 与 B 有相同质量(即 $m_C = m_B$); $A + C$ 与 $A + B$ 在摆动中因形状引起的阻尼差别可忽略; 摆动的初态相同, 则按式(5)必有

$$\rho_C = \rho_B \Rightarrow \mathcal{Q}_C(t) = \mathcal{Q}_B(t) \quad (7)$$

这个等价关系叫做约束三线摆非线性等效原理

2.2 方法

现设 C 为二相同的均质圆柱, 半径为 r , 对称于

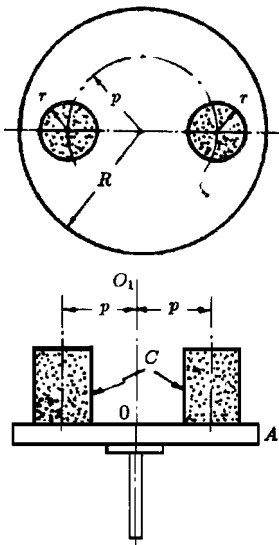


图2 等效圆柱在A盘上的安放

OO_1 轴放置在A盘上, 相距为 $2p$, 如图2 按理论力学可算出二圆柱的转动惯量为

$$J_C = m_C \left(\frac{r^2}{2} + p^2 \right) \quad (m_C \text{ 为二圆柱质量}) \quad (8)$$

再设通过测量, 既得出一条 $A + B$ 的摆动时程记录 $\mathcal{Q}_B(t)$, 又得出一族 $A + C$ 的摆动时程记录 $\{\mathcal{Q}_C(t, p)\}$, $r < p < R - r$, 并且它们有相同的记录长度 τ 和相同的初态: $\mathcal{Q}_B(0) = \mathcal{Q}_C(0, p)$, $\dot{\mathcal{Q}}_B(0) = \dot{\mathcal{Q}}_C(0, p) = 0$ 此外, 还假设 r 选得适当, 能保证

$$\mathcal{Q}_B(t) = \mathcal{Q}_C(t, p), \quad r < p < R - r \quad (9)$$

于是应用下列最小二乘判据

$$E(p) = \int_0^\tau |\mathcal{Q}_B(t) - \mathcal{Q}_C(t, p)|^2 dt, \quad \frac{\partial}{\partial p} E(p) = 0 \quad (10)$$

就能从 $\{\mathcal{Q}_C(t, p)\}$ 中挑选出一条记录 $\mathcal{Q}_C(t, p_0)$ 逼近 $\mathcal{Q}_B(t)$. 不难推想出 $\mathcal{Q}_B(t)$ 和 $\mathcal{Q}_C(t, p)$ 的定性模样如图3所示 $\mathcal{Q}_C(t, p_0)$ 将 $\{\mathcal{Q}_C(t, p)\}$ 分成二组 $p > p_0$ 的一组较 $\mathcal{Q}_C(t, p_0)$ 衰减得慢些, $p < p_0$ 的一组则衰减得快些 应用这一特点可加速 $\mathcal{Q}_C(t, p_0)$ 的选出从而确定出 p_0 将 p_0 代入(8), 则按等效原理就得出 J_B 的理论识别值

$$[J_B^0] = m_C (r^2/2 + p_0^2) \doteq J_B \quad (11)$$

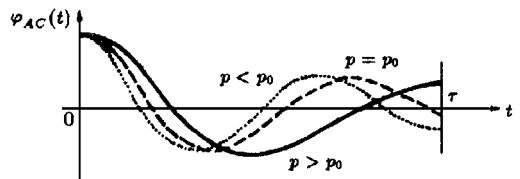


图3 不同 p 下 $\mathcal{Q}_C(t, p)$ 的定性模样

3 识别误差讨论

应用图1(a)之装置识别出的转动惯量有误差

$$\delta[J_B] = \sum_{i=0}^3 \delta[J_B^i] \quad (12)$$

式中 $\delta[J_B^0]$ 为理论识别误差, 变分(11)可得

$$\delta[J_B^0] = (r^2/2 + p_0^2) \delta m_C + m_C r \delta r + 2m_C p_0 \delta p_0 \quad (13)$$

