

# 一种非线性数字滤波器的 统一设计框架及其性能分析

邵文泽<sup>1)</sup> 韦志辉<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(南京理工大学计算机科学与工程系 南京 210094)

<sup>2)</sup>(南京理工大学研究生院 南京 210094)

**摘 要** 文章旨在研究非线性数字滤波器的统一设计框架问题. 基于稳健统计理论和双边滤波思想, 首先建立了一种鲁棒的图像复原统一能量泛函. 该能量泛函充分融合了双边滤波的双重异性加权机制和稳健  $\rho$ -函数对边缘奇异点的鲁棒性处理机制, 因而具有更强的边缘保持能力. 随后, 基于图像复原统一能量泛函的欧拉-拉格朗日方程, 导出一种非线性数字滤波器的统一设计框架. 特别地, 在此统一框架下, 双边滤波、数字 TV 滤波以及自适应平滑均可进行相应的扩展. 同时, 文中系统比较了各种稳健  $\rho$ -函数在边缘保持方面的鲁棒性, 并提出一种新型边缘保持性稳健  $\rho$ -函数, 即  $\rho(x) = -\sigma^2(1 + |x|/\sigma)\exp(-|x|/\sigma) + \sigma^2$ . 不论是视觉效果方面还是峰值信噪比方面, 大量实验结果验证了文中统一设计框架的合理性和新型稳健  $\rho$ -函数的边缘保持性.

**关键词** 稳健估计; 双边滤波; 各向异性扩散; 非线性滤波; 奇异点  
**中图法分类号** TP391

## A Unified Designing Framework for Nonlinear Digital Filters and Behavior Analysis

SHAO Wen-Ze<sup>1)</sup> WEI Zhi-Hui<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(Department of Computer Science and Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

<sup>2)</sup>(Graduate School, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

**Abstract** A unified designing framework for nonlinear digital filters is discussed in the paper. Based on robust statistics and the idea of bilateral filtering, a unified and robust energy functional for image restoration is firstly constructed, which incorporates both the double-weighting idea of bilateral filtering and the robustness of robust  $\rho$ -functions for edge-outlier processing, and hence behaves much better in edge-preservation. The unified designing framework for nonlinear digital filters is subsequently derived, through solving the Euler-Lagrange equation of the unified energy functional. Under the unified designing framework, bilateral filtering, digital TV filtering, and adaptive smoothing can be expanded correspondingly. The robustness of various robust  $\rho$ -functions in edge-preservation is also compared systematically, and a novel edge-preserving robust  $\rho$ -function is proposed in the paper, that is,  $\rho(x) = -\sigma^2(1 + |x|/\sigma)\exp\{-|x|/\sigma\} + \sigma^2$ . Numerous experiment results demonstrate the rationality of the unified designing framework and edge-preservation of the novel robust  $\rho$ -function, both in the visual effect and the PSNR value.

**Keywords** robust estimation; bilateral filtering; anisotropic diffusion; nonlinear filtering; outlier

## 1 引 言

在图像处理领域,图像平滑一直是经久不衰的重要研究课题<sup>[1-16]</sup>.它一方面基于实际应用的现实需求,有效抑制图像获取与传输过程中的各种随机噪声,在提高图像视觉质量的同时能够为后续处理任务提供更为精确的细节信息,如图像压缩、边缘检测、目标识别等;另一方面基于其理论框架的重要意义,能够为诸多图像处理问题提供统一的理论基础和实现机制,如图像复原、图像分割、超分辨率重建等.

高斯低通滤波是一种早为人知的图像平滑过程.该过程通过高斯核函数加权平均邻域像素灰度值作为当前像素灰度值,从而在提高图像信息相关性的同时,增强图像内容的可视性.然而众所周知的是,高斯滤波在平滑噪声的同时亦模糊了图像中最重要的视觉特征,即边缘信息.事实上,在提高图像信息相关性过程中,高斯滤波忽略了图像信息本身的一个重要特征,即不同性质的区域信息具有不同强度的相关性:在图像的低对比度区域(光滑区域),像素间的相关性较强,而在高对比度区域(边缘区域),相关性则较弱.为此,在过去的 20 多年中,研究者在边缘保持的自适应图像平滑方面做出了大量卓有成效的研究工作<sup>[1-16]</sup>.主要包括基于图像建模的最小能量泛函方法<sup>[1,3,7-9]</sup>、基于线过程的正则化方法<sup>[9-10]</sup>、基于非线性热传导方程的各向异性扩散方法<sup>[1-3,6]</sup>以及非线性数字滤波器方法<sup>[4-7,15]</sup>.有意思的是,基于线过程的正则化方法和基于非线性热传导方程的各向异性扩散方法均可由基于图像建模的最小能量泛函方法严格导出<sup>[3,8]</sup>.然而,非线性数字滤波器与基于图像建模的最小能量泛函方法之间的关系却尚未明晰.

非线性数字滤波器凭借其直观、简单、易行的实现机制,在图像平滑中一直占有重要地位.为了实现边缘保持的图像平滑,数字滤波器中各邻域像素的权重选取应该基于空间自适应的准则.为此,研究者们设计了大量实际可行的图像平滑滤波器<sup>[4-7,11-12,15]</sup>.特别地,1998 年 Tomasi 和 Manduchi<sup>[4]</sup>提出的双边滤波器近年来倍受广大学者的广泛关注<sup>[6-7,13]</sup>.与传统滤波器<sup>[5,11]</sup>不同的是,双边滤波器同时考虑邻域像素与中心像素间的几何距离度量和灰度相似性度量(两种度量均采用高斯核函数),对邻域中距离接近和灰度相似的像素赋予较大权重,反之则赋予较

小权重.有趣的是,类似思想也曾在文献<sup>[12]</sup>中得以体现,正是这种双重异性加权机制(距离各势异性与灰度各向异性)保证了双边滤波器边缘保持性的图像平滑.遗憾的是,虽然国外已经有多篇基于双边滤波思想的研究报道<sup>[6-7,13]</sup>,然而目前国内还没有相关的应用研究.

更为遗憾的是,时至今日,图像平滑滤波器的设计研究一直处于离散孤立的状态,空间自适应的权重选取准则亦没有统一的定量标准,各种平滑滤波器的适用范围一般也仅限于单一随机噪声.因此,图像平滑滤波器的统一设计框架研究是一个非常重要的研究课题.在此背景下,2001 年 Elad 证明了双边滤波器是基于双边加权思想的最小二乘能量泛函在 Jacobi 算法下的单步迭代格式<sup>[7]</sup>.同年,Chan 等人<sup>[5]</sup>基于数字 TV 模型提出一种数字 TV 非线性平滑滤波器,并证明数字 TV 是基于经典 TV 模型的最小能量泛函在半点格式下的等价数值求解格式.2002 年,Barash<sup>[6,14]</sup>将双边滤波思想分别引入到自适应平滑<sup>[15]</sup>和各向异性扩散方程,建立了三者之间的理论联系,同时指出双边滤波器中灰度的高斯核权重实质上是各向异性扩散方程中的一种特殊扩散函数.可见,近年来对于图像平滑滤波器的理论研究逐渐引起广泛重视.然而,数字滤波器的统一设计框架问题仍然未能得到有效解决,而且上述理论研究完全基于高斯噪声情形,忽略了其它噪声情形下的滤波器设计问题.

