

带分支变截面平面刚架静力分析的传递矩阵法

刘庆泽

(长沙铁道学院数力系, 长沙 410075)

摘要 介绍具有分支结构的变截面刚架在进行静力分析时的传递矩阵法. 实例计算证明了该方法具有精确度高、简便易行的优点, 适于工程技术人员在微机上的应用.

关键词 分支, 变截面, 刚架, 传递矩阵

刚架是工程上常见的一种结构. 对于变截面刚架而言, 通常可用一多段的阶梯状杆来近似进行计算, 但只能得到近似解. 本文构造了含有楔形变截面杆在弯曲和拉(压)联合作用时的传递矩阵, 并引入了分支点的传递矩阵. 求得了带分支的楔形变截面平面刚架在静载作用下的精确解. 该方法具有精确度高、简便易行的优点, 适于工程技术人员在微机上的应用.

1 楔形变截面杆在弯曲和拉(压)时的传递矩阵

对于图1所示的楔形变截面杆, 横截面的宽度 b 不变, 高度 h 沿轴线成线性变化, 横截面的惯性矩可表示为 $I(x) = \frac{b}{12}(h_0 + Kx)^3$, 其中, $K = (h_L - h_0)/L$. 载荷 $q(x)$ 可表示为 $q(x) = q_0 + K_q x$, 其中, $K_q = (q_L - q_0)/L$. 对于弯曲变形而言, 由平衡条件可得微分方程

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right] = q_0 + K_q x \quad (1)$$

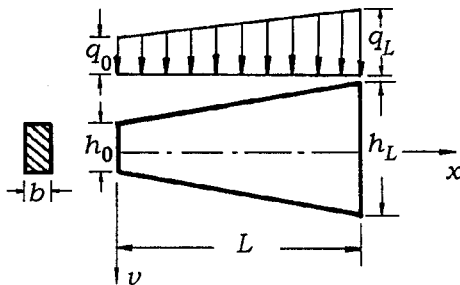


图1

令 $\zeta = bE/12$, $X = h_0 + Kx$, $\eta = q_0/\zeta K^4$, $\xi = K_q/\zeta K^5$, 式(1)可简化成

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(X^3 \frac{d^2 v}{dX^2} \right) = \eta + \xi(X - h_0) \quad (2)$$

求得该方程的解为

$$v = C_1 + C_2 X + C_3 X^{-1} + C_4 \ln X + \frac{\eta - \xi h_0}{2} (X \ln X - X) + \frac{\xi X^2}{12} \quad (3)$$

进而可求得楔形梁段的传递矩阵关系式

$$\begin{bmatrix} v \\ \theta \\ M \\ Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{h_0 - X}{K} & \frac{2h_0^{-1} - h_0^{-2}X - X^{-1}}{2\zeta K^2} \\ 0 & 1 & \frac{h_0^{-2} - X^{-2}}{2\zeta K} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_v \\ F_\theta \\ F_M \\ F_Q \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ Q_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(4)中的 5×5 阶的方阵, 即楔形杆在弯曲时的传递矩阵. 式中

$$\begin{aligned} F_v &= X(\eta - \xi h_0)(\ln X - \ln h_0)/2 + \\ & (\eta h_0 - \xi h_0^2/2)(\ln X - \ln h_0) + \\ & (X - h_0)(3\xi h_0 - 5\eta)/4 + \\ & (X^{-1} - h_0^{-1})(\eta h_0^2/4 - \xi h_0^3/12) + \\ & \xi(X^2 - h_0^2)/12 \\ F_\theta &= K(\eta - \xi h_0)(\ln h_0 - \ln X)/2 - K\xi h_0/4 + \\ & 3K\eta/4 + KX^{-2}(\eta h_0^2/4 - \xi h_0^3/12) - \\ & X^{-1}K(\eta h_0 - \xi h_0^2/2) - K\xi X/6 \\ F_M &= K^2 X(\zeta \eta h_0 - \zeta \xi h_0^2/2) - \\ & \zeta K^2 X^2(\eta - \xi h_0)/2 - \zeta K^2 \xi X^3/6 - \\ & \zeta K^2 \eta h_0^2/2 + \zeta K^2 \xi h_0^3/6 \end{aligned}$$

本文于 1998-06-26 收到.

$$F_Q = \zeta K^3 \eta h_0 - \zeta K^3 \xi h_0^2 / 2 - \zeta K^3 X (\eta - \xi h_0) - \zeta K^3 \xi X^2 / 2$$

