第20卷 第7期 物 理 学 报 Vol. 20, No. 7
1964 年 7 月 ACTA PHYSICA SINICA July, 1964

同軸圓柱系統微变問題的静电解*

石 寿 林

一

我們从一种較为特殊但又是十分典型的同軸結构的探討开始，它的截面在极坐标系統中(原点置于軸心)具有

$$\rho_1 = r_1(1 + \varepsilon_1 \cos n\varphi), \qquad \rho_2 = r_2(1 + \varepsilon_2 \cos(\varphi - \varphi_0)). \tag{1}$$

其中 r_1 和 r_2 系变形前外的导体因截面半径；ε_1 和 ε_2 則为表征其变形特点的小参数；φ_0表示相似变形后內外导体叉开的一个角度；而 n 为某一正整数．象这样的同軸系統，不妨形象化称为“n 波”同軸系統．

我們知道，二維拉普拉斯方程的环內問題，在极坐标系統中的一般解可以用圓諧函数来組合[1]：

$$V(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} \{(A_m r^m + B_m r^{-m}) \cos m\varphi + + (C_m r^m + D_m r^{-m}) \sin m\varphi\}, \tag{2}$$

其中 A_0, B_0 和 A_m, B_m, C_m 及 D_m $(m = 1, 2, \cdots)$ 系由內外导体上边界条件

$$V|_{r=\rho_1} = 0, \qquad V|_{r=\rho_2} = V_a \tag{3}$$

来确定的积分常数．由于理想系統变形的結果，它們可以展开为小参数 ε_1 和 ε_2 的級数

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \sum_{i+j=0}^{\infty} a_{mij}\varepsilon_1^i \cdot \varepsilon_2^j, \quad B_m = \sum_{i+j=0}^{\infty} b_{mij}\varepsilon_1^i \cdot \varepsilon_2^j, \\ C_m &= \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{mij}\varepsilon_1^i \cdot \varepsilon_2^j, \quad D_m = \sum_{i+j=0}^{\infty} d_{mij}\varepsilon_1^i \cdot \varepsilon_2^j. \end{aligned}\quad (m = 0, 1, 2, \cdots)\right\} \tag{4}$$

如果把这个表达式連同式(2)一起代入边界条件(3)，将可以定出級数展开中的諸系数 a_{mij}, b_{mij}, c_{mij}, d_{mij}．在一次近似下边值問題的解

$$V(r, \varphi) = \frac{V_a}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \left\{\ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{2n}} \left[-\varepsilon_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \left(1 - \left(\frac{r_2}{r}\right)^{2n}\right) \cos n\varphi - - \varepsilon_2 \left(\frac{r_2}{r}\right)^n \left(1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^{2n}\right) \cos n(\varphi - \varphi_0)\right]\right\}, \tag{5}$$

而电位函数(5)又可以取作如下复数电位函数的实部：

$$W = V + jV = \frac{V_a}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \left\{\ln \frac{z}{r_1} + \frac{1}{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{2n}} \cdot \left[-\varepsilon_1 \left(\frac{z}{r_1}\right)^n \left(1 - \left(\frac{z}{r_2}\right)^{-2n}\right) - - \varepsilon_2 \left(\frac{z}{r_2} e^{-j\varphi_0}\right)^{-n} \left(1 - \left(\frac{z}{r_1} e^{-j\varphi_0}\right)^{2n}\right)\right]\right\}. \tag{6}$$

* 1963 年 4 月 10 日收到.