本文旨在研究非线性数字滤波器的统一设计框架问题,同时明晰数字滤波器与基于图像建模的最小能量泛函方法之间的理论联系.基于稳健统计理论和双边滤波思想,本文首先建立了一种鲁棒的图像复原统一框架.统一框架充分融合了双边滤波的双重异性加权机制和稳健  $\rho$ -函数对边缘奇异点的鲁棒性处理机制,因而具有更强的边缘保持能力.随后,基于图像复原统一框架的欧拉-拉格朗日方程,导出一种非线性数字滤波器的统一设计框架.特别地,在此统一框架下,双边滤波<sup>[6]</sup>、数字 TV 滤波<sup>[7]</sup>以及自适应平滑<sup>[23]</sup>均可进行相应的扩展.同时,文中系统比较了各种稳健  $\rho$ -函数在边缘保持方面的掎性,并提出一种新型边缘保持性稳健  $\rho$ -函数,即  $\rho(x) = -\sigma^2(1 + |x|/\sigma) \exp\{-|x|/\sigma\} + \sigma^2$ .不论是视觉效果方面还是峰值信噪比(PSNR)方面,大量实验结果均显示了本文统一设计框架的合理性和新型稳健  $\rho$ -函数的边缘保持性.

## 2 基于图结构的图像描述

灰度图像作为二维离散信号,基于图结构的图像描述非常直观<sup>[5]</sup>.图  $G$  是指一个有序的三元组  $(\Omega, E, \phi)$ ,其中  $\Omega$  称为结点集(非空), $E$  称为边集, $\phi$  称为关联函数,它使  $G$  的每条边对应于  $G$  的无序结点对(不必相异).若  $e \in E, \phi(e) = (x, y)$ ,称边  $e$  连接结点  $x$  和  $y$ ;结点  $x$  和  $y$  称为边  $e$  的端点;若  $x = y$ ,边  $e$  称为环.当在边集  $E$  上定义方向,此时方向边  $e$  称为弧,图  $G$  称为有向图.当在有向图  $G$  的每条弧  $e$  上定义权指标  $w(e)$ ,则称有向图  $G$  为赋权有向图.

用赋权有向图结构简单描述灰度图像  $u(x)$ ,  $x \in \Omega$ :灰度图像  $u$  定义在非空结点集  $\Omega$  上,每个结点  $x$  处的值为  $u(x)$ ;对每个结点  $x \in \Omega$ ,可定义相应的  $m$  阶邻域系统  $N_x$  ( $m=1$  对应最邻域系统; $m \geq 2$  对应  $(1+2(m-1)) \times (1+2(m-1))$  大小的邻域系统);对每个结点  $x \in \Omega$ ,都有一条由结点  $y$  指向结点  $x \in \Omega$  的弧;每条弧上可定义相应的权函数  $w_{xy}$ .

## 3 稳健统计耦合双边滤波的图像复原统一框架

为便于叙述,假设图像观测模型中的退化算子<sup>[24]</sup> 为单位矩阵.简化的观测模型为

$$u^0(x) = u(x) + n(x), x \in \Omega \quad (1)$$

其中,  $u$  为原始图像,  $u^0$  为噪声污染图像,  $n$  是均值为 0, 方差为  $\sigma^2$  的独立同分布高斯噪声,  $\Omega$  为  $u$  的非空结点集.

### 3.1 稳健统计理论框架下的图像复原

稳健统计是一种关于统计过程的稳定性理论<sup>[18]</sup>.基本思想是,通过系统研究各种模型扰动如噪声异常点对统计推断的影响,提出能够同时抑制噪声异常点和保持数据奇异点的稳健性统计方法.在各种稳健性统计方法中,其中应用最广泛、理解最直观的是 M-估计法<sup>[17]</sup>.M-估计法通过稳健  $\rho$ -函数取代最大似然估计中的  $L_2$  范数,增强估计过程对异常点的稳健性,从而提高最优解的估计精度.可见, M-估计法实质上是一种广义最大似然估计.

对于观测模型(1)中的退化图像,往往同时包含噪声异常点和边缘强影响点.因此,图像复原过程既要抑制噪声点对最优解的恶化,又要避免噪声点抑制过程中对边缘信息的破坏.为此,Black<sup>[8]</sup>等人建

立了如下稳健的图像复原框架.

$$u = \arg \min_u J_1(u) = \arg \min_u \left\{ \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in N_x} \rho_R(u_x - u_y) + \lambda \sum_{x \in \Omega} \rho_D(u_x - u_x^0) \right\} \quad (2)$$

其中,  $\rho_R$  和  $\rho_D$  均为稳健  $\rho$ -函数.在正则化理论中,式(2)中的前后两项分别为正则化项和数据保真项;  $\lambda$  为正则化参数,在正则化项和数据保真项之间起均衡作用;  $N_x$  为  $m$  ( $m \leq 2$ ) 阶邻域系统.

从 Bayesian 统计的观点看,式(2)是 MRF-MAP(Markov Random Field-Maximum A Posterior)框架的简化形式,因此本质上是基于图像建模的最小能量泛函方法.式(2)的重要性还在于,线过程正则化方法和各向异性扩散方法均可以由它严格导出<sup>[3,12]</sup>.

### 3.2 双边滤波耦合的图像复原统一框架

近年来, Tomasi 和 Manduchi<sup>[6]</sup> 提出的双边滤波器凭借其双重异性加权的特殊自适应机制倍受大学者的广泛关注<sup>[6-7,13]</sup>.特别是,2004 年 Farsiu 等人<sup>[13]</sup>通过耦合双边滤波和全变差模型,提出一种用于超分辨率复原的双边全变差模型,复原结果显示了该模型的有效性.

受上述工作的启发,本文基于稳健统计理论和双边滤波思想,建立如下鲁棒的图像复原统一框架:

$$u = \arg \min_u J_2(u) = \arg \min_u \left\{ \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in N_x} d(x, y) \rho_R(u_x - u_y) + \lambda \sum_{x \in \Omega} \rho_D(u_x - u_x^0) \right\} \quad (3)$$

其中,  $\rho_R$  和  $\rho_D$  均为稳健  $\rho$ -函数;  $d(x, y)$  为结点  $x$  和  $y$  之间的距离度量函数;  $\lambda$  为正则化参数;  $N_x$  为  $m$  ( $m \geq 2$ ) 阶邻域系统.本文中,  $d(x, y)$  取均值为 0, 方差为  $\sigma^2$  的修正高斯核函数,记为  $d_{xy}$ ,具体形式为

$$d(x, y) = \begin{cases} \exp\{-\|x - y\|^2 / 2\sigma^2\}, & y \neq x, y \in N_x \\ \omega(0 \leq \omega \leq 1), & y = x, y \in N_x \end{cases} \quad (4)$$

图 1 分别给出了方差为 1,  $\omega$  分别为 1, 0.5, 0 时  $d(x, y)$  的二维示意图.

由上可见,图像复原统一框架充分融合了双边滤波的双重异性加权机制和稳健  $\rho$ -函数对边缘奇异点的鲁棒性处理机制,因而具有更强的边缘保持能力.因此,图像复原统一框架(3)是对 Black<sup>[8]</sup>等人工作的有效推广,并由 3.1 节知,线过程正则化方法和各向异性扩散方法均可由此统一框架严格导

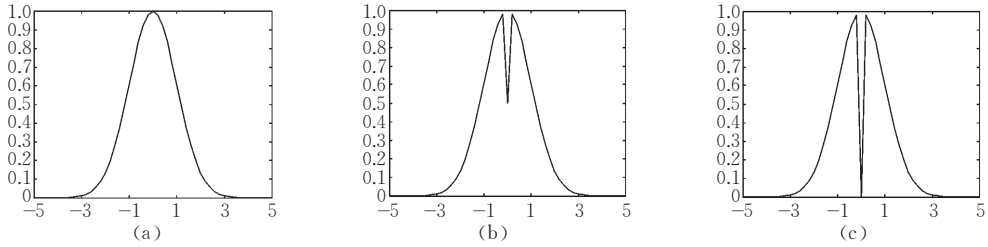


图 1 距离度量函数示意图

出.更重要的是,基于统一框架(3),容易得到扩展的线过程正则化方法和各向异性非线性扩散方法.

