****
* 研究简报 *
****

内时本构方程材料常数简易确定方法

杨运民　彭向和

(重庆大学力学系，重庆 400044)

摘要 提出确定内时塑性本构方程材料常数的一种简便直观的方法．在获得材料单向拉伸曲线之后，使用 Microsoft Excel 的规划求解功能快速确定弹性模量和内时本构常数，取得了令人满意结果，对推进内时本构理论在工程界的应用具有重要意义．

关键词 参数拟合，本构关系

1 引　言

K.C. Valanis 于 1980 年完善了他于 1971 年提出内蕴时间本构理论以来的 20 多年间，内时理论已得到了很大的发展，由最初只局限于均匀场，已发展为能解决复杂弹塑性应力场分析的有效工具．内时理论不以屈服面的概念作为其理论发展的基本前提，也不把屈服面作为其计算依据，从而避免了经典塑性理论在确定和应用屈服面时遇到的实验及数值计算中的困难，并可得到与实际情况更为吻合的结果．特别是 Peng 和 Fan[1] 的工作使计算精度和收敛性得到了很大的提高，使该理论体系更具应用价值．但是，迄今该理论在工程界尚未得到广泛的应用，其主要原因之一就是其材料常数的确定较繁琐 [2]，缺乏一个简便直观的工具，使人们对应用该理论存在畏惧心理．因此，提供一种简易方法以解决材料常数拟合问题对推进内时理论在工程界的应用具有十分重要的意义．

2 内时理论本构方程及材料常数拟合原理

在引入度量不可逆变形历史的内蕴时间后，可以得到材料的内时本构方程为

$$s_{ij}=\int_0^z \rho(z-z')\frac{\mathrm{d}e^p_{ij}}{\mathrm{d}z'}\mathrm{d}z' \qquad (1)$$

其中

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}\xi/f(z)$$

$$\mathrm{d}\xi=\|\mathrm{d}e^p_{ij}\|=\left\|\mathrm{d}e_{ij}-\frac{\mathrm{d}s_{ij}}{2\mu_0}\right\|$$

在工程应用中，具有弱奇异性的核心函数常取为

$$\rho(z)=\sum_{r=1}^{3}C_r e^{-\alpha_r z} \qquad (2)$$

1998-09-21 收到第 1 稿，1998-12-14 收到修改稿．

强化函数取为 [2]

$$f(z)=d+(d-1)e^{-\beta z} \qquad (3)$$

上述本构方程中除弹性常数外有 8 个材料常数 $C_1,C_2,C_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,d,\beta$ 需要确定．鉴于核心函数在 $z=0$ 的邻域从充分大迅速衰减，而在该区域强化函数变化十分缓慢的特点，可利用该区段的实验数据，取 $f(z)=1$，利用根据塑性不可压条件和式 (1) 得到的式

$$\sigma=\sqrt{\frac{3}{2}}\sum_{r=1}^{3}\frac{C_r}{a_r}\left[1-\exp\left(-a_r\sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon^p\right)\right] \qquad (4)$$

拟合得 $C_1,C_2,C_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$．进而利用经历较大程度塑性变形后的有关试验数据和下式

$$\sigma=\sqrt{\frac{3}{2}}\sum_{r=1}^{3}\frac{C_r}{a_r}\left\{d[1-\exp(-a_r z)]-\frac{(d-1)\alpha_r}{\alpha_r-\beta}[\exp(-\beta z)-\exp(-\alpha_r z)]\right\} \qquad (5)$$

拟合出 d,β．上式中 z 由下式决定

$$dz+\frac{1}{\beta}(d-1)\left[\exp(-\beta z-1)-\sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon^p\right]=0 \qquad (6)$$

3 Excel 参数拟合方法

Microsoft Excel 除了具有一般的计算，作图及单参数函数拟合功能外，还具有非常方便的规划求解功能，本文在此利用该功能对内时材料常数进行多参数拟合．设以通过材料的简单拉伸试验获得一组应力应变数据，则通过下述步骤可得有关部分参数：

1) 打开一 Excel 表，输入实验应力应变数据，见 A 区．

2) 利用公式 $\varepsilon^p=\varepsilon-\sigma/E$ 求出塑性应变，见 B 区．其中弹性模量 E 可用弹性阶段的两点数据求出，见 G 区．

