梯形渠道水跃共轭水深直接计算公式

冯家涛
(西北农业大学, 杨陵 712100)

摘要 根据工程实践中水跃函数各部分的相对比例, 通过对水跃方程的数学变换, 应用迭代理论提出快速收敛的共轭水深直接计算方法, 使用方便准确.

关键词 梯形渠道, 水跃, 共轭水深

在水利水电工程中, 闸、坝及陡槽等泄水建筑物的下游一般都会产生水跃, 工程中常利用水跃来消除泄水建筑物下游高速水流中的巨大动能, 水跃共轭水深的计算是水跃消能计算和水跃长度计算的前提, 因此, 水跃计算在研究堰、闸出流和消能措施中具有十分重要的作用. 但对于平底梯形渠道水跃共轭水深的计算, 目前都是采用试算法和图解法[1,2], 前者盲目性很大且复杂烦琐, 后者精度低且使用不便, 为克服以上这些缺点, 本文提出一种直接计算方式, 供应用参考.

1 梯形明渠共轭水深水跃方程

根据文献 [1] 易得梯形明渠共轭水深的水跃方程为

$$\frac{6}{gx(1+xn)} + x^2(3+2nx) = \frac{6}{gy(1+ny)} + y^2(3+2ny) = \alpha \qquad (1)$$

式中, 虚拟单宽流量 $q = Q/b$, b 为梯形断面底宽.

$$n = \frac{mq^{2/3}}{b}, \qquad x = \frac{h_1}{q^{2/3}}, \qquad y = \frac{h_2}{q^{2/3}} \qquad (1\,a)$$

2 迭代公式及其收敛性

2.1 迭代公式

根据 (1) 式, 当求跃前水深时有

$$\frac{6}{gx(1+nx)} + x^2(3+2nx) = \alpha \qquad (1\,b)$$

根据工程实践中常用梯形断面的性质及跃前断面上水流动量 (上式第一项) 与水压力 (上式第二项) 大小在 α (上式右端项) 中的比例, 可以得知上式第二项所占比例较小, 所以取以下迭代式

$$x(1+nx) = \frac{6}{g[\alpha - x^2(3+2nx)]} \qquad (2)$$

则得跃前水深迭代公式

$$x = \frac{-1+\sqrt{1+\dfrac{24n}{g[\alpha - x^2(3+2nx)]}}}{2n} \qquad (2\,a)$$

同理对跃后水深可以得到

$$y^2(3+2ny) = \alpha - \frac{6}{gy(1+ny)} \qquad (3)$$

则得迭代公式

$$y = \left[\frac{\alpha - \dfrac{6}{gy(1+ny)}}{3+2ny}\right]^{1/2} \qquad (3\,a)$$

2.2 收敛性分析

根据迭代理论[3], 假设方程 $f(x)=0$ 的一个根 a, 若把 $f(x)=0$ 变形为 $x=\phi(x)$ 则迭代形式 $x_{n+1}=\phi(x_n)$ 收敛于 a 的条件是: 如果在 a 的某一邻域 $|x-a|<\delta$ 内 $|\phi'(x)|<1$, 那么以该邻域内任一点为初值的迭代都收敛于 a.

下面分别证明迭代式 (2a), (3a) 的收敛性, 对 (2a) 式, 设

$$\phi(x) = \frac{\sqrt{\dfrac{24n}{g[\alpha - x^2(3+2nx)]}+1}-1}{2n} \qquad (4)$$

则

$$\phi'(x) = \frac{gx^3(1+nx)^3}{(2nx+1)} = \frac{1}{F_{r1}^2} < 1 \qquad (5)$$

式中, F_{r1} 为跃前水流的佛汝德数. 因 $F_{r1}>1$, 故跃前水深的迭代公式是收敛的.

对于跃后水深的迭代式 (3a), 设

$$\phi(y) = \left[\frac{\alpha - \dfrac{6}{gy(1+ny)}}{3+2ny}\right]^{0.5} \qquad (6)$$

则

$$\phi'(y) = \frac{2ny+1}{gy^3(1+ny)^3} - \frac{ny}{3+2ny} + \frac{n(2ny+1)}{gy^2(1+ny)^3(3+2ny)} = F_{r2}^2 - (1-F_{r2}^2)\cdot\frac{ny}{3+2ny} \qquad (7)$$

本文于 1998 - 05 - 26 收到.