### 4 非线性数字滤波器的统一设计框架及分析

#### 4.1 数字滤波器统一设计框架的导出

本节基于图像复原统一框架(3),导出非线性数字滤波器的统一设计框架.根据变分理论,式(3)在结点  $x$  处的欧拉-拉格朗日方程为

$$\partial J_2(u)/\partial u|_x = 0 \tag{5}$$

即 
$$\sum_{y \in N_x} d(x,y) \rho'_R(u_x - u_y) + \lambda \rho'_D(u_x - u_x^0) = 0 \tag{6}$$

当稳健  $\rho$ -函数  $\rho_R$  和  $\rho_D$  均满足  $\lim_{t \rightarrow 0} \rho'(t)/t = c (> 0)$  时,式(6)可改写为

$$\sum_{y \in N_x} d(x,y) \frac{\rho'_R(u_x - u_y)}{(u_x - u_y)} (u_x - u_y) + \lambda \frac{\rho'_D(u_x - u_x^0)}{(u_x - u_x^0)} (u_x - u_x^0) = 0 \tag{7}$$

对式(7)作简单整理,并且令

$$h_{xy} = \rho'_R(u_x - u_y) / (u_x - u_y) \tag{8a}$$

$$h_{xx}^0 = \rho'_D(u_x - u_x^0) / (u_x - u_x^0) \tag{8b}$$

$$\omega\omega = \lambda h_{xx}^0 + \sum_{y \in N_x} h_{xy} \cdot d_{xy} \tag{8c}$$

$$\omega\omega_{xy} = (d_{xy} \cdot h_{xy}) / \omega\omega \tag{8d}$$

$$\omega_{xx}^0 = \lambda h_{xx}^0 / \omega\omega \tag{8e}$$

从而得到如下基于统一框架的非线性数字滤波器

$$u_x = \sum_{y \in N_x} \omega\omega_{xy} u_y + \omega_{xx}^0 u_x^0 \tag{9}$$

由式(8),(9)知,当  $\omega = 0$  时,  $d(x,y)$  的相应取法使得每个当前邻域的中心结点灰度值仅由原始图像中对应当前邻域的中心结点灰度值和前次滤波图像中当前邻域的邻域结点灰度值决定;前次滤波图像中当前邻域的中心结点“贡献”为零,从而强化了滤波过程中对原始图像信息的反馈机制.而事实上,这种信息反馈机制也是一种特殊形式的自适应性<sup>[7]</sup>.当  $\omega \neq 0$  时,前次滤波图像中当前邻域的中心结点“贡献”为  $\omega$ ,信息反馈机制有所减弱.

因此,基于统一框架的非线性数字滤波器具有如下特性:对于图像低对比度区域中的结点,灰度值的确定是基于更大邻域的距离各势异性、灰度各向同性的滤波过程;而对于图像高对比度区域中的结点,灰度值的确定则是基于更大邻域的双重异性滤波和图像信息反馈的过程.图 2 给出了统一框架的非线性数字滤波器在 2 阶邻域系统下的赋权有向图表示.其中,  $\omega\omega_i$  为滤波图像当前邻域中各邻域结点的双重权重,  $\omega\omega_0$  为当前邻域中心结点的权重,  $\omega_0$  为原始图像当前邻域中心结点的权重.

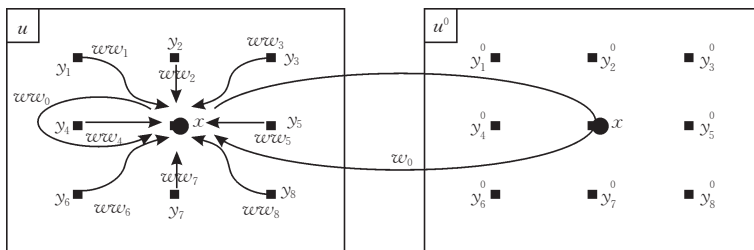


图 2 基于统一框架的非线性数字滤波器的赋权有向图表示

至此,本文导出了一种非线性数字滤波器的统一设计框架(Unified Designing Framework for Nonlinear Digital Filters,UDFNDF):

$$UDFNDF(\rho_R, \rho_D, d_{xy}, m, \lambda; (8), (9)) \tag{10}$$

具体地说,设计非线性数字滤波器必备以下要

素:正则化稳健  $\rho$ -函数  $\rho_R$ ,数据保真稳健  $\rho$ -函数  $\rho_D$ ,距离度量函数  $d(x,y)$ ,邻域系统阶  $m$  以及正则化参数  $\lambda$ .同时,式(8),(9)提供了基于非线性数字滤波器的具体平滑步骤.

## 4.2 稳健 $\rho$ -函数的选取与设计

在图像处理飞速发展的 20 多年中,图像处理学者从图像处理的角度提出了多种基于各向异性扩散机制的扩散函数.然而从稳健统计理论的角度看,这些扩散函数与 M-估计中的稳健  $\rho$ -函数有着惊人的相似之处,即对奇噪声异常点和边缘奇异点的鲁棒性处理机制:单调下降的有界约束.因此,稳健的 M-估计与各向异性扩散的物理机制之间存在着天然的联系,M-估计中的各种稳健  $\rho$ -函数均可应用于图像复原任务;同时,上述扩散函数在不严格意义下也可视为稳健统计理论中的稳健  $\rho$ -函数.此时,我们不得不再次惊异于现代数学理论与实际工程应用之间碰撞出的科学火花之美妙.Black<sup>[8]</sup>等人曾列举了各种 M-估计中的稳健函数,然而没有给出各种函数在图像复原中的具体应用效果.本文附录中对稳健  $\rho$ -函数作了进一步扩充,既包括图像处理学者提出的扩散函数,也包括稳健统计学者提出的稳健  $\rho$ -函数.

受稳健  $\rho$ -函数对边缘奇异点的鲁棒性处理机制的启发,本文基于拉普拉斯(Laplacian)核函数在正半轴上的单调下降性,导出一种新型边缘保持性稳健  $\rho$ -函数.令

$$\rho'(t)/t = \exp\{-|t|/\sigma\} \quad (11)$$

当  $t > 0$  时,对式(11)两边积分,得

$$\rho(t) - \rho(0) = \int_0^t s \exp\{-s/\sigma\} ds \quad (12)$$

进一步化简,得

$$\rho(t) = -\sigma^2(1 + t/\sigma)\exp\{-t/\sigma\} + \sigma^2 + \rho(0) \quad (13)$$

显然可令  $\rho(0) = 0$ ,从而

$$\rho(t) = -\sigma^2(1 + t/\sigma)\exp\{-t/\sigma\} + \sigma^2 \quad (14)$$

当  $t \leq 0$ ,令  $\rho(t) = \rho(-t)$ ,从而导出如下新型稳健  $\rho$ -函数,记为  $\rho_{\text{Laplace}}$ :

$$\rho_{\text{Laplace}}(t) = -\sigma^2(1 + |t|/\sigma)\exp\{-|t|/\sigma\} + \sigma^2 \quad (15)$$

## 4.3 稳健 $\rho$ -函数的稳健性比较

为了分析不同稳健  $\rho$ -函数对噪声异常点和数据奇异点的处理能力,Hampel 等人<sup>[18]</sup>提出一种基于影响函数的稳健性分析方法,并证明影响函数与稳健  $\rho$ -函数的导函数成正比例关系.通过导函数在异常和奇异区域的单调性可初步判定对应稳健  $\rho$ -函数的稳健性强弱:导函数单调递增时,稳健性低,抑制噪声异常点和保持数据奇异点的能力弱;单调递减时,稳健性高,抑制噪声异常点和保持数据奇异

点的能力强.

