离散变量结构优化设计的发展、现状及展望

孙焕纯　　　**柴　山**　　　**王跃方**

(大连理工大学,　大连　116023)　(山东工程学院,　淄博　255012)　(大连理工大学,　大连　116023)

孙焕纯, 1927 年 2 月出生, 大连理工大学工程力学系教授, 结构力学博士导师、博士后流动站指导教师 《应用数学与力学》、《计算结构力学及其应用》、《大连理工大学学报》编委 出版了 3 本专著 (合著), 在国内外学术刊物发表 100 余篇论文 从事过弹性空间问题、平面多连通问题、结构静动力弹塑性分析、非线性动力方程逐步积分法、自由-移动边界问题的线性互补解法、数学物理方程解的虚边界元法等研究工作 从 80 年代初期开始从事离散变量结构优化设计问题的研究, 内容包括截面、形状、拓扑和布局等多层次的优化, 取得了一系列的研究成果并出版了国际上第一本离散变量结构优化设计的专著

摘要　本文指出离散变量结构优化设计的特点和难点, 回顾了它的发展, 论述了现有算法的分类、各自的优缺点和解题规模, 介绍了它的研究方向和发展趋势

关键词　结构最优化, 离散变量, 组合最优化, 整数规划

1　前　　言

按照设计变量性质, 结构优化设计可分为连续变量优化设计和离散变量优化设计. 离散变量的值只能取某些符合一定条件的离散值, 例如钢筋混凝土结构构件的截面尺寸必须取满足模数制的离散值; 钢结构构件的截面必须选自型钢的规格表或满足特定组合截面要求的离散值

结构优化设计理论与方法的发展已 30 余年了, 迄至 1993 年的统计[4]已有专著 150 余部, 论文 2500 余篇, 综述性文章 50 篇, 这些书和论文的绝大部分是关于连续变量优化设计的, 而关于离散变量优化设计的国际性论文只有 100 多篇 在连续变量结构优化设计中, 截面 (或尺寸) 优化已趋成熟, 目前研究的重点是形状优化和拓扑优化 与连续变量结构优化设计相比, 离散变量结构优化设计发展缓慢, 截面 (或尺寸) 优化对稍大规模的问题尚缺少有效的方法, 至于形状优化、拓扑优化和布局优化的研究则少得多, 而且都不够成熟 国际上从 60 年代末期和 70 年代初期, 开始了离散变量结构优化设计的研究, 我们从 80 年代才开始起步. 从文献来看, 我们虽然起步较晚, 但在总结前人工作的基础上, 直接采用组合优化和分级处理的方法, 并做了若干发展, 取得了一系列的研究成果, 有些工作处于国际前沿 如截面优化的相对差商算法、(0, 1) 规划、(0, 1, 2) 规划模型以及相应的多种算法; 形状、拓扑和布局优化中的序列多重二级优化方法[11~13], 既避免了不同性质变量、不同性质约束 (局部约束与全局约束) 同时处理的困难, 又节省了计算时间

2　离散变量结构优化设计的特点和难点

离散变量优化设计最基本的特点就是其设计变量的离散性, 由此导致其数学模型中的目标函数和约束函数的不连续性, 从而将连续变量优化的数学模型转化为不可微的、非凸规划模型, 可

行域转化为可行集, 连续变量优化中的许多有效的解析数学算法和优越条件失去了意义, 如各种梯度算法中的敏度分析法, K-T 条件等等, 因为对偶间隙无法估计, 从而各种对偶算法也大大地失去了其有效性

离散变量优化设计的难点在于:

(1) 解析的数学工具显得力所难及 离散变量优化问题在数学上属于组合优化的范围, 即从所有可能的组合中寻找最优解 设问题的设计变量数为n, 每一设计变量可取的离散值个数为m, 则问题的组合个数为m^n. 表示一种算法计算量的时间复杂性函数$f(n)$有两类

$$f_1(n) = \sum_{i=1}^{m} c_i n^i, \quad f_2(n) = \sum_{i=1}^{m} e_i i^n$$

$f_1(n)$称为多项式时间函数, $f_2(m)$称为指数时间函数 若在寻找最优解过程中搜索的组合个数无法用确定的多项式表示, 则这种问题称为NP 困难问题 NP 困难问题的难度在于随着设计变量个数的增加, 组合个数迅速增加[2,3]. 设$n = 30$, 搜索一个组合所需的时间是 1 μs, 则有$f_{1,2}(n) = n^2 = 0.0009\ s$, $f_{2,2}(n) = 2^n = 17.9\ min$, $f_{1,3}(n) = n^3 = 0.27\ s$, $f_{2,3} = 3^n = 6.5\ y$, 可见对于大规模问题指数时间算法所花的时间是巨大的, 以至无法承受