对于图 1 所示的楔形杆，当其承受轴向拉力 N 时，不难得到

$$\begin{bmatrix} u \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{EbK} \ln \left(1 + \frac{Kx}{h_0} \right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ N_0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

对于刚架上任一段楔形杆而言，一般既承受弯矩，同时还受轴向力作用，由式 (4) 和式 (5) 即可组成这种情况下的传递矩阵。

2 等截面杆在弯曲和拉 (压) 时的传递矩阵

令 $K \rightarrow 0$ 应用罗彼塔法则 (L'Hospital)，即可得等截面杆在弯曲和拉 (压) 时的传递矩阵。

3 坐标转换矩阵

对于图 2 所示的折杆，在转折点 j 处的状态向量有如下的传递关系

$$S_j^R = T_j S_j^L \quad (6)$$

其中

$$S_j = [u \ v \ \theta \ N \ Q \ M \ 1]_j^T$$

$$T_j = \begin{bmatrix} W & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵 T_j 即为坐标转换矩阵。

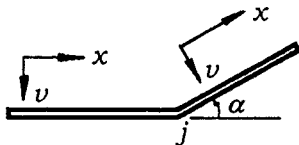


图 2

4 分支点处的传递矩阵

设在主梁 ip 的 j 处接有一分支梁 mj ，如图 3 所示。分支梁内初始端 m 到末端 j 的状态向量传递关系为

$$\tilde{S}_j = \tilde{U} \tilde{S}_0 \quad (7)$$

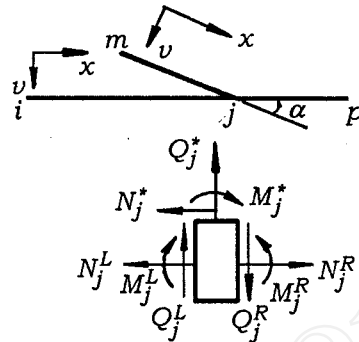


图 3

其中的“ \sim ”记号，表示为用分支梁的坐标系，为转换成主梁的坐标系，采用式 (6) 可得

$$S_j^* = T \tilde{S}_j = T \tilde{U} \tilde{S}_0 \quad (8)$$

令 $U^* = T \tilde{U}$ ，则

$$S_j^* = U^* \tilde{S}_0 \quad (9)$$

式中的 U^* 和 S_j^* 分别为用主梁坐标系表示的分支梁总体传递矩阵和 j 处的状态向量。记 $S_0 = [u \ v \ \theta]^T$ ， $S_j = [N \ Q \ M]^T$ ，则式 (9) 又可写成

$$\begin{bmatrix} S_0^* \\ S_j^* \\ 1 \end{bmatrix}_j = U^* \begin{bmatrix} \tilde{S}_0 \\ \tilde{S}_j \\ 1 \end{bmatrix}_0 \quad (10)$$

注意到分支梁的初始状态向量中总有三个状态变量为零，而另外三个未知，设其为 \tilde{S}_{0l} ， \tilde{S}_{0m} 和 \tilde{S}_{0n} ($\tilde{S}_{0l}, \tilde{S}_{0m}, \tilde{S}_{0n} = u, v, \theta, N, Q, M$)，并记 $\tilde{S}_{0x} = [\tilde{S}_{0l} \ \tilde{S}_{0m} \ \tilde{S}_{0n}]^T$ ，则式 (10) 化为

$$\begin{bmatrix} S_0^* \\ S_j^* \\ 1 \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} U_\Delta^* & U_\delta^* \\ U_F^* & U_f^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{S}_{0x} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中

$$U_\delta^* = [U_{uF}^* \ U_{vF}^* \ U_{\theta F}^*]^T$$

$$U_f^* = [U_{NF}^* \ U_{QF}^* \ U_{MF}^*]^T$$

U_Δ^* 和 U_F^* 均为 3×3 的方阵，由 U^* 中取出仅和 \tilde{S}_{0x} 有关的元素构成。这样，由式 (11) 可得

$$[S_0^*]_j = U_\Delta^* \tilde{S}_{0x} + U_\delta^* \quad (12)$$

$$[S_j^*]_j = U_F^* \tilde{S}_{0x} + U_f^* \quad (13)$$

由式 (12) 得

$$\tilde{S}_{\alpha\alpha} = [U_{\Delta}^*]^{-1}([S_{\delta}^L]_j - U_{\delta}^L) \quad (14)$$