因而通量函数及由此求得的同軸系統单位长度上的电容[1]

$$V(r,\varphi)=\frac{V_a}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\left\{\varphi+\frac{1}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{2n}}\left[-\varepsilon_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^n\left(1+\left(\frac{r_2}{r}\right)^{2n}\right)\sin n\varphi+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\varepsilon_2\left(\frac{r_2}{r}\right)^n\left(1+\left(\frac{r}{r_1}\right)^{2n}\right)\sin n(\varphi-\varphi_0)\right]\right\} \tag{7}$$

及

$$C=\frac{\epsilon|V(2\pi)-V(0)|}{|V_a|}=\frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{r_1}{r_2}}, \tag{8}$$

其中 ϵ 为內外导体間所填充的媒質的介电常数. 这最后一个表达式說明了在一次近似下同軸系統的这种特殊变形对于单位长度上的电容幷无影响. 以后还将看到，只要变形前后其平均半径不变这一結論总是对的. 变形后同軸系統中电位梯度的絕对值

$$E=\left|\frac{dW}{dz}\right|=\left|\frac{V_a}{z\ln\frac{r_2}{r_1}}\left\{1+\frac{n}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{2n}}\left[-\varepsilon_1\left(\frac{z}{r_1}\right)^n\left(1+\left(\frac{z}{r_2}\right)^{-2n}\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\varepsilon_2\left(\frac{z}{r_2}e^{-j\varphi_0}\right)^{-n}\left(1+\left(\frac{z}{r_1}e^{-j\varphi_0}\right)^{2n}\right)\right]\right\}\right|. \tag{9}$$

現在我們来研究几个常見的截面变形作为应用举例:

(1) 同軸圓柱系統的橢化

同軸圓柱系統的橢化，文献[2]中曾在共焦的假定下借助于复变函数論方法进行了研究，用这里已給出的方法，能够得到类似的結果，但幷不要求这种过苛的"共焦"假定，而且允許两橢圓长軸間有一个夾角 φ_0. 若令 e_1 和 e_2 分别为外內导体橢化后之橢圓率，幷定义其等效圓之半径分别为(見图 1)

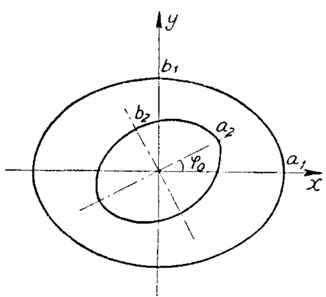

图 1

$$r_1=\frac{a_1+b_1}{2},\quad r_2=\frac{a_2+b_2}{2},$$

其中 a_1, b_1 和 a_2, b_2 分别为与其等效圓相应的橢圓的长短軸. 可以証明这个定义与另一种假定变形前后周长相等的定义在 e^2 級上是等效的，因此这样的定义較文献 [2] 中的定义要合理些. 这样在极坐标系統中，两橢圓的方程

$$\left.\begin{aligned}\rho_1&=a_1\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}=r_1\left\{1+\frac{1}{4}e_1^2\cos 2\varphi+\cdots\right\},\\ \rho_2&=a_2\sqrt{1-e_2^2\sin^2\varphi}=r_2\left\{1+\frac{1}{4}e_2^2\cos 2\varphi+\cdots\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

当略去其中关于橢圓率二次方以上的各項，幷令 $\varepsilon_1=\frac{1}{4}e_1^2$, $\varepsilon_2=\frac{1}{4}e_2^2$，可以看出，这正是(1)式中 $n=2$ 的一个特例. 故

$$V(r,\varphi)=\frac{V_a}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\left\{\ln\frac{r}{r_1}+\frac{1}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4}\left[-\frac{1}{4}e_1^2\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left(1-\left(\frac{r_2}{r}\right)^4\right)\cos 2\varphi-\right.\right.$$

$$-\frac{1}{4}e_2^2\left(\frac{r_2}{r}\right)^2\left(1-\left(\frac{r}{r_1}\right)^4\right)\cos 2(\varphi-\varphi_0)\Big]\Big\}. \tag{11}$$

