教育研究

关于完整体系能量积分条件的讨论

刘　华

(河北建筑科技学院，邯郸 056038)

摘要　对理论力学教材中所给出的力学体系存在能量积分条件的各种表述进行归纳、比较、讨论，明确了哪种表述方法更完善.

关键词　力学体系，能量积分，机械能，坐标变换方程

一个完整的有势力学体系的哈密顿函数 H，何时为守恒量且等于体系的机械能？何时为守恒量但不等于体系的机械能？何时等于体系的机械能但不是守恒量……？这在不同教材中给出的条件不同. 归纳起来有：(1) 力学体系所受约束是否为稳定约束 [1]；(2) 坐标变换方程中是否显含时间 t[2]. 这两种表述是否一致？哪种表述方法更完美？下面对此进行分析、比较.

1　体系的哈密顿函数 H 等于恒量的条件

一般地力学体系的哈氏函数 H 是广义坐标 q_α，广义动量 P_α 和时间 t 的函数，即 $H=H(q_\alpha P_\alpha t)$. 取 H 的全微分并利用正则方程化简，则有 [2]

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{2}$$

比较式 (1) 、式 (2) 则

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3}$$

由式 (1) 知，若 $\dfrac{\partial H}{\partial t}=0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0$，从而得初积分 $H=$ 常量，这是一般教材中给出的结论. 实际上，由式 (2) 知，H 与 L 对 t 的依赖关系是相同的，即若 L 中不显含 t，则 H 中也必定不显含 t；反之亦然. 由式 (3) 知，若 $\dfrac{\partial L}{\partial t}=0$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0$，从而 $H=$ 恒量. 由此可得：体系的哈氏函数 H 为守恒量的条件是，该体系的拉氏函数 L 中不显含时间 t.

2　体系的哈密顿函数 $H=T+V$ 的条件

设坐标变换方程为 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_\alpha t)$，则体系动能

$$T=T_2+T_1+T_0 \tag{4}$$

1998-02-06 收到第 1 稿，1998-08-24 收到修改稿.

其中

$$T_2=\frac{1}{2}\Sigma\Sigma m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$$

$$T_1=\Sigma\Sigma m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\dot{q}_\alpha$$

$$T_0=\frac{1}{2}\Sigma m_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

由式 (4) 知，若 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}=0$(稳定约束)，则 $T=T_2$. 于是 $H=T+V$[2]；若 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\neq 0$，则 $T=T_2+T_1+T_0$，于是 $H=T_2-T_0+V$[2]，此时 $H\neq T+V$，可称为体系的广义能量. 由此可得：体系的哈氏函数 $H=T+V$ 的条件是，坐标变换与时间 t 无关.

3　体系的机械能 $E=$ 恒量的条件

一般地说，$L(q_\alpha\dot{q}_\alpha t)=T(q_\alpha\dot{q}_\alpha t)-V(q_\alpha t)$，则

$$\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial V}{\partial t} \tag{5}$$

由式 (5) 知，L 中是否显含 t，依赖于 T 、V 中是否显含 t. 若 L 中不显含 t，则要求 T 、V 中均不显含 t. 若 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}=0$，由式 (4) 知则一定有 $\dfrac{\partial T}{\partial t}=0$，若同时 $\dfrac{\partial V}{\partial t}=0$，则由式 (5) 知 $\dfrac{\partial L}{\partial t}=0$，$H$ 为守恒量且 $H=T+V$. 即此时体系机械能守恒；若 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\neq 0$，但满足 $\dfrac{\partial T}{\partial t}=0$，若同时 $\dfrac{\partial V}{\partial t}=0$，由式 (5) 知 $\dfrac{\partial L}{\partial t}=0$，考虑式 (3) 、式 (4)，则 H 为守恒量但 $H\neq T+V$ $(H=T_2-T_0+V)$. 即此时体系的广义能量守恒. 由此可得：体系的机械能守恒的条件是，势能函数和坐标变换方程中均不显含时间 t.

4　结　论

由以上讨论知，$H=$ 常量，$H=E, E=$ 常量不是一回事，各有各的条件，归纳起来为：

(1) 若 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}=0$，$\dfrac{\partial V}{\partial t}=0$，则 H 为守恒量，且 $H=T+V=E$，即体系机械能守恒；

(2) 若 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}=0$，$\dfrac{\partial V}{\partial t}\neq 0$，则 H 不是守恒量，但 $H=T+V=E$. 即体系机械能不守恒；

(3) 若 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\neq 0$，但 $\dfrac{\partial T}{\partial t}=0$，$\dfrac{\partial V}{\partial t}=0$，则 H 为守恒量，且 $H=T_2-T_0+V$. 即体系的广义能量守

恒；

(4) 若 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \neq 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial t} \neq 0$, 则 H 不是守恒量，但 $H = T_2 - T_0 + V$. 即体系的广义能量不守恒.