纵观附录中的 17 个稳健  $\rho$ -函数( $\rho_{L_\alpha}, \alpha \in (1, 2]$ 除外),形状不同,性态各异.然而基于上述稳健性分析方法,易得到以下初步结论: $\rho_{L_\alpha}, \alpha \in (1, 2]$ 的导函数在异常和奇异区域无界且严格单调递增,稳健性低,边缘保持性弱; $\rho_{\text{Fair}}$ 和  $\rho_{\text{HS}}$ 的导函数在异常和奇异区域的极限为有界常数, $\rho_{L_1}$ 和  $\rho_{\text{Huber}}$ 的导函数在异常和奇异区域有界且常数不变,它们的稳健性均高于  $\rho_{L_\alpha}, \alpha \in (1, 2]$ ,边缘保持性相对较强;其它稳健  $\rho$ -函数的导函数在奇异点区域均有界严格单调下降,稳健性均高于前两者,最适于边缘保持的图像复原.

## 4.4 统一设计框架的理论联系

### (1) 广义双边滤波器

2001 年,Elad 通过证明双边滤波器是双边加权的最小二乘能量泛函在 Jacobi 算法下的单步迭代格式<sup>[7]</sup>,建立了与 Bayesian 统计下 MRF-MAP 框架之间的理论联系,然而证明过程极其繁琐.本文中,统一设计框架(10)的导出事实上给出了一种更为简洁明了的推导过程.特别地,当式(9)中  $\lambda$  取值为 0 且  $\rho_R$ 和  $d(x, y)$ 均取高斯核函数时,式(9)便退化为 Tomasi 和 Manduchi 的双边滤波器.然而,非常有意思的是,从稳健统计理论的观点看,双边滤波器中的高斯核函数本质来源于稳健  $\rho$ -函数.事实上,仿照式(15)的推导过程可得  $\rho(x) = -\sigma^2 \exp\{-x^2/2\sigma^2\} + \sigma^2$ ,记为  $\rho_{\text{Gaussian}}$ .因此,当  $\rho_R$ 取一般性稳健  $\rho$ -函数时,容易得到更为一般的广义双边滤波器.下文中的实验结果显示, $\rho_{\text{Gaussian}}$ 不是最理想的边缘保持函数.事实上,本文提出的  $\rho_{\text{Laplace}}$ 比  $\rho_{\text{Gaussian}}$ 具有更强的边缘保持性.

### (2) 扩展数字 TV 滤波与自适应平滑

2001 年,Chan 等人<sup>[5]</sup>基于数字 TV 模型提出一种数字 TV 滤波器.显然基于本文统一设计框架,容易将其扩展到为双边滤波耦合的数字 TV 滤波器.另外,当式(9)中  $\rho_R$ 取  $L_1$ 范数时,式(9)便退化为数字 TV 滤波器的一种简化形式<sup>[13]</sup>.同样地,基于本文统一设计框架,容易得到兼具双重异性加权机制和信息反馈机制的自适应平滑<sup>[23]</sup>滤波器.

### (3) 扩展线过程正则化与各向异性扩散

由 3.2 节知,基于图像复原统一框架(3),可以分别导出扩展的线过程正则化方法和各向异性扩散方法.因此,它们与本文中基于统一设计框架的非线性数字滤波器实质上是等价的.

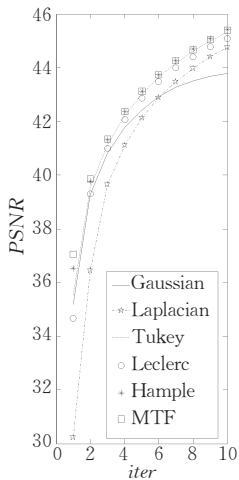
## 5 实验结果与分析

4.3 节从稳健统计理论的角度比较分析了各种稳健  $\rho$ -函数的稳健性. 本节则基于各种稳健  $\rho$ -函数在图像复原中的具体应用效果, 从图像处理的角度比较分析它们在边缘保持方面的鲁棒性. 为客观评价图像平滑的质量, 采用如下峰值信噪比 (Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR) 作为度量

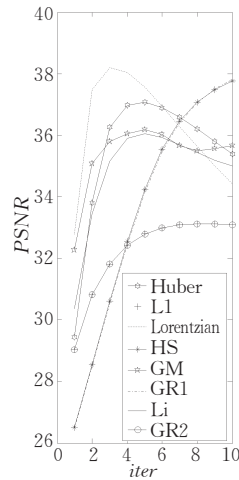
$$PSNR = 10 \log_{10} \left\{ \frac{\max_{i,j} \{x_{i,j}\}^2}{\sum_{i,j} (x_{i,j} - y_{i,j})^2 / M \times N} \right\} \quad (16)$$

其中,  $x$  是大小为  $M \times N$  的原始图像,  $y$  为观测图像或者平滑图像. 本文所有计算均在 MATLAB 平台下进行, 且参数选取基于 PSNR 最大值原则. 实验图像分别取一幅人工图像 (图 3(a)) 和一幅自然图像 (图 3(b)), 大小均为  $128 \times 128$ .

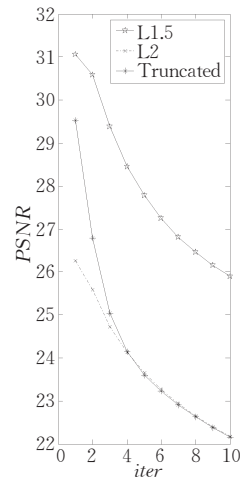
通过对图 3(a) 加入方差为 15 的零均值高斯噪声, 得到一幅 PSNR 为 24.5549 的退化图像. 分别基于附录中的 17 个稳健  $\rho$ -函数, 利用本文非线性数字滤波器对退化图像迭代 10 次进行平滑, 共同参数值为: 邻域系统的阶  $m=3$ , 正则化参数  $\lambda=0$ ,  $d(x,y)$  取修正高斯核函数且  $\sigma^2=1.5$ ,  $\omega=0$ .



(a) 函数 14, 15, 8, 9, 2, 1



(b) 函数 7, 10, 12, 3, 11, 13, 16, 4



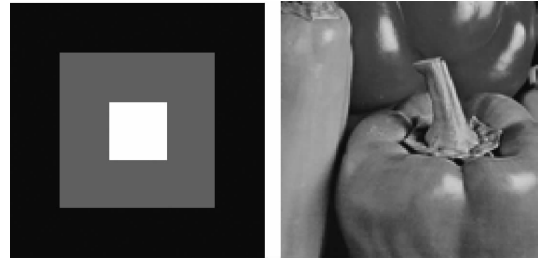
(c) 函数 5, 17, 6

图 4 PSNR 变化曲线

表 1 图 3(a) 实验所对应的各稳健  $\rho$ -函数的 PSNR 平均值以及最大 PSNR 值

序号	最大值	平均值	序号	最大值	平均值	序号	最大值	平均值
14	45.4353	44.6510	7	38.2044	37.6461	16	33.0991	33.0796
15	45.3951	44.6276	10	37.7627	36.8616	4	33.1109	33.0779
8	45.3439	44.5614	12	37.8204	36.8479	5	31.0687	29.4532
9	45.0901	44.3487	3	37.0682	36.7583	17	29.5209	25.8185
2	44.7632	43.9001	11	36.1741	35.9479	6	26.2571	24.8696
1	43.7852	43.4259	13	36.0554	35.7993	0	24.5549	

注. 序号 0 对应噪声图像的 PSNR 值.