当 $r_2/r_1 \ll 1$ 时，这样在我們分析同軸系統內导体表面电位梯度最大值时，式(9)中的第一項将可以略去

$$E_{\max}=\frac{V_a}{r_2\ln\frac{r_1}{r_2}\cdot\left(1+\frac{e_2^2}{4}\right)}\cdot\left\{1+\frac{1}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4}\cdot\frac{1}{2}e_2^2\left[1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4\left(1+\frac{1}{4}e_2^2\right)^4\right]\left(1+\frac{e_2^2}{4}\right)^{-2}\right\}\doteq E_0\left(1+\frac{e_2^2}{4}\right), \tag{12}$$

其中 $E_0=\dfrac{V_a}{r_2\ln\frac{r_1}{r_2}}$，而最大电位梯度的变化率

$$\Delta E/E_0=e_2^2/4. \tag{13}$$

在一次近似下，单位长度上的电容沒有变化：

$$C=2\pi\epsilon/\ln\frac{r_1}{r_2}. \tag{14}$$

这些結果同文献[2]中相比，若等效圓取一致的定义将完全一样。

(2) 同軸圓柱系統的偏心

关于偏心問題的研究，原则上借助于"电軸法"可以精确求解[2]。但也可以用这里給出的方法进行分析。若将极坐标原点置于內导体的軸心，令 d_0 为偏心距，偏心率 $\delta=d_0/r_1$，则两圓的方程

$$\rho_2=r_2,$$

$$\rho_1=\sqrt{r_1^2-d_0^2\sin^2\varphi}-d_0\cos\varphi=$$

$$=r_1\left\{1-\delta_1\cos\varphi-\frac{\delta_1^2}{4}(1-\cos 2\varphi)+\cdots\right\},$$

在 δ_1 一次近似下，若令 $\varepsilon_1=-\delta_1(\varepsilon_2=0)$，这将是式(1)中 $n=1$ 的一个特殊情况。从而，同軸系統电位函数、最大电位梯度及其变化率分别为

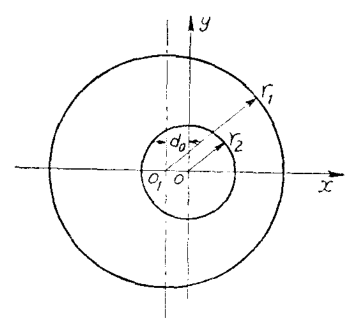

图 2

$$V(r,\varphi)=\frac{V_a}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\left\{\ln\frac{r}{r_1}+\frac{1}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}\left[\delta_1\cdot\left(\frac{r}{r_1}\right)\left(1+\left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right)\right]\cos\varphi\right\}, \tag{15}$$

$$E_{\max}=\frac{-V_a}{r_2\ln\frac{r_2}{r_1}}\left\{1+\frac{2}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}\cdot\frac{r_2}{r_1}\cdot\delta_1\right\}=E_0\left\{1+\frac{2}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}\cdot\frac{r_2}{r_1}\cdot\delta_1\right\} \tag{16}$$

及

$$\Delta E/E_0=\frac{2}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}\cdot\frac{r_2}{r_1}\cdot\delta_1. \tag{17}$$

当 $r_2/r_1 \ll 1$ 时，

$$\Delta E/E_0 = 2 \cdot \frac{r_2}{r_1}\delta_1 = 2 \cdot \frac{r_2}{r_1^2}d_0, \tag{17'}$$

而单位长度上的电容亦无变化．这同文献[2]的精确解在一次近似下也是一致的，但在該文中，最大电位梯度变化率前少了一个系数“2”可能是計算上的疏忽．

(3) 关于“毛刺”的討論

圓柱导体表面“毛刺”的存在几乎是难免的，而且是形形色色的．我們要想就各种类型的“毛刺”逐一地研究是不可能的，而就应用的角度来說，我們又不能不予以必要的考慮．本节想通过对一种理想的卽所謂“均匀分布的毛刺”的分析来揭示在毛刺尖端的某些物理过程．作为“毛刺”大小尖銳程度的描写我們定义一个表面不平度 T，它是圓柱面上凸起部分的高度 Δh 与其底寬 Δs 之比．对于前面談到的“n 波”同軸系統 $T = \frac{\Delta h}{\Delta s} = n \cdot \frac{\varepsilon}{\pi}$. 当令 $n \to \infty$ 保持 T 为有限値时，則柱面上这样一种特殊的起伏将可以看成一种特殊的均匀分布的纵向毛刺．在內导体表面，毛刺的尖端引起电場的集中，当 $r_2/r_1 \ll 1$，略去式(9)中的第一項，