(2) 形状优化主要是除截面变量外, 又增加了一类形状 (坐标) 变量 同时处理两类不同性质的变量不仅工作量大, 难度也大

(3) 拓扑优化和形状优化一样, 除截面变量外, 又增加了拓扑 (结点间有、无杆件连接) 变量 除处理两类不同性质的变量的困难外, 还有杆件的删除, 特别是杆件的恢复策略, 如果只有杆件的删除而无杆件的恢复策略, 常常得不到最优拓扑解

(4) 布局优化, 有三类不同性质的变量 (截面、形状和拓扑), 显然同时处理三类不同性质的变量难度更大, 计算工作量也将大大增加

(5) 结构类型优化, 这是最高层次的优化, 难度是最大的, 迄今未见到有关的文献

3 离散变量结构优化设计的发展概况

由于受组合优化算法的指数时间的制约, 即使是截面优化这一最低层次的问题对稍大规模的问题也还缺乏有效的方法 常用的离散变量优化设计算法有 3 类:

(1) 精确算法 这里的精确算法是指当数学规划模型是设计变量的显函数时可求得问题的全局最优解的算法, 在结构优化设计中, 由于约束函数是设计变量的隐函数, 需采用一定的假设对数学模型加以改造, 化为序列显函数规划模型采用迭代算法求解, 这样采用精确算法也无法保证一定可求得原问题的最优解 这类算法有枚举法、隐枚举法、Gomory 的割平面法, Dakin 的改进的分支定界法和(0, 1)规划的Balas 法、定界组合算法, 动态规划法等 一般来讲这些算法都是指数型算法, 对这类算法的评价标准是其计算效率

结构优化设计中应用较多的精确算法是分支定界法 分支定界法是用来求解线性规划问题的, 而结构优化设计是一非线性规划问题, 因此, 不能直接用分支定界法来求解结构优化设计问题, 一般需要对模型进行变换, 然后再进行求解 例如, John 等人应用序列线性化方法和分支定界法相结合进行离散变量桁架结构优化设计、Salajegheh 和Vanderplaats 应用分支定界法进行离散尺寸和形状变量桁架结构优化设计等就是这方面应用的一些例子. 分支定界法的优点是可以直接应用求解连续变量线性规划的算法, 而它的缺点是需要大量的存储空间且其计算工作量是设计变量的指数函数, 因此, 分支定界法只可用来求解中、小规模的问题[5] (设计变量数$n = 20$～30). 我们提出了一种定界组合算法, 并将其应用于离散变量结构优化设计问题[7]. 该算法根据

约束条件确定组合的下界，根据目标条件确定组合的上界，删除了大量的不可行组合和非最优组合，具有较高的计算效率．动态规划法也很费时．

(2) 近似算法　这类算法求得的不是精确最优解而是近似最优解，但是该类算法可以保证近似最优解与精确最优解的相对误差不超过某一固定的比值．由于确定相对误差界非常困难，所以只有很少几个问题有近似算法，如一维装箱问题首次适合的（FF）算法、（0，1）规划的相对差商算法等．其中相对差商算法可以给出近似最优解的误差估计公式以及对于近似最优解的修正算法，当误差大于许用范围时，可以进行 0 阶修正、1 阶修正…．该算法的计算工作量为 $O(n)$，0 阶修正的计算工作量为 $O(n)$，1 阶修正的计算工作量为 $O(n^2)$．随机性能实验表明该算法的计算精度是较高的．应用本法求解不受问题规模的限制．

近似算法的优点是能够估计可行解与全局最优解或局部最优解的最大误差和减少计算时间，可解较大规模的问题．如果最大误差在工程的许用范围之内，则不失为一种实用的好方法，当误差较大而又没有改进可行解的办法时，就是这种算法的一个缺点；如果误差虽较大，但有改进可行解的方法以减少其误差时，那么这种算法就显示其优越性了．

(3) 启发式算法　可以求得近似最优解，但无法估计误差的算法都属该类算法．因为启发式算法的计算工作量较小，可以用来求解大规模的问题，因此这是在实际计算中应用较多的一类算法．对启发式算法的评价标准是近似最优解接近精确最优解的程度，通常是通过对大量有精确最优解的考题进行检验与统计分析而估计的．对于实际问题，无法得到所得解的实际误差是这类算法的主要缺点．

离散变量结构优化设计的启发式算法可以分为两类：

第一类是组合算法．这类算法只计算各个组合对应的目标函数值并检查其是否满足约束条件，通过对各个组合对应的目标函数值的比较，选出最优解．

离散变量结构优化设计的（0，1）规划法就是这类算法．该法首先采用一定的算法将原优化问题在设计许用集的某一子集上转化为（0，1）规划问题，然后求解，根据此解继续修正许用子集，形成新的（0，1）规划问题，再求解，直到收敛．该法的优点是大大地缩减了原问题的许用集合，设原问题的许用集合中的元素为 m，设计变量为 n，则将总组合数由 m^n 降为 2^n，大大地减少了计算工作量．其缺点是不能保证收敛于最优解，但实践证明它能得到较好的可行解．

