# 非线性 MDWW 方程的对称约化和显式精确解 1)

闫振亚　　张鸿庆

(大连理工大学数学科学研究所，大连 116024)

**摘要**　借助 Mathematica，采用直接约化法获得 MDWW 方程的 3 种对称约化．经过一系列变换，将 MDWW 方程约化为著名的 1+1 维 Burgers 方程，进而得到 MDWW 方程更多形式的约化和若干精确解，其中包括孤波解．

**关键词**　MDWW 方程，Burgers 方程，直接约化法，对称约化，精确解

## 1 引　言

随着科学技术的不断发展和人们对自然现象的不断深入了解，很多意义重大的自然科学和工程技术总是都归结为非线性方程 (组)，特别是孤子方程的研究．过去很多不能解释的现象，现在通过研究对应的方程得到了准确的解答．如利用孤立子理论，已经成功地解释了在激光打靶中多年来用经典理论未能解释的[illegible]度坑问题以及红外线外移问题．

本文主要考虑下面孤子方程 ——MDWW 方程 [1,2]

$$u_t - \frac{1}{2}u_x v - \frac{1}{2}v_x u + \frac{1}{4}v_{xx} = 0 \tag{1a}$$

$$v_t + 2uu_x + \frac{1}{2}vv_x + u_{xx} = 0 \tag{1b}$$

在第二部分根据文献 [3,4] 中直接约化法的思想将这种方法灵活运用于系统 (1)，获得了 3 种对称约化．在第 3 部分通过一系列变换，将系统 (1) 约化为著名的 1+1 维 Burgers 方程，然后由文献 [4,5] 可获得系统 (1) 的另外 4 种单主元对称约化和若干精确解，其中包含孤波解．

## 2 系统 (1) 的对称约化

根据文献 [3,4] 的思想，对系统 (1) 作如下形式的变换

$$u(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)H(z(x,t)) \tag{2}$$

$$v(x,t) = a(x,t) + b(x,t)G(z(x,t)) \tag{3}$$

其中 $\alpha,\beta,a,b$ 为待定函数，$H(z)$ 和 $G(z)$ 为满足关于 $z$ 的待定常微分方程组．

1) 国家自然科学基金和国家攀登计划基金资助课题．

本文于 1998-05-11 收到．

借助 Mathematica，将式 (2)，式 (3) 代入式 (1a)，式 (1b)，整理得

$$\begin{aligned}
u_t - \frac{1}{2}uv_x - \frac{1}{2}u_x v + \frac{1}{4}v_{xx} = {}& \\
&\frac{1}{4}bz_x^2 G'' + \left(\frac{1}{2}b_x z_x + \frac{1}{4}bz_{xx} - \frac{1}{2}\alpha bz_x\right)G' + \\
&\left(\frac{1}{4}b_{xx} - \frac{1}{2}b\alpha_x - \frac{1}{2}\alpha b_x\right)G - \\
&\frac{1}{2}b\beta z_x(H'G + HG') + \left(-\frac{1}{2}b\beta_x - \frac{1}{2}\beta b_x\right)HG + \\
&\left(-\frac{1}{2}a\beta z_x + \beta z_t\right)H' + \left(-\frac{1}{2}a\beta_x - \frac{1}{2}\beta a_x + \beta_t\right)\cdot \\
&H + \frac{1}{4}a_{xx} + \alpha_t - \frac{1}{2}(\alpha a)_x = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
v_t + 2uu_x + \frac{1}{2}vv_x + u_{xx} = {}& \\
&\beta z_x^2 H'' + (2\beta_x z_x + \beta z_{xx} + 2\alpha\beta z_x)H' + \\
&(\beta_{xx} + 2\beta\alpha_x + 2\alpha\beta_x)H + 2\beta\beta_x H^2 + \\
&2\beta^2 z_x HH' + \frac{1}{2}b^2 z_x GG' + \frac{1}{2}bb_x G^2 + \\
&\left(b_t + \frac{1}{2}ab_x + \frac{1}{2}ba_x\right)G + \left(\frac{1}{2}abz_x + bz_t\right)G' + \\
&\alpha_{xx} + 2\alpha\alpha_x + \frac{1}{2}aa_x + a_t = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