$\delta[J_B^1]$ 为装置误差, 与盘的水平度、盘轴与轴承间隙有关; $\delta[J_B^2]$ 为 B 在 A 盘上的定位误差, 由 B 上的 OO_1 线与装置的 OO_1 轴不重合引起; $\delta[J_B^3]$ 则为随机误差, 文献[2]对图1(a)所示结构方案作了误差分配研究, 针对 $m_B = 450 \text{ kg}$ 级试样指出, 实现 $\delta[J_B]/J_B < 0.5\%$ 在技术上是可行的, 文[2]中还提出了技术建议的细节

文[1]中方法的理论识别误差和式(13)不同之处仅在于采用了 $\delta p_0 = (\partial p / \partial \tau_0) \delta \tau_0$ 即用 $\delta \tau_0$ 控制 δp_0 。本文已阐明,如要提高识别精度,这是不可取的

参 考 文 献

1 陈春澄,庄表中,沈德先 关于测试物体转动惯量方法的探

讨.力学与实践,1992(6):48

2 徐铭陶,赵邦义,唐一科 复杂形体惯性张量约束三线摆非线性等效识别法 中国工程物理研究院外基金项目总结报告,1993

(1996年7月18日收到第1稿,

1996年8月30日收到修改稿)

白光散斑剪切干涉术的统计理论和实验研究¹⁾

王开福

(扬州大学工学院,扬州 225001)

摘要 本文从散斑统计光学的基本原理出发,以随机过程理论为工具,进一步阐述了白光散斑剪切干涉术的统计特性,指出物面粗糙度和物面相干域应满足的一般条件,并对一般条件进行了实验验证,结果表明理论与实验保持一致

关键词 白光散斑剪切干涉,统计特性,位移导数,粗糙度,相干域

采用散斑剪切技术研测物体的位移导数场具有全场显示、非接触测量、光路简单和防震要求低等优点,因而目前已广泛地应用于无损检测领域。然而散斑是随机分布的统计光学现象,散斑剪切技术的统计特性的研究具有较大的难度,因此目前有关用统计光学方法对散斑剪切技术进行统计分析的研究工作报道很少,尤其是用统计光学方法对白光散斑剪切技术进行统计分析的研究工作还未见报道

我们基于散斑统计光学的基本原理,阐述了白光散斑剪切干涉术的统计规律,指出了研测位移导数场的一般条件^[1]。所得结论在3种特殊情形(空间完全相干或时间完全相干或空间和时间均完全相干)下同已有理论完全一致。本文继续上述的研究,进一步阐述了白光散斑剪切干涉术在一般情形下的统计规律,给出了白光散斑剪切干涉术应满足的一般条件,并进行了实验验证

1 理论分析

1.1 物面粗糙度的一般要求

¹⁾江苏省教委自然科学基金资助课题

物面随机打毛,人为改变金属表面的精细结构,使物面具有随机平稳的特性。为提高散斑条纹的质量,需要选择合适的物面粗糙度。物面太光滑,条纹质量要下降,其主要原因有2个:其一是在散斑图样的任一点,干涉波无足够的位相差以产生完整的相消干涉;其二是物面的空间频域变窄,使高频成份丢失。反之,物面太粗糙,条纹质量也要下降,其主要原因是光程差,容易超过相干长度而使非相干成份增加

根据文献[1]在白光散斑剪切干涉术中物面粗糙度应满足的一般要求为

$$\sigma_r = 0.19 \mu\text{m} \quad (1)$$

1.2 物面相干域的一般要求

当物面相干域线度大于物面剪切量时,被剪切后的两物光波到达像面上同一点时才会发生相干叠加,此时散斑条纹的质量最高。否则被剪切后的两物光波仅发生部分相干,甚至不相干。在白光散斑剪切干涉术中物面相干域应满足的一般要求为^[1]

$$d_c > \Delta \quad (2)$$

式中 d_c 为物面相干域线度, Δ 为物面剪切量, d_c 由下式表示

$$d_c = 1 / (1/d_s + 1/d_i)$$

$$d_s = \lambda / \Delta \alpha_{\max}, \quad d_i = l_i / (\alpha_{\max} + Q_{\max}) \quad (3)$$

式中 λ 为白光中心波长, l_i 为相干长度, $\Delta \alpha_{\max}$ 为光源对物点的最大张角, α_{\max} 和 Q_{\max} 分别为光源中心和光瞳中