

十分准确地获得模型结构的第一自振频率及相应的振型,而且可以获得高阶振型的动力特性.在结构的弹性工作阶段,模型完全可以反映原结构的动力特性及原结构的强弱,从而为验证结构计算程序及计算模型的正确性提供依据.

(2) 采用有机玻璃为模型材料模拟带有轻钢结构增层的砼框架结构时,模型设计应采用换算质量密度相似关系计算出模型的相应附加质量密度配重,以保证所测模型结构的动力参数能够正确地推算至原型结构.

(3) 带有轻钢增层的多层砼框架结构由于在增层部位刚度的突然减小,在地震力作用下所产生的侧移为非线性增加,出现较为明显的局部振动——即鞭梢效应现象,根据试验与计算结果分析,轻钢增层结构出现的鞭梢效应主要是由于高阶振型影响所造成的,因此设计时应采用多质点系振型分析法计算出整体结构的前2个~3个高阶振型地震反应进行耦合.

#### 参 考 文 献

- 1 清华大学工程力学系.机械振动.北京:机械工业出版社,1980
- 2 湖南大学等.建筑结构试验.北京:中国建筑工业出版社,

1982

- 3 刘大海等.高层建筑抗震设计.北京:中国建筑工业出版社,1993
- 4 胡聿贤.地震工程学.北京:地震出版社,1988
- 5 张焱.轻钢增层结构的抗震研究.青岛建筑工程学院硕士学位论文

### THE EXPERIMENTAL STUDY OF SEISMIC MODEL OF LIGHT STEEL STRUCTURE WITH ADDED STORIES

WANG Yan XU Yongchun

(Qingdao Institute of Architecture and Engineering, Qingdao 266033, China)

**Abstract** In order to study the dynamic characteristics of light steel structure with added stories, a vibration experiment with plexiglass as model is introduced. Its experimental result is compared with theoretical calculation and they are found in good agreement.

**Key words** light steel structure with added stories, vibration experiment, high-order model

## 承受内压的可压缩弹性薄壁管的有限变形分析

徐志洪

(南京理工大学土木工程与力学系,南京 210014)

**摘要** 讨论由一类超弹性材料——Blatz-Ko材料所组成的薄壁圆管在内压力作用下平面有限变形问题,得到了管径变化与内压力之间的解析关系.

**关键词** 有限变形,超弹性材料,平面应变,薄壁圆管

#### 1 引 言

文献[1]、[2]中,A.E.Green及R.W.Ogden等讨论了受内压的由不可压缩材料所组成的圆管和球壳的有限弹性变形问题.由不可压缩的限制条件,立即可得到一个轴对称的变形场的解析表达式,而对于可压缩材料,没有这种限制条件,因而问题较复杂.本文探讨了由一类可压缩的超弹性材料——Blatz-Ko材料所组成的薄壁圆管在内压作用下的有限变形问题,

得到了圆管的管径变化与管内压力之间的解析关系.超弹性材料所组成的圆管的有限变形的研究,对于生物工程中心血管问题的研究有一定的理论价值.

#### 2 在内压力作用下可压缩弹性圆管的有限变形

假设  $D_0 = \{(r, \theta) | a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  表示一个圆柱形管的横截面,其内径为  $a$ ,外径为  $b$ ,管中所受的内压力为  $p$ ,如图1所示.变形是轴对称的,假设变形后的径向坐标为  $R$ ,环向坐标为  $\Theta$ ,则有

$$R = R(r) > 0, \quad \Theta = \theta \quad (1)$$

与变形相对应的变形梯度张量  $F$  的极坐标分量为

$$F_{rr} = \dot{R}(r), \quad F_{\theta\theta} = \frac{R(r)}{r}, \quad F_{r\theta} = F_{\theta r} = 0 \quad (2)$$

1995-06-09 收到第1稿,1999-04-23 收到修改稿.