代入式 (13) 得

$$[S_{\delta}^R]_j = U_F^*[U_{\Delta}^*]^{-1}([S_{\delta}^L]_j - U_{\delta}^L) + U_j^L \quad (15)$$

注意到图 3 中分支点 j 处的变形协调关系和力的平衡关系, 可得

$$[S_{\delta}^L]_j = [S_{\delta}^R]_j = [S_{\delta}^L]_j \quad (16)$$

$$[S_{\delta}^R]_j = [S_{\delta}^L]_j + [S_j^L] \quad (17)$$

于是式 (15) 化为

$$[S_{\delta}^R]_j = U_F^*[U_{\Delta}^*]^{-1}([S_{\delta}^L]_j - U_{\delta}^L) + U_j^L \quad (18)$$

令 $K = U_F^*[U_{\Delta}^*]^{-1}$, $B = -KU_{\delta}^L + U_j^L$, 则式 (18) 可写成

$$[S_{\delta}^R]_j = K[S_{\delta}^L]_j + B \quad (19)$$

将其代入式 (17) 得

$$[S_{\delta}^R]_j = [S_{\delta}^L]_j + K[S_{\delta}^L]_j + B \quad (20)$$

同时考虑式 (16) 及 (20), 并合写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} S_{\delta}^R \\ S_j^L \\ 1 \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} I & 0' & 0'' \\ K & I & B \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{\delta}^L \\ S_j^L \\ 1 \end{bmatrix}_j \quad (21)$$

其中 I 为 3×3 阶的单位矩阵, K 为 3×3 阶的方阵, B 为 3×1 阶的载荷列向量, $0'$ 为 3×3 阶的

零矩阵, 0 为 1×3 阶的零矩阵, $0''$ 为 3×1 阶的零矩阵. 式 (21) 的简单形式可写成

$$S_j^R = \bar{U} S_j^L \quad (22)$$

式 (22) 中的方阵 \bar{U} 即为分支点处的传递矩阵.

传递矩阵法的求解过程及有集中载荷作用处、弹性支座和中间铰处的点矩阵, 在文献 [1] 中已有详尽说明, 此处不再赘述.

5 算 例

变截面平面刚架如图 4 所示. 各杆横截面均为矩形, 除两侧的等截面杆外, 其余各杆均为楔形杆. 等直杆横截面的高均为 0.15 m, 楔形杆小端和大端横截面的高分别为 0.15 m 和 0.2 m, 各杆横截面的宽均为 0.1 m.

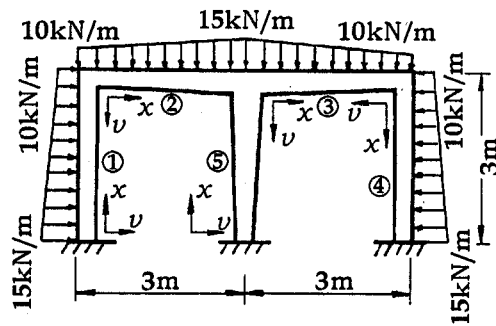


图 4

该刚架可分成 5 段, 将其中第 5 段作分支, 用本文方法算得结果如表 1.

表 1

No.	u^L/m	u^R/m	v^L/m	v^R/m	θ^L/rad	θ^R/rad
1	0.000e+00	-.167e-04	0.000e+00	1.459e-05	0.000e+00	8.189e-05
2	1.459e-05	1.051e-11	1.667e-05	3.596e-05	8.189e-05	7.473e-11
3	1.051e-11	-.146e-04	3.596e-05	1.671e-05	7.473e-11	-.819e-04
4	1.671e-05	4.246e-08	1.459e-05	3.506e-07	-.819e-04	-.184e-06
5	-.180e-17	-.360e-04	-.455e-09	1.051e-11	-.553e-09	7.473e-11
No.	N^L/N	N^R/N	Q^L/N	Q^R/N	M^L/Nm	M^R/Nm
1	-.167e+05	-.167e+05	2.059e+04	-.169e+05	-.101e+05	-.833e+04
2	-.169e+05	-.169e+05	1.667e+04	-.208e+05	-.833e+04	-.108e+05
3	-.169e+05	-.169e+05	2.083e+04	-.167e+05	-.108e+05	-.833e+04
4	-.167e+05	-.167e+05	1.691e+04	-.206e+05	-.833e+04	-.101e+05
5	-.417e+05	-.417e+05	-.461e-03	-.461e-03	2.387e-03	1.004e-03

在上面的计算结果中, u^L 、 v^L 、 θ^L 、 N^L 、 Q^L 和 M^L 分别为每段梁在其自身的坐标系下左端的水平位移、竖直位移、转角、轴力、剪力和弯矩; u^R 、 v^R 、 θ^R 、 N^R 、 Q^R 和 M^R 分别为梁右端相应的位移分量和内力分量. 由前面的叙述不难看出, 在整个的计算过程中只用到有限个初等函数的运算, 故最后所得到的结果为精确解.

