第34卷第2期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 34, No. 2
2005年6月 Journal of Shanghai Normal University(Natural Sciences) 2005, Jun.

标的资产服从几何 Levy 过程的股票价格模型的期权定价

熊双平

(上海师范大学 数理信息学院, 上海 200234)

摘　要: 利用公平保费原则和价格过程的实际概率测度推广了 Mogens Bladt 和 Hina HviidRydberg 关于欧式期权定价的结果. 在假定股票价格过程遵循几何 Levy 过程,并且股票预期收益率、波动率和无风险利率均为时间函数的情况下,获得了欧式期权精确定价公式和买权与卖权之间的平价关系.

关键词: Levy 过程; Black Scholes 公式; 保险精算定价; 期权定价

中图分类号: O211.6; F830.9　**文献标识码**: A　**文章编号**: 1000-5137(2005)02-0027-06

0 引　言

期权定价问题是金融数学中的核心问题之一. Black 和 Scholes[1] 假定股票价格服从几何 Brown 运动,用无套利复制的方法证明了著名的 Black Scholes 公式. 这一开创性的工作被誉为现代金融理论的又一次"革命". 由于几何 Brown 运动是连续随机过程,所以假设股票的价格过程是几何 Brown 运动就意味着股票价格是时间的连续函数. 但实际研究发现,几何 Brown 运动并不是刻画股票价格过程的理想工具. 文[2]通过实测数据分析发现几何 Brown 运动与市场实际有一定差距,实践表明,股票的价格可能会出现间断的"跳跃",股票的预期收益率往往是波动变化的,可能是依赖时间和股票价格的函数. 很多文献对股票价格波动规律进行了研究. 如 Knut K Aase[3] 的 Ito 过程和随机点过程混合模型; Mertan[4] 和 Amin Jarrow(1992)的随机利率模型; Martin Scheizer[5] 一般半鞅模型; Chan[6] 的 Levy 过程模型; Jan Kallsen[7] 的指数 Levy 过程模型; Jean-Luc Prigent[8] 一般标志点过程模型. 传统的期权定价方法有3种:解偏微分方程方法;离散模型逼近法;鞅方法. 这些方法通常假设金融市场是无套利均衡的完全市场. 如果市场是有套利的(如股票价格遵循几何分式 Brown 运动)或不完全的(如股票价格过程为 Levy 过程),这时等价鞅测度不存在或存在而不唯一,用传统的期权定价方法就有一定的困难. Bladt 和 Rydberg[9] 提出了期权定价的保险精算方法. 将期权定价转化成一个保险问题,利用公平保费原则,在无任何市场假设下,证明了当股票价格服从几何 Brown 运动时,保险精算定价与无套利定价是一致的[9],依此证明了著名的 Black Scholes 公式. 当然保险算方法与传统的期权定价方法有着本质的区别:保险精算法把欧式期权定义为股票到期日价格按期望收益率折现的现值与执行价按无风险利率折现的现值的差,在股票实际分布的概率测度下的数学期望值,从而可知该期权价格与股票价格的实际分布特别是期末的分布有关,而传统的期权定价理论,如 Black Scholes 期权定价理论提出的期权定价与股票的实际分布无关,而与股票的价格过程有关. 但从保险精算的角度来考虑,将期权定价看作是公平保费也有其合

收稿日期: 2003-05-10

作者简介: 熊双平(1970-),男,上海师范大学数理信息学院讲师.

理性. 文[11]假定股票价格过程遵循简单跳扩散过程即正态跳跃 Poisson 扩散过程,利用保险精算定价方法给出欧式期权精确定价公式, 本文假定股票价格过程遵循更一般跳扩散过程即几何 Levy 过程,利用保险精算法与测度变换方法给出欧式期权精确定价公式,推广文[9]与[11]中结果.

1 期权的保险精算定价方法

考虑连续时间的金融市场只有两种资产,一种是无风险资产(债券),在 t 时刻的无风险率为 $r(t)$ 另一种是风险资产(如股票),t 时刻的价格用 $S(t)$ 表示,考虑时间区间为 $[0,T]$, 0 表示现在 ,T 表示到期日,$\{S(t):t \geqslant 0\}$ 是一个定义在某个完备概率空间 (Ω, F, P) 上的随机过程, $\{F_t:t \geqslant 0\}$ 是由 $S(t)$ 生成的自然 σ- 代数,$S(0) = S$ 是大于零的常数. Mogens Bladt 和 Hina Hviid Rydberg 利用公平保费原理将期权定价问题转化为保险问题,其基本思想是:买入一份期权,对方(即此时的期权出售者)在期权有效期内就会承担一定的潜在风险,若要为这一风险加上保险,其保费就是这一期权的价格,也就是用对方所承受风险的大小来衡量期权价值的大小. 有关期权保险精算定价的概念沿袭 Mogens Bladt 和 Hina Hviid Rydberg[9].