(a) 人工图像

(b) 自然图像

图 3

图 4 分别给出了利用各种稳健  $\rho$ -函数迭代 10 次的 PSNR 变化曲线 (横坐标表示迭代次数, 纵坐标表示 PSNR 值). 对各稳健  $\rho$ -函数 10 次迭代中最大的 5 个 PSNR 求平均值. 图 5 给出了 17 个平均值的大小比较示意图. 表 1 列出了对应各稳健  $\rho$ -函数的 PSNR 平均值以及最大 PSNR 值. 根据图像平滑的视觉效果、最大 PSNR 值以及 PSNR 平均值, 17 个稳健  $\rho$ -函数的边缘保持性由强至弱的大致排序为 14, 15, 8, 9, 2, 1; 7, 10, 12, 3, 11, 13, 16, 4; 5, 17, 6. 按照该顺序, 图 6 给出了基于各稳健  $\rho$ -函数的对应最大 PSNR 值的平滑图像和具体参数值. 由最大 PSNR 值和滤波过程的视觉效果知, 对于强边缘图像, 函数 14, 15, 8, 9, 2, 1 的边缘保持性明显强于其它稳健  $\rho$ -函数.

通过对图 3(b) 对加入方差为 15 的零均值高斯

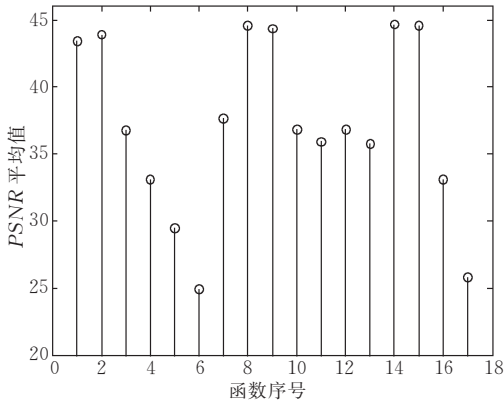


图 5 PSNR 平均值大小比较示意图(由大至小排序为 14, 15,8,9,2,1; 7,10,12,3,11,13,16,4; 5,6,17)

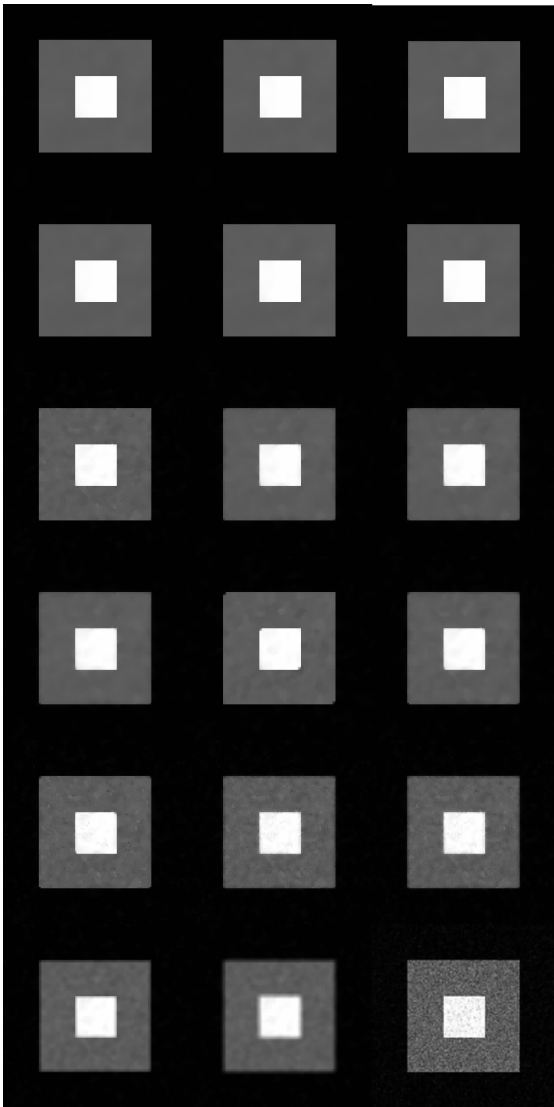
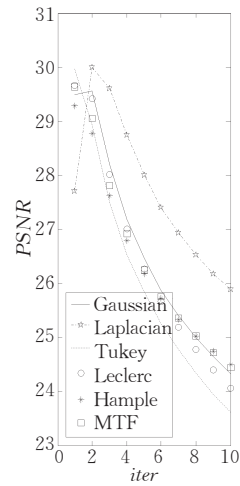


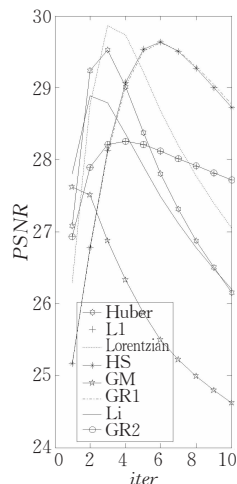
图 6 对应各稳健  $\rho$ -函数的平滑图像(从左至右从上到下依次对应 14,15,8,9,2,1,7,10,12,3,11,13,16,4,5,17,6 及噪声图像)和具体参数值(14: $a=50, b=60, r=70$ ;15: $c=1, d=4 \times 1E+3, \theta=1$ ; 8: $\sigma=70$ ;9: $\sigma=50$ ;2: $\sigma=20$ ;1: $\sigma=40$ ;7: $\sigma=20$ ;3: $k=5$ ;13: $\sigma=1$ ; 5: $\alpha=1.5$ ; 17: $\beta=70 \wedge 2$ )

噪声,得到一幅 PSNR 为 23.4565 的退化图像. 分别基于附录中的 17 个稳健  $\rho$ -函数,利用本文非线性数字滤波器对退化图像迭代 10 次进行平滑,共同参数值为:邻域系统的阶  $m=3$ ,正则化参数  $\lambda=0$ ,  $d(x,y)$ 取修正高斯核函数且  $\sigma^2=1.5, \omega=0$ .

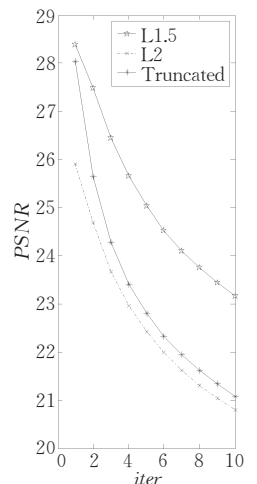
图 7 分别给出了利用各稳健  $\rho$ -函数迭代 10 次的 PSNR 变化曲线(横坐标表示迭代次数(item),纵坐标表示 PSNR 值). 对各稳健函数 10 次迭代中最大的 5 个 PSNR 求平均值. 图 8 给出了这 17 个平均值的大小比较示意图. 表 2 列出了对应各稳健  $\rho$ -函数的 PSNR 平均值以及最大 PSNR 值. 根据图像平滑的视觉效果、最大 PSNR 值以及 PSNR 平均值,17 个稳健  $\rho$ -函数的边缘保持性由强至弱的大致排序为 10,12,7,2,3; 13,1,16,4,9,15,8,14; 5,6,11,17. 按照该顺序,图 9 给出了基于各稳健  $\rho$ -函数的对应最大 PSNR 值的平滑图像和具体参数值. 由最大 PSNR 值和滤波过程的视觉效果知,对于自然图像,函数 10, 12,7,2,3 边缘保持性稍强于其它稳健  $\rho$ -函数.