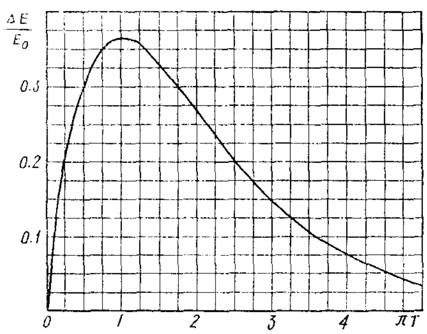

图 3

$$E_{\max} = E_0 \frac{1 + n\varepsilon_2(1+\varepsilon_2)^{-n}}{1+\varepsilon_2}\bigg|_{n\to\infty} = E_0(1 + \pi T e^{-\pi T}),$$

从而电位梯度的变化率

$$\Delta E/E_0 = \pi T \cdot e^{-\pi T}, \tag{18}$$

它仅仅作为圓柱表面不平度的函数，且当 $T = \frac{1}{\pi}$ 时，出現一个极大値 $\Delta E/E_0 = e^{-1} = 0.368$ (見图 3)．(对于外导体也有同样的結論．)

二

本节将着重于对已給出的这种小参数与圓諧函数結合展开方法进一步发展的可能性进行探討．实际上对于同軸系統更一般的变形可以借傅里叶級数来展开：

$$\left.\begin{aligned}\rho_1 &= r_1\left\{1 + \varepsilon_1\left[a_{01} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n1}\cos n\varphi + b_{n1}\sin n\varphi)\right]\right\},\\ \rho_2 &= r_2\left\{1 + \varepsilon_2\left[a_{02} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n2}\cos n\varphi + b_{n2}\sin n\varphi)\right]\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

若令 $r_1' = r_1(1+\varepsilon_1 a_{01})$, $r_2' = r_2(1+\varepsilon_2 a_{02})$ 及 $\varepsilon_1' = \varepsilon_1 \cdot \frac{r_1}{r_1'}$, $\varepsilon_2' = \varepsilon_2 \cdot \frac{r_2}{r_2'}$, 則

$$\left.\begin{aligned}\rho_1 &= r_1'\left\{1 + \varepsilon_1'\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n1}\cos n\varphi + b_{n1}\sin n\varphi)\right\},\\ \rho_2 &= r_2'\left\{1 + \varepsilon_2'\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n2}\cos n\varphi + b_{n2}\sin n\varphi)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

不难作出結論，对于这样的微变同軸系統静电問題的一般解，在一次近似下将具有如下的形式：

$$V(r,\varphi)=\frac{V_a}{\ln\frac{r_2'}{r_1'}}\left\{\ln\frac{r}{r_1'}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{r_2'}{r_1'}\right)^{2n}}\left[-\left(\frac{r}{r_1'}\right)^n\left(1-\left(\frac{r_2'}{r}\right)^{2n}\right)\varepsilon_1'(a_{n1}\cos n\varphi+\right.\right.$$
$$+b_{n1}\sin n\varphi)-$$
$$\left.\left.-\left(\frac{r_2'}{r}\right)^n\left(1-\left(\frac{r}{r_1'}\right)^{2n}\right)\varepsilon_2'(a_{n2}\cos n\varphi+b_{n2}\sin n\varphi)\right]\right\}. \tag{21}$$