定义 1.1 价格过程 $S(t)$ 在$[0,T]$ 产生的期望收益率$\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s$ 定义为: $e^{\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s} = \dfrac{ES(t)}{S}$, 其中 $\beta(t)$ 称为连续复利收益率(股票在 t 时刻的瞬时收益率).

债券在 t 时刻的价格 $P(t)$ 满足

$$\mathrm{d}P(t) = P(t)r(t)\mathrm{d}t, \quad P(0) = 1.$$

其中 $r(t)$ 称为 t 时刻的瞬时利息率(是无风险利率). 期权是指未来的选择权,它赋予期权的持有者(购买者或多头)一种权利,而不必承担义务,可以按预先敲定的价格购买或出售一定数量和一定品质的资产(称为标的资产). 欧式期权是只能在到期日方可执行的期权. 按预定价格赋予购买权利称为买权(call option),赋予出卖权利的称为卖权(put option). 设 $C(K,T)$ 和 $P(K,T)$ 分别表示以股票 $S(t)$ 为标的资产,执行价为 K,到期日为 T 的欧式买权和卖权的现在时刻价值.

定义 1.2 欧式期权在现在时刻的价值定义为:股票到期日价格按期望收益率折现的现值与执行价(看作是无风险资产债券)按无风险利率折现的现值的差,在股票实际分布的概率测度下的数学期望值,这一定价称为期权的保险精算定价.

欧式期权在到期日被执行的充要条件是:欧式买权(欧式卖权)为股票到期日价格按期望收益率折现的现值与执行价(看作是无风险资产债券)按无风险利率折现的现值的差大于零(小于零). 即

$$C(K,T) = E[(\exp\{-\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t\} S(T) - \exp\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\} K) I_{\{\exp\{-\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t\} S(T) > \exp\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\} K\}}],$$

$$P(K,T) = E[(\exp\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\} K - \exp\{-\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t\} S(T)) I_{\{\exp\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\} K > \exp\{-\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t\} S(T)\}}].$$

这里 I_A 表示示性函数,即当 $\omega \in A$ 时, $I_A = 1$, 当 $\omega \notin A$ 时, $I_A = 0$.

注 ① 定义 1.2 没有对金融市场做任何经济假设,计算潜在损失时仅用了风险资产按期望收益率折现, 无风险资产按无风险利率(债券利息率)折现的思想,其结果对无套利、均衡的、完全市场和有套利、非均衡的、不完全市场都有效.

② 定义 1.2 给出的欧式期权定价与传统的期权价是不同的:传统的欧式买权执行条件为 $S(T) > K$ 而不是 $\exp\{-\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t\} S(T) > \exp\{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t\} K$.

③ 文[9]证明了当 $\{S(t):t \geqslant 0\}$ 是几何 Brown 运动时,保险精算定价与传统的无套利定价是一致的 ,依此可用保险精算定价法证明 Black Scholes 公式[9:性质2.1 和定理2.1]. 当 $\{S(t):t \geqslant 0\}$ 是指数 Levy 过程时,文[9]通过实例将保险精算定价与期权的无套利定价进行比较发现,公平保费定价是无套利的.

2 几何 Levy 扩散过程模型的期权定价公式

假设风险资产的价格过程 $\{S(t):t\geqslant 0\}$ 和无风险资产的价格过程 $\{P(t):t\geqslant 0\}$ 分别满足

$$dS(t)=S(t-)[r(t)dt+\sigma(t)dW(t)+\int_{-1}^{\infty}y(N(dy,dt)-\lambda m(dy)dt],\tag{2.1}$$