(a) 函数14,15,8,9,2,1



(b) 函数7,10,12,3,11,13,16,4



(c) 函数5,17,6

图 7 PSNR 变化曲线



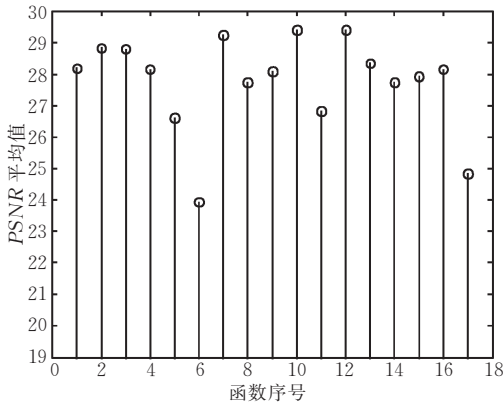


图 8 PSNR 平均值大小比较示意图(由大至小排序为 10,12,7,2,3; 13,1,16,4,9,15,8,14; 5,6,11,17)

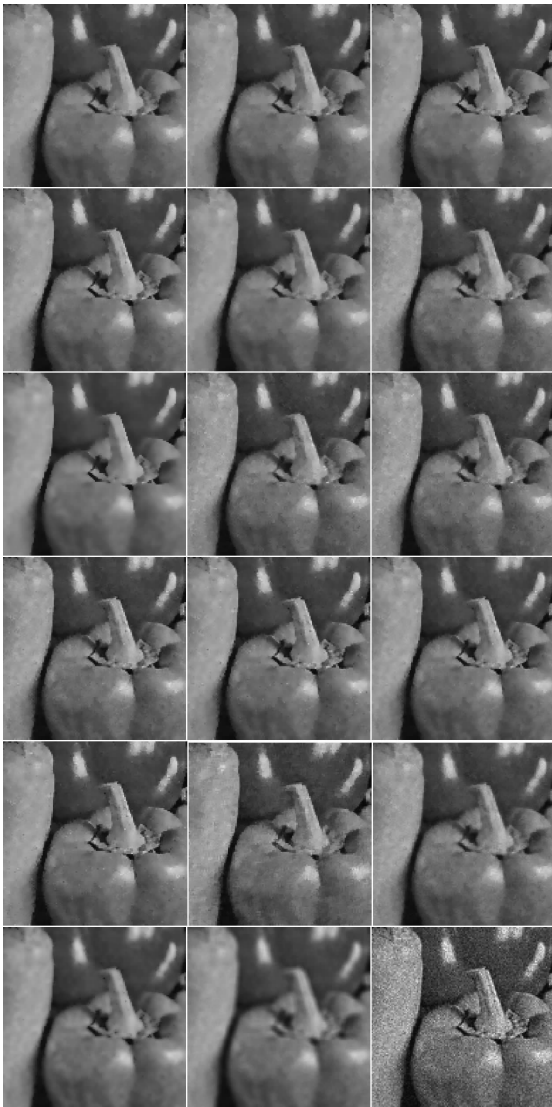


图 9 对应各稳健  $\rho$ -函数的平滑图像(从左至右从上到下依次对应 10,12,7,2,3,13,1,16,4,9,15,8,14,11,5,17,6 及噪声图像)和具体参数值(7: $\sigma=7$ ;2: $\sigma=20$ ;3: $k=4$ ;13: $\sigma=1$ ;1: $\sigma=30$ ;9: $\sigma=45$ ;15: $c=1$ , $d=2 \times 1E+3$ , $\theta=1$ ;8: $\sigma=65$ ;14: $a=20$ , $b=30$ , $r=40$ ;5: $\alpha=1.5$ ;17: $\beta=60^{\wedge}2$ )

表 2 图 3(b)所对应的各稳健  $\rho$ -函数的 PSNR 平均值以及最大 PSNR 值

序号	最大值	平均值
10	29.6351	29.4054
12	29.6229	29.3957
7	29.8587	29.2503
2	30.0054	28.8164
3	29.5285	28.7906
13	28.8859	28.3472
1	29.5560	28.1766
16	28.2569	28.1632
4	28.2569	28.1604
9	29.6647	28.0766
15	29.6282	27.9322
8	29.9720	27.7475
14	29.2794	27.7298
11	27.6154	26.8379
5	28.3874	26.5995
17	28.0313	24.8334
6	25.9012	23.9328
0	23.4596	

注. 序号 0 对应噪声图像的 PSNR 值.

由上述两组实验结果知,本文的稳健  $\rho$ -函数  $\rho_{Laplacian}$  在强边缘图像和自然图像平滑中都显示了鲁棒性较强的边缘保持能力.为了得到相对公正的边缘保持性比较,对表 1 和表 2 中对应各稳健  $\rho$ -函数的两组 PSNR 平均值再对应求平均值(见表 3).同时,图 10 给出了这 17 个平均值的大小比较示意图.从而,各稳健  $\rho$ -函数边缘保持性由强至弱的最终排序为 2,15,9,14,8,1; 7,10,12,3,13,11,16,4; 5,17,6.

表 3 两组图像对应各稳健  $\rho$ -函数的 PSNR 平均值

序号	平均值	序号	平均值	序号	平均值
2	36.3582	7	33.4482	16	30.6214
15	36.2799	10	33.1335	4	30.6192
9	36.2127	12	33.1218	5	28.0264
14	36.1904	3	32.7745	17	25.3259
8	36.1544	13	32.0733	6	24.4012
1	35.8013	11	31.3929		

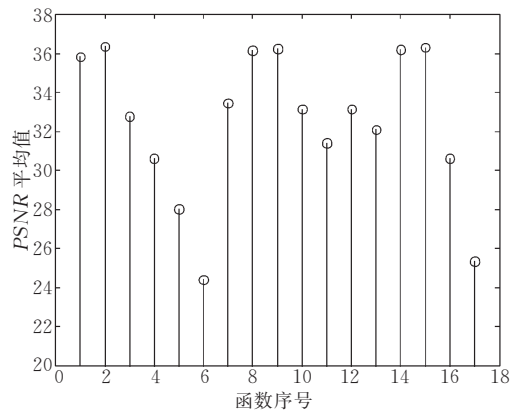


图 10 PSNR 平均值大小比较示意图(由大至小排序为 2,15,9,14,8,1; 7,10,12,3,13,11,16,4; 5,17,6)



根据上述实验及最终排序结果知,函数  $\rho_{\text{Laplacian}}$  是本文非线性数字滤波器较为理想的  $\rho$ -函数选择.一方面,该函数具有鲁棒的边缘保持性,可与著名稳健统计学家 Tukey 和 Hampel 等人提出的稳健函数  $\rho_{\text{Tukey}}$ ,  $\rho_{\text{Hampel}}$  相媲美,甚至优于 Huber 提出的  $\rho_{\text{Huber}}$ .在自然图像平滑中,表 2 显示了  $\rho_{\text{Laplacian}}$  略高一筹的性能:两次迭代即达到最大 PSNR 值 (30.0054),且为各稳健  $\rho$ -函数之最;同时在 10 次滤波过程中,图像中的边缘特征始终得到较好保持.另一方面,实验结果显示  $\rho_{\text{Laplacian}}$ ,  $\rho_{\text{MFT}}$ ,  $\rho_{\text{Leclerc}}$ ,  $\rho_{\text{Hampel}}$ ,  $\rho_{\text{Tukey}}$  等稳健  $\rho$ -函数同样比  $\rho_{\text{Gaussian}}$  具有更强的边缘保持性.因此,本文在提出非线性数字滤波器统一设计框架的同时,也对双边滤波器进行了极为有效的推广.另外值得一提的是,相对于  $\rho_{\text{Tukey}}$ ,  $\rho_{\text{Hampel}}$ ,  $\rho_{\text{MFT}}$  等经典稳健  $\rho$ -函数,本文  $\rho_{\text{Laplacian}}$  的设计直观明了,形

式简洁,参数单一,因此尤为值得进一步深入研究和推广应用.