参 考 文 献

- 1 刘庆潭, 倪国荣. 结构分析中的传递矩阵法. 北京: 中国铁道出版社, 1997

THE TRANSFER MATRIX METHOD FOR THE STATICS ANALYSIS OF

PLANE FRAME WITH VARIABLE SECTION AND BRANCH

LIU Qingtan

(Department of Mathematics and Mechanics, Changsha Railway University, Changsha 410075, China)

Abstract The transfer matrix method for the statics analysis of plane frame with variable section and branch is introduced. Through actual calculations, the method proves to be accurate, simple, practical, and may be used in microcomputer by engineers and technicians.

Key words branch, variable section, plane frame, transfer matrix method

两种材料契合弹性力学问题的虚边界元-配点法

张立洲 郑文明

(辽宁工学院建工系, 锦州 121001)

摘要 提出两种材料契合弹性力学问题的虚边界元-配点法. 对于材料不同的区域分别采用各自的基本解, 这样就避免了一般边界元采用 Hetenyi's 基本解的局限性和麻烦. 编制相应程序, 通过实例将计算结果同理论解进行了比较, 表明该方法是非常有效的.

关键词 虚边界元, 配点法, 弹性力学, 边界元

1 引 言

不同材料契合物体在实际工程中得到普遍应用, 如岩土水工工程地下洞室等表现为无界场问题和应力集中问题. 对机械结构尤其是含孔口的不同材料契合构件, 其不同材料交界面上应力状态的计算更具有理论及工程应用的双重意义. 边界元法具有降低所求问题维数, 适宜于处理半无限、无限域问题, 应力集中问题等诸多优良特性而得到迅速发展, 但由于解的奇异性使得对契合界面附近位移和应力的计算精度极低. 文 [3] 对此类问题采用 Hetenyi's 基本解的边界元法进行了研究, 但该方法在边界附近精度低, 而且适用范围很有限, 受到契合边界只能是直线 (二维) 或平面 (三维) 的限制. 本文针对上述问题进行了研究, 建立了求

解不同材料契合弹性力学问题的虚边界元配点法, 充分发挥虚边界元法, 因采用边界延拓技术, 完全避免了奇异积分, 从而使得在计算边界及其附近区域解的精度得到提高. 解决了不同材料契合界面附近区域的计算精度问题. 算例表明了该方法的有效性.

2 两种材料契合弹性力学的虚边界元-配点法

考虑由两种不同材料构成的物体, 如图 1 所示, Ω_1, Ω_2 分别为两种材料所占的子区域; 弹性模量和泊松比分别为 E_1, E_2 和 ν_1, ν_2 ; Γ_1, Γ_2 和 Γ_c 分别为两个子域 Ω_1 和 Ω_2 的边界和契合边界; Γ_{f1}, Γ_{f2} 分别为两个子域的给定外力的边界; Γ_{u1} 和 Γ_{u2} 分别为两个子域的给定位移的边界. $\Gamma_1 \supseteq \Gamma_{u1} \cup \Gamma_{f1} \cup \Gamma_c$, $\Gamma_2 \supseteq \Gamma_{u2} \cup \Gamma_{f2} \cup \Gamma_c$. 首先分离 Ω_1, Ω_2 , 并分别经过边界 Γ_1, Γ_2 的延拓, 得到“弹性区域” Ω'_1, Ω'_2 , 其边界分别为 Γ'_1, Γ'_2 . 将经过延拓后的弹性有限区域分别嵌入到一个与各自材料相同, 已知其平衡方程的格林函数的无限域中, 得到想象中的无限大弹性区域 (图 1, 图 2). 在 Γ'_1 和 Γ'_2 上分别作用待定的分布体力 $\Phi^{(1)}(\zeta)$, $\Phi^{(2)}(\zeta)$, 它们可以通过一定方式满足 Γ_1, Γ_2 上的边界条

1998-05-11 收到第 1 稿, 1998-09-24 收到修改稿.