3) 在表中适当位置分别定义 6 个变量 $C_1,C_2,C_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，并赋予初值，见 C 区．

4) 在新的一列上用 (4) 式计算理论预测应力，见 D 区．

5) 另起一列计算应力与实测应力之差的平方 (见 E 区), 并在适当位置定义一变量存储该列的和 (见 F 区), 用规划求解功能使该变量最小且满足 $C_i > 0, \alpha_i > 0$ ($i = 1,2,3$) 的 $C_1, C_2, C_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 便是内时理论材料常数的拟合结果, 与强化函数有关的 d, β 的拟合方法类似, 此处不再赘述.

6) 插入一个散点图, 并使用塑性应变作为横坐标, 用标定应力和预测应力作为纵坐标的两个系列, 拟合结果的好坏便可一目了然 (图 1). 以下为一示例 Excel 表 (表 1, 表 2), 数据取自文献 [3].

表 1

A 区		B 区	D 区	E 区
实测应变	实测应力	塑性应变	计算应力	应力差平方
ε	σ	$\varepsilon_p = \varepsilon - \dfrac{\sigma}{E}$	$\sigma_{计算} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \sum\limits_{r=1}^{3} \dfrac{C_r}{\alpha_r} \left[1 - \exp\left(-\alpha_r \sqrt{\dfrac{3}{2}} \varepsilon^p\right)\right]$	$(\sigma_{计算} - \sigma)^2$
0	0	0	0	0
0.0007	15	-3.2143E-05	14.663 77	0.113 047 3
0.0041	84	0	87.703 38	13.715 027
0.0051	104	2.380 95E-05	101.6879	5.345 73
0.0052	106	2.619 05E-05	102.593	11.607 636
0.0055	110.5	0.000 106 548	111.8111	1.719 009 9
0.0058	113.5	0.000 260 119	114.9279	2.038 937 4
0.0062	116.3	0.000 523 452	116.436	0.018 504 4
0.007	119.5	0.001 167 262	119.0487	0.203 698 4
0.0075	120.7	0.001 608 69	120.3661	0.111 506 3
0.0087	122.3	0.002 730 595	122.562	0.068 659 7
0.011	124.3	0.004 932 976	124.3538	0.002 894
0.012	124.8	0.005 908 571	124.6664	0.017 843 7

表 2

G	C			F
弹性模量 E	C_1	C_2	C_3	总偏差 $\Sigma(\sigma_{计算} - \sigma)^2$
20 487.805	3.80E+04	1.25E+04	4.54E+03	34.941 76
	α_1	α_2	α_3	
	4.24E+04	1.50E+03	4.53E+02	

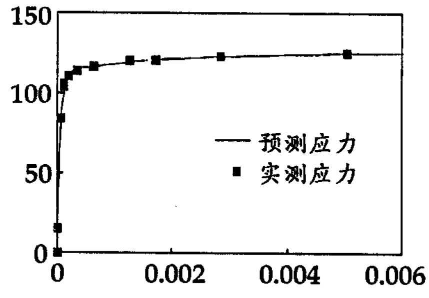

图 1

4 结 论

本文提出确定内时塑性本构方程材料常数的一种简便直观的方法. 该方法的优点是不需要复杂的编程, 拟合结果直观可见, 该表建立也只需几分钟时间, 而且一旦建立, 只要更改实测点对数据便可自动重新计算各列数据及图形显示, 非常方便且生动有趣, 能有效克服工程界对使用内时塑性理论的畏惧心理, 对于内时塑性理论在工程界的推广和应用有重要的意义.