令式 (4)，式 (5) 中的 $H,G$ 及其导数各种组合形式项的系数分别与 $H''$ 和 $G''$ 的系数之比仅为 $z$ 的函数，得

$$\frac{1}{2}b_x z_x + \frac{1}{4}bz_{xx} - \frac{1}{2}\alpha bz_x = bz_x^2 P_1(z) \tag{6.1}$$

$$\frac{1}{4}b_{xx} - \frac{1}{2}b\alpha_x - \frac{1}{2}\alpha b_x = bz_x^2 P_z(z) \tag{6.2}$$

$$-\frac{1}{2}b\beta z_x = bz_x^2 P_3(z) \tag{6.3}$$

$$-\frac{1}{2}b\beta_x - \frac{1}{2}\beta b_x = bz_x^2 P_4(z) \tag{6.4}$$

$$-\frac{1}{2}a\beta z_x + \beta z_t = bz_x^2 P_5(z) \tag{6.5}$$

$$-\frac{1}{2}a\beta_x - \frac{1}{2}\beta a_x + \beta_t = bz_x^2 P_6(z) \tag{6.6}$$

$$\frac{1}{4}a_{xx} + \alpha_t - \frac{1}{2}a\alpha_x - \frac{1}{2}\alpha a_x = bz_x^2 P_7(z) \tag{6.7}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$2\beta_x z_x + \beta z_{xx} + 2\alpha\beta z_x = \beta z_x^2 P_8(z) \tag{6.8}$$

$$\beta_{xx} + 2\beta\alpha_x + 2\alpha\beta_x = \beta z_x^2 P_9(z) \tag{6.9}$$

$$2\beta\beta_x = \beta z_x^2 P_{10}(z) \tag{6.10}$$

$$2\beta^2 z_x = \beta z_x^2 P_{11}(z) \tag{6.11}$$

$$\frac{1}{2}b^2 z_x = \beta z_x^2 P_{12}(z) \tag{6.12}$$

$$\frac{1}{2}bb_x = \beta z_x^2 P_{13}(z) \tag{6.13}$$

$$b_t + \frac{1}{2}ab_x + \frac{1}{2}ba_x = \beta z_x^2 P_{14}(z) \tag{6.14}$$

$$\frac{1}{2}abz_x + bz_t = \beta z_x^2 P_{15}(z) \tag{6.15}$$

$$\alpha_{xx} + 2\alpha\alpha_x + \frac{1}{2}aa_x + a_t = \beta z_x^2 P_{16}(z) \tag{6.16}$$

其中 $P_i(z)$ 仅为 $z$ 的函数 $(i = 1, 2, \cdots, 16)$ 且 $z_x \neq 0$.

根据直接约化规则 (这里不再详叙，请参阅文献 [3,4]) 对上述式 (6.1)～ 式 (6.16) 进行求解，得

$$\begin{aligned}
&P_1 = P_2 = P_4 = P_5 = P_6 = P_7 = P_8 = P_9 = \\
&P_{10} = P_{13} = 0\,,\ P_3 = -\frac{1}{2}\,,\ P_{11} = 2\,,\ P_{12} = \frac{1}{2}\,, \\
&P_{14} = 2A\,,\ P_{15} = 2Az + 2B\,,\ P_{16} = 6A^2 Z + 6AB \\
&z(x,t) = \phi(t)x + \lambda(t)\,,\ \alpha = 0\,,\ b = \beta = \phi(t)\,, \\
&a = \frac{2}{\phi}(\phi_t x + \lambda_t)\,,\ \phi_t = A\phi^3\,, \lambda_t = A\lambda\phi^2 + B\phi^2
\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $A, B$ 为任意常数.