其中  $\dot{R}$  代表对自变量求导. 假设变形梯度张量  $F$  的雅可比行列式为正值, 则有  $\dot{R}(r) > 0$ . 变形所对应的主伸长比为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_r = \dot{R}(r) \\ \lambda_2 &= \lambda_\theta = \frac{R(r)}{r} \end{aligned} \right\} (a \leq r \leq b) \quad (3)$$

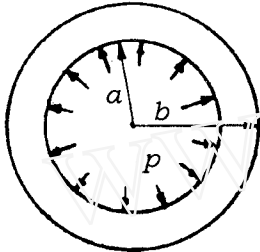


图 1 承受内压的圆管截面示意图

对于各向同性的可压缩超弹性材料, 其平面应变的应变能函数可写成

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2) \quad (4)$$

则其 Piola 应力分量为

$$\sigma_1 = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial w}{\partial \lambda_1}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial w}{\partial \lambda_2} \quad (5)$$

对于 Blatz-Ko 材料<sup>[3]</sup>, 其应变能函数为

$$w = (\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\mu}{2} (\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + 2\lambda_1\lambda_2 - 4) \quad (6)$$

其中  $\mu$  为材料常数. 将 (6) 式代入 (5) 式并写成极坐标的形式, 则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \mu \left( 1 - \frac{r}{R(r)\dot{R}^3(r)} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \mu \left( 1 - \frac{r^3}{R^3(r)\dot{R}(r)} \right) \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta r} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

不计体力, 则有平衡方程

$$\text{div} \sigma = 0 \quad (8)$$

$$3rR^3\dot{R} - R^3\dot{R} + r^3\dot{R}^4 = 0, \quad a \leq r \leq b \quad (9)$$

考虑到边界条件, 有

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } r = a \text{ 时, } \quad \sigma_{rr} &= -p \\ \text{当 } r = b \text{ 时, } \quad \sigma_{rr} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

将 (10) 式代入 (7) 式中, 有

$$\left. \begin{aligned} R(a)\dot{R}^3(a) &= a \left( 1 + \frac{p}{\mu} \right)^{-1} \\ R(b)\dot{R}^3(b) &= b \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

引入参数

$$t(r) = \frac{r\dot{R}(r)}{R(r)} \left( = \frac{\lambda_r}{\lambda_\theta} \right) > 0 \quad (12)$$

方程 (9) 可化成

$$3rt - t(1-t)(t^2 + t + 4) = 0, \quad a \leq r \leq b \quad (13)$$

其中  $t = \frac{dt}{dr}$ , 不失一般性, 可以证明

$$0 < t < 1, \quad \frac{dt}{dr} > 0, \quad a \leq r \leq b \quad (14)$$

对 (13) 式进行积分, 有

$$r^8 = \frac{Ct^6 h(t)}{(1-t)^4(t^2 + t + 4)} \quad (15)$$

其中  $C > 0$  是一个积分常数, 并且

$$h(t) = \exp \left\{ \frac{6}{\sqrt{15}} \tan^{-1} \left( \frac{2t+1}{\sqrt{15}} \right) \right\} > 0 \quad (16)$$

另外, 由 (12) 式、(13) 式可得

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{3}{(1-t)(t^2 + t + 4)} \quad (17)$$

积分后, 有

$$R^4 = \frac{D(t^2 + t + 4)h(t)}{(1-t)^2} \quad (18)$$

其中  $D > 0$  是积分常数.

由 (15) 式和 (18) 式可以看出,  $r$  和  $R$  都是  $t$  的单调函数. (15) 式、(16) 式和 (18) 式是方程 (9) 的参数解. 由 (15) 式得

$$\left. \begin{aligned} a^8 &= \frac{Ct_a^6 h(t_a)}{(t_a^2 + t_a + 4)(1-t_a)^4} \\ b^8 &= \frac{Ct_b^6 h(t_b)}{(t_b^2 + t_b + 4)(1-t_b)^4} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中,  $t_a$  和  $t_b$  分别是对应  $r = a$  和  $r = b$  时的参数.

将 (15) 式、(18) 式代入 (7) 式并考虑到边界条件 (11) 式, 则有

$$\left. \begin{aligned} \mu \left\{ 1 - \frac{\sqrt{C/D^2}}{\sqrt{h(t_a)(t_a^2 + t_a + 4)^{3/2}}} \right\} &= -p \\ \mu \left\{ 1 - \frac{\sqrt{C/D^2}}{\sqrt{h(t_b)(t_b^2 + t_b + 4)^{3/2}}} \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(19) 式、(20) 式中含有 4 个未知数  $t_a, t_b, C, D$ .