近些年来发展起来的遗传算法（GA）也属于该类算法．逼近全局最优解的性质是该法的优点．遗传算法也已应用于离散变量结构优化设计领域，但在此领域中的致命缺点是结构重分析次数太多（超静定问题），就连对较小规模（十几个变量）、离散集元素较少的截面优化问题，一般也需要上百次结构重分析，对于规模较大、且离散集元素较多的问题，则需要上千次重分析，这是无法承受的．

模拟退火法（Simulated Annealing）也是近年来发展的一种启发式算法．它模拟固体退火过程进行结构优化设计．它与遗传算法一样，结构重分析次数太多，计算工作量太大．

第二类是附加离散性条件的连续变量优化设计方法．

连续优化解的圆整法是这类算法中最简单的情况，其优点是可以利用比较成熟的连续变量的优化方法，其缺点是其解不是离散变量的最优解，有时相差甚远．

Schmit 和 Fleury 的对偶规划法，其优点是可利用成熟的连续优化方法，避免直接解原离散变量优化问题，其主要缺点是用对偶规划求解非凸规划问题，必然存在对偶间隙，难以求得原问题的离散优化解．类似的方法还有离散罚函数法、离散复形法、离散梯度或整数梯度法等．

Templeman 和 Yates[6] 于 1983 年将桁架离散变量截面优化问题化为以每根杆的多节单元的

长度为设计变量的连续变量线性规划问题 (每根杆的单元数等于许用离散集元素数), 求得了各单元长度的最优值后再反过来确定整根杆件的截面 该法的优点是降低了求解的难度; 缺点是当离散集较多时, 设计变量数按照许用离散集元素的个数的倍数增长, 而且只适用于常内力单元, 又不能处理变量连接问题 隋允康于 1987 年采用了长度的无量纲化设计变量解决了变量连接问题, 并采用两节无限小单元的无穷组合将该法推广到变内力有限元的离散变量优化中.

Choi 等人于 1991 年提出了两级优化法, 即单元级的满应力优化和结构级的满位移优化法 两级优化分别独立地进行, 先进行满应力优化, 然后检查位移约束, 如违反位移约束则进行满位移优化, 增大对减少位移贡献最大的杆件直到位移约束满足为止 该法基本上属于准则法, 而且两级优化之间缺乏协调, 无法保证得到的是最优解

采用以往的启发式算法无法判断优化结果是否为局部最优解, 文 [1] (p. 197～p. 201) 建立了离散变量结构优化设计的 (0, 1, 2) 规划模型, 提出了求解 (0, 1, 2) 规划问题的二级定界组合算法 为求离散变量结构优化设计的局部最优解提供了一种高效算法

对于结构形状、拓扑和布局等更高层次的离散变量结构优化设计问题, 国内外虽有研究论文发表, 但都受到离散变量截面优化这一最低层次的优化方法的限制, 所以进展不大 这是一个总的情况 根据所查到的文献看来, 至今尚未见到有效的算法, 请参阅文献 [1, 5].

我们对离散变量桁架结构、刚架结构形状、拓扑及布局优化问题进行了研究, 分别提出了离散变量结构形状优化的序列二重二级优化方法、拓扑优化的序列二重二级优化方法和布局优化的序列三重二级优化方法, 通过数值计算检验基本上是成功的 但布局优化设计的内容更为广泛些, 例如大型结构的支承位置和数量的设置也是一种布局优化, 目前还未见到有关的方法

4 离散变量结构优化设计发展展望

离散变量结构优化设计在工程实际中具有极大的应用前景, 这是一个内容广泛、值得深入研究的领域 目前和今后相当长的一段时间内研究的前沿方向应当是:

(1) 寻求组合优化问题的高效解法 由组合优化问题的数学理论来看, 对大规模的问题, 求精确最优解几乎是不可能的 对结构优化设计问题来说, 除了静定问题以外, 由于约束函数是设计变量的隐函数, 在采用一定的假设化为序列显函数规划模型并采用迭代算法求解后, 即使求得了每一显函数规划模型的精确最优解也无法保证一定可求得原问题的最优解 因此, 目前和今后相当长的一段时间内研究的前沿方向之一是寻求多项式时间的高效近似算法以节省计算时间, 既可估计所得解的误差, 需要时又可以继续修正以提高解的精度