下面分情况讨论. 通过求解式 (7), 得

**情形 1**　$A = 0, B \neq 0, \phi(t) = C_1, \lambda(t) = C_1^2 Bt + C_2$. 将 $P_i(i = 1, 2, \cdots, 16)$ 的值代入式 (4), 式 (5) 可得系统 (1) 的约化

$$\begin{aligned}
&u(x,t) = C_1 H(z)\,,\ v(x,t) = 2C_1 B + C_1 G(z) \\
&z(x,t) = C_1 x + C_1^2 Bt + C_2 \\
&G'' - 2H'G - 2HG' = 0 \\
&H'' + 2HH' + \frac{1}{2}GG' + 2BG' = 0
\end{aligned}$$

**情形 2**　$A \neq 0, B = 0$, $\phi(t) = (C_3 - 2At)^{-\frac{1}{2}}$, $\lambda(t) = C_4(C_3 - 2At)^{-\frac{1}{2}}$. 同理得系统 (1) 的一种约化

$$\begin{aligned}
&u(x,t) = (C_3 - 2At)^{-\frac{1}{2}} H(z) \\
&v(x,t) = \frac{2A(x + C_4)}{C_3 - 2At} + (C_3 - 2At)^{-\frac{1}{2}} G(z) \\
&z(x,t) = x(C_3 - 2At)^{-\frac{1}{2}} + C_4(C_3 - 2At)^{-\frac{1}{2}} \\
&G'' - 2H'G - 2HG' = 0 \\
&H'' + 2HH' + \frac{1}{2}GG' + 2AG + 2AZG' + 6A^2 z = 0
\end{aligned}$$

**情形 3**　$A \neq 0, B \neq 0$, $\phi(t) = (C_5 - 2At)^{-\frac{1}{2}}$, $\lambda(t) = -\frac{B}{A}$. 同理得系统 (1) 的一种约化

$$\begin{aligned}
&u(x,t) = (C_5 - 2At)^{-\frac{1}{2}} H(z) \\
&v(x,t) = 2Ax + (C_5 - 2At)^{-\frac{1}{2}} G(z) \\
&z(x,t) = x(C_5 - 2At)^{-\frac{1}{2}} - \frac{B}{A} \\
&G'' - 2H'G - 2HG' = 0 \\
&H'' + 2HH' + \frac{1}{2}GG' + 2AG + (2Az + 2B)G' + \\
&\quad 6A^2 z + 6AB = 0
\end{aligned}$$

其中 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ 为相应的常数.

## 3　系统 (1) 的单主元对称约化和精确解

对系统 (1) 作如下形式的变换

$$\begin{aligned}
&u(x,t) = \frac{1}{2}w(\bar{x}, \bar{t})\,,\ v(x,t) = w(\bar{x}, \bar{t})\,, \\
&x = \frac{1}{2}\bar{x}\,,\ t = \frac{1}{2}\bar{t}
\end{aligned} \tag{8}$$

则系统 (1) 约化为著名的 1+1 维 Burgers 方程

$$w_{\bar{t}} + ww_{\bar{x}} + w_{\bar{x}\bar{x}} = 0 \tag{9}$$

根据文献 [4] 中用直接约化法对方程 (9) 的约化及变换 (8), 得系统 (1) 以下 4 种对称约化

i) $u(x,t) = \frac{1}{2}\phi(z) - 2Bt - \frac{1}{2}C_1$

$$\begin{aligned}
&v(x,t) = \phi(z) - 4Bt - C_1 \\
&z(x,t) = 2x + 4Bt^2 + 2C_1 t + C_2 \\
&\phi'' + \phi\phi' - 2B = 0
\end{aligned}$$

ii) $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{2t}}\phi(z) + \frac{x}{4t} - \frac{1}{4}C_3$

$$\begin{aligned}
&v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2t}}\phi(z) + \frac{x}{2t} - \frac{1}{2}C_3 \\
&z(x,t) = \sqrt{2/t}\,x + C_3\sqrt{2t} \\
&\phi'' + \phi\phi' - \frac{1}{4}z = 0
\end{aligned}$$

iii) $u(x,t) = \frac{1}{4t}\phi(z) + \frac{x}{2t} + \frac{B}{4t^2}$

$$v(x,t) = \frac{1}{2t}\phi(z) + \frac{x}{t} + \frac{B}{2t^2}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$z(x,t)=\frac{x}{t}+\frac{B}{4t^2}$$

$$\phi''+\phi\phi'-2B=0$$

iv) $$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{4t^2\pm 1}}\phi(z)+\frac{4xt-C_4}{2(4t^2\pm 1)}$$

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4t^2\pm 1}}\phi(z)+\frac{4xt-C_4}{4t^2\pm 1}$$

$$z(x,t)=(2x+2C_4t)/(4t^2\pm 1)$$

$$\phi''+\phi\phi'+z=0$$

其中 $C_1, C_2, C_3, C_4, B$ 为任意常数.