$$dP(t)=P(t)r(t)dt\ P(0)=1,\tag{2.2}$$

其中 $W(t)$ 表示定义在完备概率空间 (Ω,F,P) 上的标准 Brownian 运动. $S(0)=S$ 是大于零的常数, $r(t),\sigma(t)$ 是 $[0,\infty)\to R$ 上的可积函数, $N(dy,dt)$ 为 $[0,T]\times(-1,\infty)$ 上对等于 一个复合泊松过程 $(N_t,(U_j)_{j\geqslant 1})$ 的时齐泊松随机测度, $\lambda m(dy)$ 为 $N(dy,dt)$ 的补偿测度,其中常数 λ 为泊松过程 $N_t=[0,t]\times(-1,\infty)$ 的强度参数, $m(dy)$ 为 平方可积的独立同分布随机变量 $(U_j)_{j\geqslant 1}$ 的概率测度,且 $U_j>-1$ (否则会出现非正的价格). 称 $(\lambda,m(dy))$ 为 $N(dy,dt)$ 的局部特征. 此外,设 $(W_t)_{t\geqslant 0}$, $(N_t)_{t\geqslant 0}$, $(U_j)_{j\geqslant 0}$ 相互独立.

由 Doleans - Dade 指数公式[10]有如下的结论:

引理 2.1 随机微分方程(2.1)的解为

$$S(t)=S\exp\{\int_0^t[r(t)-\frac{1}{2}\sigma^2(s)]ds-\lambda tE(U_1)+\int_0^t\sigma(s)dW(s)\}\prod_{j=1}^{N_t}(1+U_j).\tag{2.3}$$

定理 2.2 设股票在有效期内无红利支付,且其价格过程为(2.1),则

$$C(K,T)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(-\lambda T)^n}{n!}E[SN(d_2^n)e^{-\lambda TE(U_1)}\prod_{j=1}^{n}(1+U_j)-K\exp\{-\int_0^T r(s)ds\}N(d_1^n)],\tag{2.4}$$

$$P(K,T)+S=C(K,T)+\exp\{-\int_0^T r(s)ds\}K,\tag{2.5}$$

这里

$$d_1^n=\frac{\ln\left(\dfrac{Se^{-\lambda TE(U_1)}\prod_{j=1}^{n}(1+U_j)}{K}\right)+\int_0^T][r(s)-\frac{1}{2}\sigma^2(s)]ds}{\sqrt{\int_0^T\sigma^2(s)ds}},$$

$$d_2^n=d_1^n+\sqrt{\int_0^T\sigma^2(s)ds},\quad N(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

证明 由于 $(U_j)_{j\geqslant 1}$ 独立同分布,且与 N_t 独立,故有

$$E[\prod_{j=1}^{N_T}(1+U_j)]=E[E[\prod_{j=1}^{N_T}(1+U_j)]\mid N(T)]=e^{\lambda TE(U_1)},$$

又 $\int_0^T\sigma(s)dW(s)\sim N(0,\int_0^T\sigma^2(s)ds)$,可得 $E(S(T))=S\exp\{\int_0^T r(s)ds\}$. 从而

$$\exp\{-\int_0^T\beta(s)ds\}=\frac{ES(T)}{S}=\exp\{\int_0^T r(s)ds\}.$$

又因 $\exp\{-\int_0^T\beta(s)ds\}S(T)>\exp\{-\int_0^T r(s)ds\}K$ 等价于 S(T) >K. 由此得

$$C(K,T)=E[(\exp\{-\int_0^T\beta(s)ds\}S(T)-\exp\{-\int_0^T r(s)ds\}K)^+I_{S(T)>K}=$$

$$E[\exp\{-\int_0^T r(s)ds\}S(T)I_{S(T)>K}-\exp\{-\int_0^T r(s)ds\}KP(S(T)>K),\tag{2.6}$$

记 $I_1=E[\exp\{-\int_0^T r(s)ds\}S(T)I_{S(T)>K}]$, $I_2=\exp\{-\int_0^T r(s)ds\}KP(S(T)>K)$ 则

$$C(K,T) = I_1 - I_2; \tag{2.7}$$

分两步计算,先计算 I_2,再计算 I_1,由于 $S(T) > K$ 等价于

$$\frac{\int_0^T \sigma(s)\mathrm{d}W(s)}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s}} > -\left[\frac{\ln\left(\frac{Se^{-\lambda TE(U_1)}\prod_{j=1}^{n}(1+U_j)}{K}\right) + \int_0^T][r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)]\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s}}\right],$$

