

柔性多体系统动力学 STIFF 微分方程 数值积分方法适用性分析

王艺兵 潘振宽 孙海涛

(青岛大学计算中心, 青岛 266071)

摘要 柔性多体系统动力学微分方程都存在不同程度的 STIFF, 本文通过大量数值实验分析了儿种常用数值积分方法, 如四阶 Runge-Kutta 法、Trenor 法、A dam s 法、Gear 法及 Newmark 法对处理不同 STIFF 程度的适用性, 得到了一些有意义的结论

关键词 柔性多体, STIFF 微分方程, 数值研究

引言

用较相对坐标和模态坐标建立柔性多体系统动力学方程时, 对于树状系统, 结果为一组用最少数目坐标表达的纯微分方程组, 对于含闭环的系统, 结果为一组数目较少的微分/代数混合方程组^[4]。当系统运行时, 由于慢变的物体大位移运动同相对快变的弹性变形间的耦合作用, 造成柔性多体系统动力学方程数值积分的 STIFF。对 STIFF 微分方程的数值积分方法的研究在计算数学领域已给予充分重视^[1], 但针对复杂多体系统的研究则不多见。我们认为可据物理系统的 STIFF 程度选择不同的积分方法, 为此, 对目前常用的儿种不同的微分方程数值积分方法在不苛求它们设计过程的前提下, 针对一典型的物理系统, 考察他们处理 STIFF 问题的能力, 为这些方法在不同程度柔性多体系统动力学方程数值积分中的应用提供参考。

本文比较的方法有四阶 Runge-Kutta 法、Trenor 法、A dam s 法、Gear 法^[2]、Newmark 法, 选用的实验模型为理想的双自由度弹性摆系统。用摆的转角模拟多体系统中的慢变运动, 用其中弹簧模拟多体系统中的弹性变形。通过调整两类运动的固有频率人为制造不同程度的 STIFF 情形, 通过大量实验观测积分步长选取同系统固有病态的关系。

1 数值实验

图 1 为由无质量弹簧与有质量质点构成的两自由度弹性摆。假定弹簧仅发生线弹性变形, 其弹性常数为 k , 在系统静止时, 弹簧长度 l , 图中 x 表示弹性位移, m 为质点质量。系统动力学方法为

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 - (1 + q_1) \ddot{q}_2 + \omega_2^2 (1 - \alpha s q_2) = 0$$

$$\ddot{q}_2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 / (1 + q_1) + \omega_2^2 \sin q_2 / (1 + q_1) = 0$$

式中, $q_1 = x/l$, $q_2 = \theta$, $\omega_1^2 = k/m$, $\omega_2^2 = g/l$, ω 为 0 时对应的弹簧振子的固有频率, ω_2 为假设弹簧永不变形时对应的单摆的固有频率。引进 $\alpha = \omega_1/\omega_2$, α 的不同的取值能粗略地表示系统的不同病态程度。

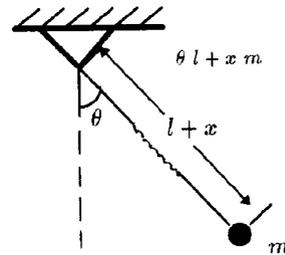


图 1

以下固定 $\omega = 2Hz$, 并依次增大 α 值, 即人为制造系统不同的病态程度, 考察儿种常用方法对 STIFF 问题数值积分的适用能力。为此, 分别取 $\alpha = 2, 10, 100, 1000$, 积分步长遵循这样的选取原则, $T = 2\pi/\beta\omega_{\max}$, ($\beta \geq 20$) (不同的 β 值对应着不同的积分步长), ω_{\max} 为系统最高固有频率, 即, $\omega_{\max} = \max(\omega_1, \omega_2)$ 。对上述 4 种情形, 各种计算方法计算过程发散情形如下表。

方法	α			
	2	10	100	1000
Runge-Kutta	$\beta > 100$	发散	发散	发散
Trenor	$\beta > 20$	$\beta > 100$	发散	发散
Newmark	$\beta > 100$	$\beta > 100$	$\beta > 100$	发散
A dam s	$\beta > 20$	$\beta > 100$	$\beta > 100$	发散
Gear	$\beta > 20$	$\beta > 20$	$\beta > 20$	$\beta > 20$