又据文献 [5] 提供的方法及对方程 (9) 求解 (因篇幅有限这里不再详述), 得方程 (9) 两组解

$$w(\bar{x},\bar{t})=A_0+A_1\text{th}\frac{A_1}{2}(\bar{x}-A_0\bar{t}+C) \tag{10}$$

$$w(\bar{x},\bar{t})=A_0+A_1\exp\{\pm\text{i}\sin^{-1}\text{sh}[-A_1(\bar{x}-A_0\bar{t}+C)]\} \tag{11}$$

其中 $A_0, A_1, C$ 为任意常数, $\text{i}^2=-1$.

由 (8) 式, (10) 式, (11) 式得系统 (1) 两组有意义的解, 其中包括一组孤波解和一组新的显式精确解

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}A_0+\frac{1}{2}A_1\text{th}A_1(x-A_0t+C)$$

$$v_1(x,t)=A_0+A_1\text{th}A_1(x-A_0t+C)$$

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2}A_0+\frac{1}{2}A_1\exp\{\pm\text{i}\sin^{-1}\text{sh}[-2A_1(x-A_0t+C)]\}$$

$$v_2(x,t)=A_0+A_1\exp\{\pm\text{i}\sin^{-1}\text{sh}[-2A_1(x-A_0t+C)]\}$$

## 4 结 论

本文用直接约化法及一系列变换获得系统 (1) 很多约化, 这为进一步求解方程带来很大的方便, 比经典的 Lie 群约化法更有效. 顺便指出, 这种有效的方法适合于很多非线性方程, 特别是孤子方程. 在孤立子理论中有很大价值.

## 参 考 文 献


1 Zha Z W et al. A finite dimensional completely integrable system and the involutive representation of solutions of MDWW equation. 应用数学, 1996, 9(1): 15~22

2 Kupershmidt B A. Mathematics of dispersive water waves. *Comm Math Phys*, 1985, 99(1): 51~73

3 阮航宇等. Whitham-Broer-Kaup 浅水波方程的对称性约化. 物理学报, 1992, 41(8): 1213~1221

4 Clarkson P A et al. New similarity reductions of the boussinesq equation. *J Math Phys*, 1989, 30(10): 2201~2212

5 Yan C T. A simple transformation for nonlinear waves. *Phys Lett A*, 1996, 224: 77~84


## SYMMETRY REDUCTIONS AND EXPLICIT EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR MDWW EQUATIONS


YAN Zhenya ZHANG Hongqing

(Institute of Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)



**Abstract** First, with the help of Mathematica, three kinds of reductions of MDWW equations are obtained by using direct reduction method. Second, MDWW equations are reduced to Burgers Equations by a series of transformations. Therefore, more reductions and some exact solutions which include soliton solution are obtained.



**Key words** MDWW equations, Burgers equation, direct reduction method, symmetry reduction, exact solution


(上接第 77 页)

证明: 如果 $C^*$ 是瞬时加速度中心, 对刚体上任意的 $M$ 点, 则应满足两点:

(1) $\alpha=\tan^{-1}\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}=\text{const}_1$

(2) $\dfrac{a_M}{MC^*}=\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}=\text{const}_2$

因此, 只要证明了 $\Delta AA'C^*$ 与 $\Delta BB'C^*$ 相似, 上面两点就可满足, 亦即证明了 $C^*$ 为瞬时加速度中心.

因为 $A, B, D, C^*$ 共圆, 所以 $\angle A'AC^*=\angle B'BC^*$ 即满足 (1).

因为 $A', B', D, C^*$ 共圆, 所以 $\angle DA'C^*=\angle DB'C^*$, $\angle AA'C^*=\angle BB'C^*$.

因为 $\Delta AA'C^*$ 与 $\Delta BB'C^*$ 中有两个角相等, 所以 $\Delta AA'C^*$ 与 $\Delta BB'C^*$ 相似.

因为 $\dfrac{AA'}{AC^*}=\dfrac{BB'}{BC^*}$, 即满足 (2), $C^*$ 为瞬时加速度中心.

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net