由 (19) 式中消去常数, 并设

$$g(t) = \frac{(t^2 + t + 4)(1 - t)^4}{t^6 h(t)}, \quad 0 < t < 1 \quad (21)$$

后有

$$\frac{a^8}{b^8} = \frac{g(t_b)}{g(t_a)} \quad (22)$$

从 (20) 式中消去  $C/D^2$ , 得

$$\left(1 + \frac{p}{\mu}\right)^2 = \frac{h(t_b)(t_b^2 + t_b + 4)^3}{h(t_a)(t_a^2 + t_a + 4)^3} \quad (23)$$

这样, 方程 (22) 和 (23) 中含有两个未知数  $t_a$  和  $t_b$ . 由 (21) 式可知, 当  $t \rightarrow 0$  时,  $g(t) \rightarrow \infty$ , 当  $t \rightarrow 1$  时,  $g(t) \rightarrow 0$ , 并且  $g(t)$  为  $t$  的单减函数, 因此, 对于给定的内外径比  $a/b$ , 总可以用  $t_a$  来表示  $t_b$ , 设

$$t_b = f(t_a, \alpha) \quad (24)$$

其中  $\alpha = a/b$ ,  $f$  为一未知函数.

从 (19) 式中第 1 式和 (20) 式中第 1 式求出  $D$  并将其代入 (18) 式则有

$$\frac{R(a)}{a} = t_a^{-3/4} \left(1 + \frac{p}{\mu}\right)^{-1/4} \quad (25)$$

### 3 讨论

当考虑薄壁管时, 内外径比  $\alpha \rightarrow 1$ , 这时  $\alpha$  可写成

$$\alpha = 1 + \varepsilon \quad (26)$$

其中  $\varepsilon = \frac{(b-a)}{a} (\ll 1)$ . 将 (26) 式代入 (24) 式展开并略去高阶小量后, 有

$$t_b = t_a + \varepsilon A(t_a) \quad (27)$$

其中  $A(t)$  为一未知函数.

将 (26) 式、(27) 式代入 (22) 式后并略去二阶以后的小量, 有

$$A(t) = \frac{1}{3}(t^2 + t + 4)(1 - t)t \quad (28)$$

将 (28) 式代入 (27) 式后有

$$t_b = t_a + \frac{\varepsilon}{3}(t^2 + t + 4)(1 - t)t \quad (29)$$

将 (29) 代入 (23) 式, 则得到  $t_a$  和内压力  $p$  之间关系的解析解

$$\frac{p}{\mu} = \varepsilon(t_a - t_a^3), \quad 0 < t_a < 1 \quad (30)$$

将 (30) 式代入 (25) 式并略去小量以后, 有

$$\frac{R(a)}{a} = t_a^{-3/4} \quad (31)$$

其中  $t_a$  可由 (30) 式通过  $p$  表示出来. 图 2 为薄壁圆管管径变化与内压力大小关系曲线. 从曲线图上可以看出, 对于给定的  $\varepsilon$ , 当内压力  $p$  增加时, 管径也增加, 当  $p = 0.385 \mu \varepsilon$ ,  $R(a) = 1.151a$  时, 到达极值点. 随后, 虽然  $R(a)$  继续增加, 内压  $p$  却下降了. 这种现象在有限弹性中是常常见的<sup>[2]</sup>.

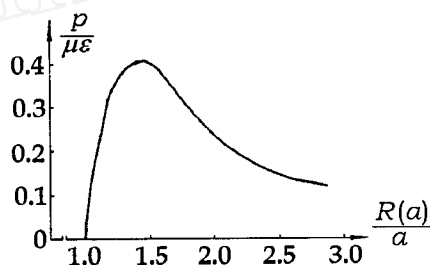


图 2 薄壁圆管管径与内压力关系曲线

### 参 考 文 献

- 1 Green A E, Zerna W. Theoretical Elasticity. Oxford: Oxford University Press, 1968
- 2 Ogden R W. Non-linear Elastic Deformations. New York: Halsted Press, 1984
- 3 Blaze P D, Ko W L. Application of finite elasticity to the deformation of rubbery materials. *Trans Soc Rheol*, 1961, 6: 233~251
- 4 曹光中, 徐志洪. 表面承受静水载荷下弹性半无限体表面稳定性分析. *应用数学和力学*, 1992, 13(1): 89~102

## FINITE DEFORMATION ANALYSIS OF A COMPRESSIBLE PRESSURIZED HOLLOW CYLINDER

XU Zhihong

(Nanjing University of Science and Technology,  
Nanjing 210014, China)

**Abstract** The plane finite deformation of pressurized thin wall hollow cylinder made of a kind of hyper-elastic material—Blaze-Ko material is analyzed and the analytic relationship between the radial deformation and the inner pressure is obtained. **Key words** finite deformation, hyper-elastic material, plane strain