记 $d_1^n = \dfrac{\ln\left(\frac{Se^{-\lambda TE(U_1)}\prod_{j=1}^{n}(1+U_j)}{K}\right) + \int_0^T[r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)]\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s}}$ 并注意到 $\int_0^T \sigma(s)\mathrm{d}W(s)$ 服从均值为零,方差 $\int_0^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s$ 的正态分布,则

$$I_2 = \exp\{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s\}K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(-\lambda T)^n}{n!}E[N(d_1^n)]. \tag{2.8}$$

对于 I_1,采用测度变换的方法,定义 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}|F_t = \frac{S(t)}{SB(t)}$,这里 $B(t) = \exp\{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\}$. 由 Girsanov 定理[10]知

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}|F_t = \varepsilon\left(\int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}W(s) + \int_0^t\int_{-1}^{\infty} y(N(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) - \lambda m(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s)\right),$$

其中 $\varepsilon(\cdot)$ 为 Dolean - Dade 指数半鞅, $N(\mathrm{d}y,\mathrm{d}t)$ 在 Q 中仍然是一个时齐泊松随机测度,具有以下局部特征:

$$\hat{\lambda} = \lambda(1 + E(U_1)), \hat{m}(\mathrm{d}y) = \frac{(1+y)m(\mathrm{d}y)}{1 + E(U_1)},$$

即 $N(\mathrm{d}y,\mathrm{d}t)$ 在 Q 下的补偿测度为 $\lambda(1+y)m(\mathrm{d}y)$,且 U_j 在 Q 下的概率测度为 $\frac{(1+y)m(\mathrm{d}y)}{1+E(U_1)}$.

在测 Q 下 $I_1 = SQ(S(T) > K)$,记 $P(t,T) = \exp\{-\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\}$,令 $Y(t) = \frac{P(t,T)}{S(t)}$ 则由 Ito 公式[10]有

$$\mathrm{d}Y(t) = Y(t-)[\sigma^2(t)\mathrm{d}t - \sigma(t)\mathrm{d}W(t) - \int_{-1}^{\infty}\frac{y}{1+y}(N(\mathrm{d}y,\mathrm{d}t) - \lambda(1+y)m(\mathrm{d}y))\mathrm{d}t],$$

记 $\hat{W}(t) = W(t) - \int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}s$,则 $\hat{W}(t)$ 为 Q - 布朗运动,于是有

$$\frac{\mathrm{d}Y(t)}{Y(t-)} = -\sigma(t)\mathrm{d}\hat{W}(t) - \int_{-1}^{\infty}\frac{y}{1+y}(N(\mathrm{d}y,\mathrm{d}t) - \lambda(1+y)m(\mathrm{d}y))\mathrm{d}t], \tag{2.9}$$

$$Y(0) = \frac{P(0,T)}{S}.$$

由 Dolean - Dade 指数公式([10]),可得随机微分方程(2.9)的解为

$$Y(T) = \frac{P(0,T)}{S}\exp\{\lambda TE(U_1) - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s - \int_0^T \sigma(s)\mathrm{d}\hat{W}(t)]\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1+U_j}.$$

故有

$$Q(S(T) > K) = Q\left(\frac{P(T,T)}{S(T)} < \frac{1}{K}\right) = Q(\ln(KY(T) < 0) = \tag{2.10}$$

$$Q\left(\frac{\int_0^T\sigma(s)\mathrm{d}\hat{W}(s)}{\sqrt{\int_0^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s}} > -\left[\frac{\ln\left(\frac{Se^{-\lambda TE(U_1)}\prod_{j=1}^{n}(1+U_j)}{K}\right)+\int_0^T[r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)]\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s}}\right]\right).$$

并注意到 $\int_0^T\sigma(s)\mathrm{d}\hat{W}(s)$ 服从均值为零,方差 $\int_0^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s$ 的正态分布,再注意到在 Q 中 N_t 的强度参数以及 U_j 的概率测度的变化,则

$$Q(S(T)>K)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda(1+E(U_1))T}(-\lambda(1+E(U_1))T)^n}{n!}E^Q[N(d_2^n)]= \tag{2.11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda(1+E(U_1))T}(-\lambda(1+E(U_1))T)^n}{n!}E\left[N(d_2^n)\frac{\prod_{j=1}^{n}(1+U_j)}{(1+E(U_j))^n}\right]=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(-\lambda T)^n}{n!}E[N(d_2^n)e^{-\lambda TE(U_1)}\prod_{j=1}^{n}(1+U_j)].$$

其中 $E[\cdot]$ 是在原先的测度 P 中对于 U_j 的期望算子,(注意到 $E^Q[f(U_1,U_2,\cdots,U_n)]=E\left[f(U_1,U_2,\cdots,U_n)\frac{\prod_{j=1}^{n}(1+U_j)}{(1+E(U_j))^n}\right]$ 而 d_2^n 由下式定义:

$$d_2^n=d_1^n+\sqrt{\int_0^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s}.$$

综合(2.6)~(2.8)和(2.11)式得(2.4),类似上面的计算可得(2.5).