一个有意思的现象是:从基于影响函数的稳健性分析方法可知,函数  $\rho_{\text{Truncated}}$  的稳健性较高;然而从图像复原的实际效果来看,该函数的边缘保持能力却差强人意.究其原因,  $\rho_{\text{Truncated}}$  的影响函数不存在过渡区域,“恶意截断”导致边缘影响点与部分噪声异常点相混淆.

综上所述,非线性数字滤波器统一设计框架中正则化函数  $\rho_R$  的选择可以基于以下排序的稳健  $\rho$ -函数:  $\rho_{\text{Laplacian}}$ ,  $\rho_{\text{MFT}}$ ,  $\rho_{\text{Leclerc}}$ ,  $\rho_{\text{Hampel}}$ ,  $\rho_{\text{Tukey}}$ ,  $\rho_{\text{Gaussian}}$ ,  $\rho_{\text{Lorentzian}}$ ,  $\rho_{\text{HS}}$ ,  $\rho_{\text{GRI}}$ ,  $\rho_{\text{Huber}}$ ,  $\rho_{\text{Li}}$ ,  $\rho_{\text{GM}}$ ,  $\rho_{\text{LI}}$ . 本文建议采用  $\rho_{\text{Laplacian}}$ ,  $\rho_{\text{Leclerc}}$ ,  $\rho_{\text{Tukey}}$ ,  $\rho_{\text{Gaussian}}$ ,  $\rho_{\text{Lorentzian}}$ ,  $\rho_{\text{HS}}$ . 一方面在于它们较为鲁棒的边缘保持能力,另一方面在于它们简洁明了的形式和较少的参数.图 11 中的各行分别给出了第二组实验中利用  $\rho_{\text{Laplacian}}$ ,  $\rho_{\text{Leclerc}}$ ,  $\rho_{\text{Tukey}}$ ,  $\rho_{\text{Gaussian}}$ ,  $\rho_{\text{Lorentzian}}$ ,  $\rho_{\text{HS}}$  迭代 2, 6, 10 次的平滑图像.

## 6 结 语

本文旨在研究非线性数字滤波器的统一设计框架问题,同时明晰了数字滤波器与基于图像建模的最小能量泛函方法之间的理论联系.基于稳健统计理论和双边滤波思想,本文首先建立了一种鲁棒的图像复原统一能量泛函.该能量泛函充分融合了双边滤波的双重异性加权机制和稳健  $\rho$ -函数对边缘奇异点的鲁棒性处理机制,因而具备更强的边缘保持能力.随后,基于图像复原统一框架的欧拉-拉格朗日方程,导出一种非线性数字滤波器的统一设计框架.特别地,在此统一框架下,双边滤波<sup>[6]</sup>、数字 TV 滤波<sup>[7]</sup>以及自适应平滑<sup>[23]</sup>均可进行相应的扩展.同时,文中系统比较了各种稳健  $\rho$ -函数在边缘保持方面的掎性,并提出一种新型边缘保持性稳健  $\rho$ -函数,即  $\rho(x) = -\sigma^2(1 + |x|/\sigma)\exp\{-|x|/\sigma\} + \sigma^2$ . 不论是视觉效果方面还是峰值信噪比 (PSNR) 方面,大量实验结果均显示了本文统一设计框架的合理性和新型稳健  $\rho$ -函数的边缘保持性.

注意到,文中未考虑数据保真稳健  $\rho$ -函数  $\rho_D$  的选取问题.事实上,基于 MRF-MAP 框架,当噪声类型为高斯噪声情形时,  $\rho_D$  选取为 L2 范数度量较为合理,对应正态概率分布;而当噪声类型为椒盐噪声情形时,  $\rho_D$  选取稳健  $\rho$ -函数较为合理,如  $\rho_{\text{Laplacian}}$ ,  $\rho_{\text{Leclerc}}$ ,  $\rho_{\text{Tukey}}$ ,  $\rho_{\text{Gaussian}}$ ,  $\rho_{\text{Lorentzian}}$ ,  $\rho_{\text{HS}}$ ,  $\rho_{\text{LI}}$ , 对应广义正态概率分布.由于篇幅有限,椒盐噪声情形以及混合噪

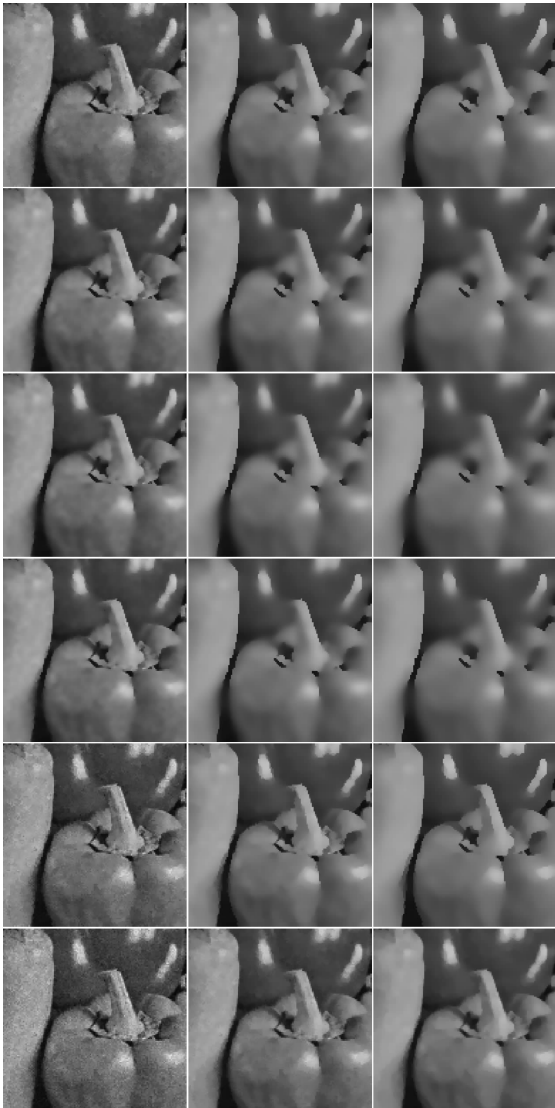


图 11 分别利用  $\rho_{\text{Laplacian}}$ ,  $\rho_{\text{Leclerc}}$ ,  $\rho_{\text{Tukey}}$ ,  $\rho_{\text{Gaussian}}$ ,  $\rho_{\text{Lorentzian}}$ ,  $\rho_{\text{HS}}$  迭代 2, 6, 10 次的平滑图像

声情形的图像平滑将另文讨论.