参 考 文 献

1 Peng X, Fan J. A numerical approach for nonclassical plasticity, *Computers & Structure*. 1993, 47(2): 313~320

2 范镜泓, 高芝辉. 非线性连续介质力学. 重庆: 重庆大学出版社, 1983

3 曹纬. 厚壁圆桶自增强残余应力的分析和计算. 重庆大学硕士论文, 1984

AN EASY AND INTUITIONAL METHOD TO OBTAIN THE CONSTANTS OF ENDOCRONIC CONSTITUTIVE EQUATION

(下转第 54 页)

将 (4) 式代入 (6) 式得

$$\rho=\sqrt{1-16\exp\left(-\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\pi\right)} \tag{7}$$

由 (2) 式，(4) 式，(7) 式得

$$\delta=2L\sqrt{1-16\exp\left(-\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\pi\right)}\bigg/\left(\pi\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) \tag{8}$$

由数值计算知，(8) 式在杆端转角大于 90° 时，精确度很高，弥补了已有近似公式的不足，但在杆端转角小于 90° 时误差较大. 因此，本文建议，将 (5) 式和 (8) 式联合使用，即当杆端转角小于 90° 时，用 (5) 式，当杆端转角大于 90° 时用 (8) 式，来做为弹性屈曲杆大挠度计算的近似公式.

表 1 是本文的方法与已有近似公式的比较.

表 1　近似公式的误差比较表

α	10°	20°	30°	60°	90°	130°40′	150°	170°	175°	177°	179°
P/P_{cr}	1.0038	1.0154	1.0351	1.1517	1.3937	2.1820	3.1054	5.9505	8.2809	10.2537	15.2184
δ/L 精确值	0.0554	0.1097	0.1620	0.2966	0.3814	0.3917	0.3490	0.2600	0.2210	0.1987	0.1632
文 [2]δ/L 近似值	0.0555	0.1103	0.1637	0.3069	0.3796	0.0147	−0.9856	−6.2608	−12.3105	−18.3809	−34.0005
文 [3]δ/L 近似值	0.0553	0.1097	0.1619	0.2967	0.3825	0.4004	0.3653	0.2846	0.2465	0.2238	0.1865
文 [4]δ/L 近似值	0.0553	0.1097	0.1619	0.2966	0.3816	0.3944	0.3557	0.2725	0.2346	0.2123	0.1761
本文 δ/L 近似值	0.0553	0.1097	0.1619	0.2966	0.3816	0.3944	0.3496	0.2600	0.2210	0.1987	0.1632
文 [2] 相对误差 %	0.2	0.5	1.0	3.3	−0.5	−96.2	−382.4	−2508.0	−5670.4	−9350.6	20933.6
文 [3] 相对误差 %	−0.2	0.0	−0.1	0.0	0.3	2.2	4.7	9.5	11.5	12.6	14.3
文 [4] 相对误差 %	−0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.7	1.9	4.8	6.15	6.85	7.9
本文相对误差 %	−0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.7	0.14	0.0	0.0	0.0	0.0

4　结束语

从表 1 中可以看出，公式 (8) 在 $\frac{P}{P_{cr}}$ 大于 2 时，逼近效果非常好，若为了进一步提高精度，可令 $\lambda=\ln\left(\frac{4}{\sqrt{1-\rho^2}}\right), F(\rho)\approx\lambda+\frac{\lambda-1}{4}(1-\rho^2)$，逼近效果更好.

参　考　文　献

1 吴明德编. 弹性杆件稳定理论，北京：高等教育出版社，1988

2 刘传芬. 对材料力学中屈曲杆最大挠度的近似公式的改进. 力学与实践，1991, 13(6): 62～64

3 朱华满. 屈曲杆最大挠度的近似公式的再改进. 力学与实践，1994, 16(1):60～61

4 吴柏生，朴淑贤. Padé 逼近在力学中的应用. 力学与实践，1996, 18(1): 27～29

5 A. 科恩，M. 科恩著. 周民强等译. 数学手册. 北京：工人出版社，1997

AN APPROXIMATE CALCULATION FORMULA FOR SOLVING THE LARGEST DEFLECTION OF A BUCKLING ROD

XIE Changzhen

(Dept. of Phys., Xinyang Teacher's College, Xinyang 464000, China)

Abstract In this paper,an approximate calculation formula for solving the largest deflection of a buckling rod is given by using the expansion formula of elliptic integral of first kind. The formula has many advantages over existing ones.

Key words flection staff, largest deflection, elliptic integral of first kind

(上接第 52 页)

YANG Yunmin　PENG Xianghe

(Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract By taking advantage of the program solving function in Microsoft Excel, a method for the quick determination of endocronic constitutive equation of plasticity was proposed. The proposed method is easy and intuitional, and can therefore be extended to practical engineering application.

Key words curve fitting, constitutive equation, plasticity