因跃后水流的佛汝德数 $0 < F_{r2} < 1$，且 $ny/(3+2ny) < 1$，则由 (7) 式得

$$|\Phi'(y)| < 1 \tag{8}$$

故跃后水深的迭代公式也是收敛的.

3　合理迭代初值选取

众所周知，迭代计算收敛速度及计算精度，不仅与迭代格式有关，而且与迭代初值选取有关，只有恰当选取迭代初值与合理迭代格式的配套使用，才能保证高的计算精度和快的收敛速度. 为此，我们利用矩形断面共轭水深可以直接求解的特点，将梯形断面共轭水深的求解近似用矩形断面的公式表达，为了保证一定的精度，引入断面特征修正参数 β，它是根据大量的计算成果统计得来的. 因此可按下式分别计算跃前水深及跃后水深的迭代初值.

跃前

$$x_0 = \frac{y}{2}\left(\sqrt{1\text{形明}\frac{8}{g(\beta y)^3}} - 1\text{深的}\right) \tag{9 a}$$

跃后

$$y_0 = \frac{x}{2}\left(\sqrt{1+\frac{8}{g(\beta x)^3}} - 1\right) \tag{9 b}$$

其中

$$\beta = \left(1 + \frac{n^{0.9}}{6}\text{b}\right)\quad\text{断面} \tag{10}$$

为统计经验公式.

确定了迭代初值后，就可应用共轭水深的迭代公式计算，进行一次迭代计算而得到梯形渠道共轭水深的直接计算公式:

跃前公式

$$x_1 = \frac{\sqrt{1+\dfrac{24n}{g[\alpha - x_0^2(3+2nx_0)]}} - 1}{2n} \tag{11}$$

跃后公式

$$\alpha\quad y_1 = \left[\frac{\alpha - \dfrac{6}{gy_0(1+ny_0)}}{3+2ny_0}\right]^{1/2}\text{右端} \tag{12}$$

在工程实用范围内，直接计算公式 (11)，(12) 只有在局部点相对误差为 2.4 %，而在其余范围内的相对误差基本接近于零; 如果再进行一次迭代计算，则在整个实用范围内最大相对误差总小于 0.31 %.

4　应用举例

例　一个水跃产生于一棱柱体梯形水平渠段中，已知: $Q = 6.0\ \mathrm{m^3/s}$; $b = 2.0\ \mathrm{m}$，边坡系数 m 为 1.0，跃后水深为 1.48 m，求跃前水深 h_1.

解　单宽流量: $q = 3\mathrm{m^3/s \cdot m}$

由式 (1) 得

$$n = \frac{mq^{2/3}}{b} = 1.04$$

$$y = \frac{h_2}{q^{2/3}} = 0.712$$

$$\alpha = \frac{6}{g(1+ny)y} + y^2(3+2ny) = 3.1881$$

$$\beta = 1 + \frac{n^{0.9}}{6} = 1.1726$$

由式 (9b) 得

$$x_0 = \frac{y}{2}\left(\sqrt{1+\frac{8}{g(\beta y)^3}} - 1\right) = \text{果在}958\text{的}$$

由 (11) 式得

$$x_{\text{水}} = \frac{\sqrt{1+\dfrac{24n}{g[\alpha - x_0^2(3+2nx_0)]}} - 1}{2n} = 0.1923$$

则跃前水深 $h_1 = 0.1923\ q^{2/3} = 0.4\mathrm{m}$ 与精确值相同.

参　考　文　献

1 吴持恭主编. 水力学. 北京: 高等教育出版社，1982
2 清华大学编. 水力学. 北京: 高等教育出版社，1983
3 武汉大学，山东大学编. 形计算方法. 北京: 人民教育出版社，1979

A DIRECT CALCULATION FORMULA FOR CONJUGATE WATER DEPTH OF WATER JUMP IN A TRAPEZOID CHANNEL

FENG Jiatao
(Northwest Agricultural University, Yangling 712100, China)

Abstract　This paper proposes a direct calculation formula for conjugate water depth, based on a mathematical transformation for the water jump equation and applying the iteration theory. It is found to be fast convergent, accurate and easy to use.

Key words　trapezoid channel, water jump, conjugate water depth