同样电位函数(21)可以取作如下复数电位函数的实部：

$$W=V+jV=\frac{V_a}{\ln\frac{r_2'}{r_1'}}\left\{\ln\frac{z}{r_1'}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{r_2'}{r_1'}\right)^{2n}}\left[-\varepsilon_1'\alpha_{n1}\left(\left(\frac{z}{r_1'}e^{-j\varphi_{n10}}\right)^n-\right.\right.\right.$$
$$\left.-\left(\frac{r_2'}{r_1'}\right)^n\left(\frac{z}{r_2'}e^{-j\varphi_{n10}}\right)^{-n}\right)+$$
$$\left.\left.+\varepsilon_2'\alpha_{n2}\left(\left(\frac{r_2'}{r_1'}\right)^n\left(\frac{z}{r_1'}e^{-j\varphi_{n20}}\right)^n-\left(\frac{z}{r_2'}e^{-j\varphi_{n20}}\right)^{-n}\right)\right]\right\}, \tag{22}$$

其中 $\alpha_{n1}=\sqrt{a_{n1}^2+b_{n1}^2}$，$\alpha_{n2}=\sqrt{a_{n2}^2+b_{n2}^2}$；$\varphi_{n10}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{b_{n1}}{a_{n1}}$，$\varphi_{n20}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{b_{n2}}{a_{n2}}$. 从而可以求出通量函数及其单位长度上的电容：

$$V=\frac{V_a}{\ln\frac{r_2'}{r_1'}}\left\{\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{r_2'}{r_1'}\right)^{2n}}\left[-\varepsilon_1'\alpha_{n1}\left(\left(\frac{r}{r_1'}\right)^n+\left(\frac{r_2'}{r_1'}\right)^n\left(\frac{r}{r_2'}\right)^{-n}\right)\sin n(\varphi-\varphi_{n10})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\varepsilon_2'\alpha_{n2}\left(\left(\frac{r_2'}{r_1'}\right)^n\left(\frac{r}{r_1'}\right)^n+\left(\frac{r}{r_2'}\right)^{-n}\right)\sin n(\varphi-\varphi_{n20})\right]\right\} \tag{23}$$

及

$$C=2\pi\cdot\frac{\epsilon}{\ln\frac{r_1'}{r_2'}}. \tag{24}$$

这表明同軸系統单位长度上的电容量仅取决于变形前后其平均半径的比值 r_1'/r_2'. 如果这个比值不变，則其量值也无变化(指在一次近似下). 而变形后电位梯度的絕对值将取

$$E=\left|\frac{dW}{dz}\right|=\left|\frac{V_a}{z\ln\frac{r_2'}{r_1'}}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{r_2'}{r_1'}\right)^{2n}}\left[-\varepsilon_1'\alpha_{n1}\left(\left(\frac{z}{r_1'}e^{-j\varphi_{n10}}\right)^n-\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.-\left(\frac{r_2'}{r_1'}\right)^n\left(\frac{z}{r_2'}e^{-j\varphi_{n20}}\right)^{-n}\right)+$$
$$\left.\left.\left.+\varepsilon_2'\alpha_{n2}\left(\left(\frac{r_2'}{r_1'}\right)^n\left(\frac{z}{r_1'}e^{-j\varphi_{n20}}\right)^n-\left(\frac{z}{r_2'}e^{-j\varphi_{n20}}\right)^{-n}\right)\right]\right\}\right|. \tag{25}$$

現在再让我們利用这些普遍結果来討論一个有用的实例：关于存在在外导体表面具有高度为 h_1、底寬为 $2r_1\varphi_{10}$ 的一种孤立毛刺的探討. 为了改善傅里叶級数的收斂性，假定它具有如下形式：

$$\rho_1 = r_1\left[1-\varepsilon_1\left(1-\left(\frac{\varphi}{\varphi_{10}}\right)^2\right)\right]^2, \qquad (当\ 0\leqslant|\varphi|\leqslant\varphi_{10});$$

$$\rho_1 = r_1 \qquad (当\ \varphi_{10}\leqslant|\varphi|\leqslant\pi).$$

并假定內导体沒有变形 $\rho_2 = r_2$. 借助于傅氏級数外导体可以展开

$$\rho_1 = r_1'\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_1'\cdot\frac{16}{n^3\varphi_{10}^3}\left(\sin n\varphi_{10}+\frac{3}{n\varphi_{10}}\cos n\varphi_{10}-\frac{3}{n^2\varphi_{10}^2}\sin n\varphi_{10}\right)\cos n\varphi\right\},$$