可见，$H =$ 恒量，$H = E, E =$ 恒量的条件是不同的：

(a) $H =$ 恒量的条件为 $L(H)$ 中不显含 t;

(b) $H = E$ 的条件为坐标变换与时间 t 无关；

(c) $E =$ 恒量的条件为保守系且坐标变换与 t 无关.

对于保守系，在稳定约束条件下，又选坐标变换与时间 t 无关，则以上结论 (a)、(b)、(c) 均成立；但只说是稳定约束，它不是 (b) 的充分条件 (要进一步要求坐标变换与 t 无关), 也不是 (a) 的必要条件.

例　一质量为 m 的质点被约束在半径为 R 的一光滑细圆环上运动. 若 (1) 圆环在水平面内绕定点 O 以角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$(方向垂直于平面) 转动 (图 1); (2) 圆环在竖直平面内以匀速 $\boldsymbol{v}_0$(方向平行环面) 竖直向上运动 (图 2). 试讨论质点 m 的 H 函数及机械能 E 的守恒情况.

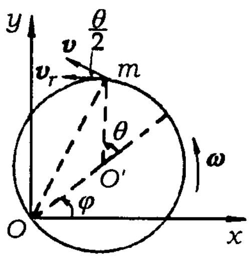

图 1

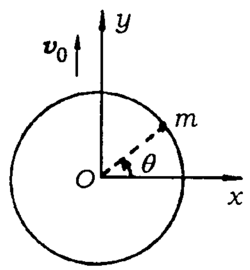

图 2

对于 (1), 质点受约束为不稳定约束，取 φ、θ 为广义坐标，则变换方程

$$x = R\cos\varphi + R\cos(\varphi + \theta)$$

$$y = R\sin\varphi + R\sin(\varphi + \theta)$$

其中 $\varphi = \displaystyle\int_0^t \omega(t)\mathrm{d}t + \varphi_0$ (φ_0 为初始角度). 此变换方程显含 $t\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \neq 0\right)$. 计算知

$$T = \frac{1}{2}m\left[R^2\dot{\theta}^2 + 4\omega\dot{\theta}R^2\cos^2\frac{\theta}{2} + 4\omega^2R^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right]$$

易见 $\dfrac{\partial T}{\partial t} \neq 0$, 虽有 $\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$, 但 $\dfrac{\partial L}{\partial t} \neq 0$, 即 H 既不守恒也不等于机械能；但若 $\omega =$ 常量，则 $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$, 易见，虽有 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \neq 0$, 但 $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$. 又有 $\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$, 故此时 H 为守恒量，且 $H = T_2 - T_0 + V = \dfrac{1}{2}m\left[R^2\dot{\theta}^2 - 4R^2\omega^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right] =$ 常量 (这里 $v = 0$).

对于 (2), 以地面为参考系，约束为不稳约束. 以 θ 为广义坐标，变换方程为

$$x = R\cos\theta, \qquad y = v_0t + R\sin\theta$$

其中显含 t, 且此时 v 也显含 t. 故 $H \neq$ 恒量且 $H \neq T + V$. 若以圆环为参考系 (惯性系), 约束为稳定，以 θ 为广义坐标，则变换方程为 $x = R\cos\theta$、$y = R\sin\theta$, 其中不显含 t. 易知此时 H 等于质点的机械能且为守恒量.

可见，力学体系所受约束是否为"稳定约束"与"坐标变换方程不显含 t"两种表述不是完全等同的. 因为约束是否为稳定，与参考系有关. 即使对同一参考系当选用不同广义坐标时，变换方程中可能显含 t 也可能不显含 t, 因而对同一力学体系写出的 H 函数及其守恒性质也可能有明显差别，只有对某一参考系 (一般为惯性系) 约束为稳定的且选取广义坐标与 t 无关时，本文开头所述两种表述方法 (1)、(2) 才是一致的.

因此，笔者认为，对文首所提问题，还是以"坐标变换方程中是否显含时间 t"这一条件给出更完善些.

参　考　文　献

1 周衍柏. 理论力学. 北京：高等教育出版社，1985

2 胡慧玲等. 理论力学基础教程. 北京：高等教育出版社，1986

3 卢圣治等. 用牛顿力学方法和分析力学方法分析机械能守恒条件时遇到的一些问题. 大学物理，1988(7): 1