参 考 文 献

[1] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 1992, 60(1-4): 259-268

[2] Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on PAMI*, 1990, 12(7): 629-639

[3] Black M J, Sapiro G, David H M, David H. Robust anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1998, 7(3): 421-432

[4] Tomasi C, Manduchi R. Bilateral filtering for gray and color images//*Proceedings of the 6th International Conference Computer Vision*. New Delhi, India, 1998: 839-846

[5] Chan T F. The digital TV filter and nonlinear denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(2): 231-241

[6] Barash D. Bilateral filtering and anisotropic diffusion: Towards a unified viewpoint. *Hewlett-Packard Laboratories Technical Report; HPL-2000-18(R.1)*, 2000

[7] Elad M. On the bilateral filter and ways to improve it. *IEEE Transactions on Image Processing*. 2002, 11(10): 1141-1151

[8] Black M, Rangarajan A. On the unification of line processes, outlier rejection, and robust statistics with applications in early vision. *International Journal of Computer Vision*, 1996, 19(1): 57-92

[9] Charbonnier P, Laure B F et al. Deterministic edge-preser-

ving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1997, 6(2): 298-311

[10] Geman S, Geman D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence*, 1984, 6(6): 721-741

[11] Himayat N, Kassam S A. Approximate performance analysis of edge preserving filters. *IEEE Transactions*, 1993, SP- 41(9): 2764-2777

[12] Ramponi G. A rational edge-preserving smoother//*Proceedings of the International Conference on Image Processing*. Washing DC, USA, 1995, 1: 151-154

[13] Farsiu S., Robinson M. D.. Fast and robust multi-frame super resolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, 13(10): 1327-1344

[14] Barash D. A fundamental relationship between bilateral filtering, adaptive smoothing, and the nonlinear diffusion equation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002, 24(6): 844

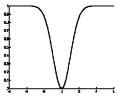
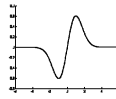
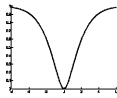
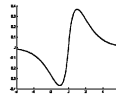
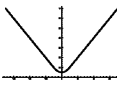
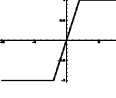
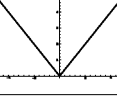
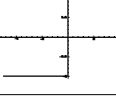
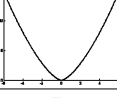
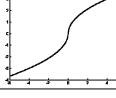
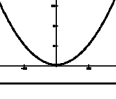
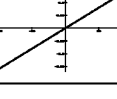
[15] Saint-Marc P, Chen J S, Medioni G. Adaptive smoothing: a general tool for early vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1991, 13(6): 514

[16] Nikolova M. A variational approach to remove outliers and impulse noise. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, 20(1): 99-120

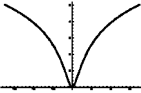
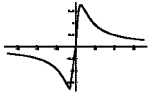
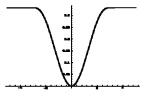
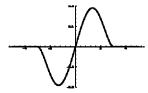
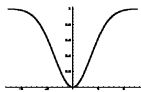
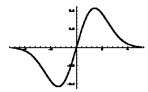
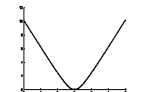
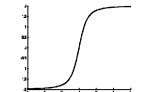
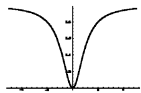
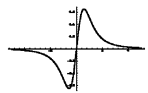

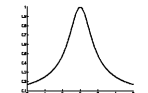

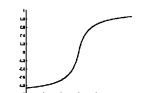
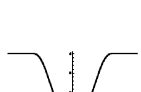

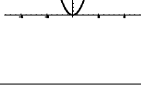

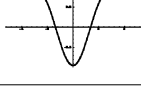
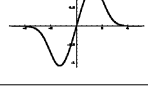
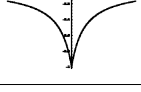
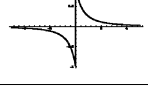
[17] Huber P J. *Robust Statistics*. New York: Wiley, 1981

[18] Hampel F R, Rousseeuw P J, Ronchetti E M, Stahel W. *Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions*. New Yoke: Wiley, 1986

附 录. 稳健  $\rho$ -函数.

序号	函数名	表达式	函数示意图	导函数示意图	函数凹凸性	参考文献
1	$\rho_{\text{Gaussian}}$	$\rho(x) = -\sigma^2 \exp\{-x^2/2\sigma^2\} + \sigma^2$			凹性	本文
2	$\rho_{\text{Laplacian}}$	$\rho(x) = -\sigma^2(1 +  x /\sigma) \exp\{ x /\sigma\} + \sigma^2$			凹性	本文
3	$\rho_{\text{Huber}}$	$\rho(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq k \\ k x  - k^2/2, & x > k \end{cases}$			凸性	文献[8, 17]
4	$\rho_{L1}$	$\rho(x) =  x $			凸性	文献[8, 17]
5	$\rho_{L\alpha}$	$\rho(x) = x^\alpha, \alpha \in (1, 2)$			凸性	文献[8, 17]
6	$\rho_{L2}$	$\rho(x) = x^2$			凸性	文献[8, 17]

(续 表)

序号	函数名	表达式	函数示意图	导函数示意图	函数凹凸性	参考文献
7	$\rho_{\text{Lorentzian}}$	$\rho(x) = \log(1 + x^2/2\sigma^2)$			凹性	文献[8]
8	$\rho_{\text{Tukey}}$	$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{x^4}{\sigma^4} + \frac{x^6}{3\sigma^6}, &  x  < \sigma \\ 1/3, &  x  \geq \sigma \end{cases}$			凹性	文献[8]
9	$\rho_{\text{Leclerc}}$	$\rho(x) = 1 - \exp\{-x^2/\sigma^2\}$			凹性	文献[8]
10	$\rho_{\text{HS}}$	$\rho(x) = 2(1 + x^2)^{1/2} - 2$			凸性	文献[12]
11	$\rho_{\text{GM}}$	$\rho(x) = x^2/(1 + x^2)$			凹性	文献[9]
12	$\rho_{\text{GR1}}$	$\rho(x) = 2\log(\cosh(x))$			凹性	文献[9]
13	$\rho_{\text{Li}}$	$\rho(x) = 1 +  x /\alpha - \log(1 +  x /\alpha)$			凸性	文献[16]
14	$\rho_{\text{Hampel}}$	$\rho(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq  x  < a \\ a^2 + 2a( x  - a), & a <  x  \leq b \\ a^2 + 2a(b - a) - \frac{a(r -  x ^2)}{r - b} + a(r - b), & b <  x  \leq r \\ a^2 + 2a(b - a)a(r - b), & r <  x  \end{cases}$			凹性	文献[18]
15	$\rho_{\text{MFT}}$	$\rho(x) = -1/c \cdot \log\{e^{(-cx^2)} + e^{(-cd)}\}$			凹性	文献[8]
16	$\rho_{\text{GR2}}$	$\rho(x) = -1/(1 +  x )$			凹性	文献[8]
17	$\rho_{\text{Truncated}}$	$\rho(x) = \begin{cases} x^2, &  x  \leq \sqrt{\beta} \\ \beta, &  x  > \sqrt{\beta} \end{cases}$			凹性	文献[18]



**SHAO Wen-Ze**, born in 1981, Ph. D. candidate. His research interests include image modeling, image restoration, image interpolation, super-resolution image reconstruction and mathematical inverse problem.

**WEI Zhi-Hui**, born in 1963, professor, Ph. D. supervisor. His main research interests include image processing, image modeling, multi-scale analysis, digital watermark, and image coding and compressing.

## Background

Image filtering is one of the most fundamental problems in the field of image processing. The importance of image filtering not only consists in that it is capable of removing kinds of random noises; but also that signal details may be analyzed and processed in a more direct fashion for edge preservation. Recently, a novel filtering process called bilateral filtering was proposed by Tomasi and Manduchi, which smoothes images while preserving edges by means of a nonlinear combination of nearby image values, preferring near values to distant values in both domain and range. And thereafter, it has become the focus of many researchers from different countries and lots of progress in its theory and application has been made by now. However, it is still relatively fresh for Chinese

researchers, and currently there has not emerged any related reports on bilateral filtering in China. In this paper, the authors construct a unified designing framework for nonlinear digital filters based on robust statistics and the idea of bilateral filtering. Meanwhile, the authors prove that bilateral filtering essentially emerges from the Bayesian approach, but with a more concise penalty functional than Elad's. Under the unified framework, bilateral filtering can be further generalized and renamed robust bilateral filtering, since its range weight essentially originates from the robust error norms. Besides, the authors also made a systematical comparison of the robustness of various robust error norms in edge-preservation.