其中 $\varepsilon_1 = \frac{h_1}{r_1}$, $r_1' = r_1\left(1-\frac{8}{15}\cdot\frac{\varphi_{10}}{\pi}\varepsilon_1\right)$, $\varepsilon_1' = \frac{r_1}{r_1'}\varepsilon_1$. 从而系統的电位函数、最大电位梯度及其变化率分别将有

$$V(r,\varphi) = \frac{V_a}{\ln\frac{r_2}{r_1'}}\left\{\ln\frac{r}{r_1'}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{r_2}{r_1'}\right)^{2n}}\left[-\left(\frac{r}{r_1'}\right)^n\left(1-\left(\frac{r_2}{r}\right)^{2n}\right)\varepsilon_1'\frac{\varphi_{10}}{\pi}\cdot\frac{16}{n^3\varphi_{10}^3}\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\left(\sin n\varphi_{10}+\frac{3}{n\varphi_{10}}\cos n\varphi_{10}-\frac{3}{n^2\varphi_{10}^2}\sin n\varphi_{10}\right)\cos n\varphi\right]\right\}, \qquad (26)$$

$$E_{\max} = \frac{-V_a}{r_2\ln\frac{r_2}{r_1'}}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n}{1-\left(\frac{r_2}{r_1'}\right)^{2n}}\left[2\left(\frac{r_2}{r_1'}\right)^n\cdot\varepsilon_1'\cdot\frac{\varphi_{10}}{\pi}\cdot\frac{16}{n^3\varphi_{10}^3}\left(\sin n\varphi_{10}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{3}{n\varphi_{10}}\cos n\varphi_{10}-\frac{3}{n^2\varphi_{10}^2}\sin n\varphi_{10}\right)\right]\right\} \doteq E_0(1+\varepsilon_1\cdot f(\varphi_{10})) \qquad (27)$$

及

$$\Delta E/E_0 = \varepsilon_1\cdot f(\varphi_{10}), \qquad (28)$$

其中 $f(\varphi_{10})$ 仅作为与毛刺底寬有关的函数:

$$f(\varphi_{10}) = \frac{8}{15}\cdot\frac{\varphi_{10}}{\pi\ln\frac{r_1}{r_2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{1-\left(\frac{r_2}{r_1'}\right)^{2n}}\left(\frac{r_2}{r_1'}\right)^n\cdot\frac{r_1}{r_1'}\cdot\frac{1}{\pi n^2\varphi_{10}^2}\left(\sin n\varphi_{10}+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{n\varphi_{10}}\cos n\varphi_{10}-\frac{3}{n^2\varphi_{10}^2}\sin n\varphi_{10}\right).$$

对于該同軸系統单位长度上的电容及其变化率分别有

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{r_1'}{r_2}} \doteq \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\left\{1+\frac{8}{15}\cdot\varepsilon_1\cdot\frac{\varphi_{10}}{\pi\ln\frac{r_1}{r_2}}\right\}\ 及\ \Delta C/C_0 = \frac{8}{15}\cdot\frac{\varphi_{10}}{\pi\ln\frac{r_1}{r_2}}\varepsilon_1, \qquad (29)$$

其中 $C_0 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{r_1}{r_2}}$ 为理想同軸系統单位长度上的电容量.

参 考 文 献

[1] Smythe, W. R., Static and Dynamic Electricity (1939), §4.01, §4.11.
[2] 林为干、徐秉靜,电訊科学, 2 (1956), 39.