注　①定理 2.2 中的 $C(K,T)$ 和 $P(K,T)$ 都与投资者对股票的预期收益率无关,即与投资者个人对股票的预期收益率无关.

②当股票价格不发生跳跃,定理 2.2 就是股票价格波动率和无风险利率为时间函数情况下的 Black-Scholes 公式.特别当 $r(t)$,$\sigma(t)$ 为常数时,定理 2.2 就是著名的 Black - Scholes 公式.因此定理 2.2 是 Black - Scholes 公式的扩展.

③当 $r(t)$,$\sigma(t)$ 为常数时,定理 2.2 的结果简化为 Merton[12]著名的跳跃模型的期权定价公式.

④当股票在有效期内支付红利或有已知的红利率时,只需在股票的现值中去掉无风险部分(即改变股票现值)可得类似定理 2.2 的结果.

3　结束语

假定股票价格过程遵循几何 Levy 扩散过程模型,利用推广的保险精算定价方法给出了无风险利率、波动率及预期收益率分别为时间 t 的函数情形下的欧式期权定价公式,而在现实的金融市场中无风险利率、波动率及预期收益率可能还和股票价格有关,如股票价格波动率可能为 $\sigma(S(t))$ 或 $\sigma(S(t),t)$ 情形.因此还可以在这些情形下进一步探讨欧式期权的定价问题,特别是股票价格为一般的 Levy 过程和自相似马氏过程的期权定价问题.

参考文献:

[1]　BLACCK F, SCHOLES M. The pricing of options and coprate liabilities[J]. Journal of political Economy ,1973,81(3):637 - 654.

[2] LO A W, MACKINALARY A C . Stock market prices do not follow random walks ; evidence from a simple specification test[J]. Review of Financial Studies ,1988,(1):41 -66.

[3] KNUT AASE. Contigent claims valuation when the security price is combinationof an ito process and a random point process[J] . Stochastic processes and their Applications ,1988,28(2):185 -220.

[4] MERTON M C. Continuous Time finance[M]. Cambridge: Blackwell publishers ,1990.

[5] MARTIN SCHWEIZER. Option heading for semi-martingale[J]. Stochastic Processes and their Applications,1991,37(3):339 -360.

[6] HAN T. Pricing contigent claims on stocks driven by Levy processes [J]. Annas of Appl Prob,1999,9(2):504 -528.

[7] KALLSEN JAAN. Optimal portfolios for expnential Levy processes [J]. Math Oper Res ,2000,51(3):357 -374.

[8] JEAN LUC PRIGENT. Option pricing with a general market point process [J]. Mathe matics of Operations Research, 2001,26(1):50 -66.

[9] BLADT M, RYDBERG T H . An acturtial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions [J]. Insurance: Mathematics and Economics , 1998,22(1):65 -73.

[10] 何声武,汪嘉冈,严加安.半鞅与随机分析[M].北京:科学出版社,1995.

[11] 阎海峰,刘三阳.带有跳的股票价格模型的期权定价[J].工程数学学报,2003,20(2):35 -40.

[12] MERTON R C. Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous[J]. J Polit Econ,1976,(5):125 -144.

Pricing option on stocks driven by the Levy jump-diffusion process

XIONG Shuang-ping

(Mathematics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Using the physical probabilistic measure of price process and fair premium ,we generalize the results of Mogens bladt and Hviid Rydberg on the European option pricing . Under the assumptions that the stocks price process is driven by the Levy jump diffusion process , and the risk-free rate $r(t)$ and the volatility $\sigma(t)$ are functions of time ,we obtain the pricing formula and put-call parity of the European option .

Key words: Levy jump-diffusion process; Black-Scholes model; insurance acctuary pricing; option pricing