2 结论

上述大量数值计算表明, 在系统病态程度相同的情况下, 显式单步四阶 Runge-Kutta 方法与 Newmark 方法往往需要较小的步长方能得到理想的结果。随着

(下转第 48 页)

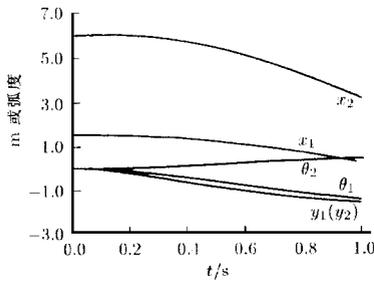


图2 杆的坐标-时间曲线图

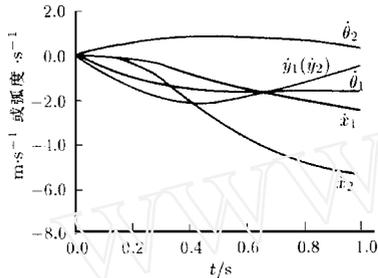


图3 杆的速度-时间曲线图

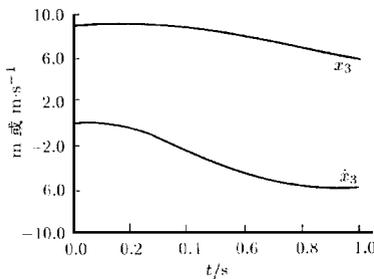


图4 滑块位置、速度-时间曲线图

属于双基研究法中的一种。这种方法不仅适合于多体系统的各种建模方法,而且物理概念非常明确,是加速度投影方法^[8]的一种发展。经上机实践表明,这是对约束多体系统进行动力学分析其效益较好的一种方法。显然,本文所提出的算法也适用于受线性齐次非

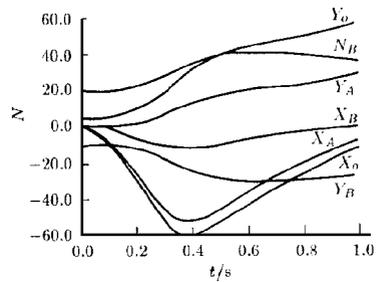


图5 约束反力-时间曲线图

完整约束的多体系统

参考文献

- 1 Blajer W, Schiehlen W, Schim W. A projective criterion to coordinate partitioning method for multibody dynamics *Arch App Mech*, 1994, 64(2): 86~ 98
- 2 水小平. 零空间在多体系统动力学中的应用. 北京理工大学学报, 1991, 11(3): 12~ 17
- 3 水小平. 奇异值分解对多体系统动力学方程的缩并. 北京理工大学学报, 1992, 12(4): 116~ 120
- 4 水小平. 奇异值分解对非常约束多体系统的动力学分析. 兵工学报, 1994(2): 88~ 92
- 5 Amirouche F M L. Computational methods in multibody dynamics. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1992
- 6 Nikravesh P E. Computer-aided analysis of mechanical systems. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988
- 7 Blajer W. An orthonormal tangent space method for constrained multibody systems *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1995, 121(1~ 4): 45~ 57
- 8 Borri M, Bottasso C, Mantegazza P. Acceleration projection method in multibody dynamics *Eur J Mech A/Solids*, 1992, 11(3): 403~ 418

(本文于1996年11月19日收到)

(上接第62页)

系统病态程度的增强,这些方法数值发散的次序为:显式单步四阶Runge-Kutta法、Trenor法、Newmark法、Adam's法、Gear方法

参考文献

- 1 袁兆鼎,费景高,刘德贵. 刚性微分方程数值解法. 北京:科学出版社,1987

- 2 徐士良. 常用算法程序集. 北京:清华大学出版社,1994
- 3 张汝清,殷学纲,董明. 计算结构动力学. 重庆:重庆大学出版社,1987
- 4 潘振宽. 柔性多体系统动力学建模理论与数值仿真研究. 上海交通大学博士论文,1992

(1996年12月25日收到第1稿,
1996年3月3日收到修改稿)