(2) 寻求高效的启发式算法, 通过大量的考题和随机数值实验, 证明其收敛快且具有较高的精度

(3) 寻求结构类型优化方法, 这是结构优化设计的最高层次, 也是最难的课题, 看来只有依靠结构优化设计与专家系统的结合来解决了. 这是一个相当长远的研究方向

参 考 文 献

1 孙焕纯, 柴山, 王跃方. 离散变量结构优化设计. 大连: 大连理工大学出版社, 1995

2 加里等 计算机和难解性—NP 完全性理论导引 (中译本). 北京: 科学出版社, 1987

3 Papadimitriou C H 等 组合最优化—算法和复杂性 (中译本). 北京: 清华大学出版社, 1988

4 Cohn M Z Theory and practice of structural optimization. *Struct Opt*, 1994, 7 (1/2): 20～31

5 Arora J S, Huang M W. Methods for optimization of nonlinear problems with discrete variables: a review. *Struct Opt*, 1994, 8: 69～85

6 Templeman A B, Yates D F. A segmental method for the discrete optimum design of structure. *Eng Opt*, 1983, 5 (6)
7 Chai S, Sun H C. An application of delimitative and combinatorial algorithm to the discrete optimization design of structures. *Struc Opt*, 1996, 11 (3/4)
8 Chai S, Sun H C. A relative difference quotient algorithm for discrete optimization. *Struc Opt*, 1996, 12 (1)
9 柴山, 孙焕纯 求解一类 (0, 1) 规划问题的相对差商法 系统工程学报, 1996, 11 (1)
10 柴山, 孙焕纯 求解一类 (0, 1, 2) 规划问题的二级定界组合算法 大连理工大学学报, 1996, 36 (3)
11 孙焕纯, 王跃方, 黄吉锋 离散变量桁架的形状优化设计. 大连理工大学学报, 1995, 35 (1)
12 王跃方, 孙焕纯 多工况多约束下离散变量结构拓扑优化设计. 力学学报, 1995, 27 (3)
13 王跃方, 孙焕纯 离散变量桁架结构的布局优化设计. 大连理工大学学报, 1995, 35 (4)
14 孙焕纯等. 离散变量结构优化设计的序列两级算法 计算结构力学及其应用, 1986, 3 (2)
15 孙焕纯等. 离散变量结构优化设计的 (0, 1) 规划的组合算法 计算结构力学及其应用, 1989, 6 (1)
16 隋允康 组合结构离散断面优化方法和程序系统DDDU-4. 上海力学, 1987, (4)

(1996 年 3 月 28 日收到第 1 稿,
1996 年 6 月 25 日收到修改稿)

(上接第 16 页)

当然边界点方法是新生的, 既有突出的优点, 也会伴生某些问题, 它的成长必将历经由简入繁, 由易及难, 由特殊到一般, 由不完整到逐步成熟的全过程. 可以预期边界点方法这颗嫩芽必将茁壮成长, 而根深叶茂、百花吐艳的盛景终究会出现.

参 考 文 献

1 王有成 工程中的边界元方法 北京: 中国水利水电出版社, 1996
2 王有成等. 水闸闸室结构三维样条边界元分析. 应用力学学报, 1994 (1)
3 Wang Y C et al. 3-D spline BEM for the analysis of sluice. In: Brebbia CA Ed, Boundary Elements Ⅷ. Oklahoma USA: Computational Mechanics Publications, 1991
4 Chen H B, Wang Y C. Stress rate integral equations on elastoplasticity. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 12 (1)
5 王有成, 王章虎 无限样条边界元及其在结构地基耦合中的应用. 应用数学与力学, 1993 (1)
6 蔡敏, 王有成 各向异性薄壳积分方程法 复合材料学报, 1990 (3)
7 王有成, 吴建国 样条积分方程法分析弹塑性板弯曲 力学学报, 1990 (2)
8 王有成 样条积分方程法分析变厚板 计算结构力学及其应用, 1991 (1)
9 王左辉 薄板弯曲问题的非奇异核边界元法 应用数学与力学, 1993 (3)
10 王有成等. 奇性校正特解场法计算任意点应力和位移. 力学学报, 1994 (2)
11 王有成等. 边界元技术中的全特解场方法 力学学报, 1995 (4)
12 Wang Y C et al. All particular solutions method in BET. Proc. 6-th China-Japan Symposium on BEM, Acadamic Publishers, 1994
13 王有成等. 全特解场边界元方法 第四届全国工程中边界元法会议论文集 南京: 河海大学出版社, 1994
14 王章虎, 王有成 全特解场法分析受有变温荷载问题 中国科学技术大学学报, 1996 年力学专集
15 王有成, 王左辉 分析各向异性板的各向同性化样条积分方程法 应用数学和力学, 1990 (9)

(本文于 1996 年 3 月 5 日收到)