第 17 卷 第 3 期 物 理 学 报 Vol. 17, No. 3
1961 年 3 月 ACTA PHYSICA SINICA March, 1961

鐵氧体参量耦合振盪的理論分析*

李蔭远 許政一 刘大乾

提 要

在本文中我們系統地討論了鐵氧体小样品在超高頻电源的激发下产生参量振盪的耦合关系，指出激发机构应分为磁場驅动和磁化驅动二类。前者的特例为 Denton 新近发現的，使用空間均匀的縱向注入場；后者的特例为 Suhl 最早所研究的，使用空間均匀的横向注入場所激发的一致进动的磁化向量为驅动力。从靜磁势函数的耦合微分方程我們得到这二种特殊注入方式激发的靜磁势函数的完全解(一次近似)，表达为 Walker 函数的綫性組合。在边界連續的要求下，这些势函数中的 Walker 模只在它們的指标之間适合一定的条件时才相互关联。当直流磁場調諧于一对 Walker 模时，耦合的靜磁势簡化为靜磁操作的势函数。我們具体分析了靜磁操作参量振盪从注入場吸取的功率。根据后者必須不为零才可能产生参量振盪，我們推导出空間均匀場激发一对靜磁模的选择定則，恰与从边界連續推出的关联条件完全相同，并且进一步得到空間不均匀場激发一对靜磁模的选择定則。我們指出，参量振盪的振幅的决定必須引用能量守恒和量子数相等的方程。最后我們采用 Suhl 的方法推算出空間均匀的縱向注入場的激发临閾强度，并且討論了这一方法的近似性質。

§1. 引 言

1957 年 Suhl[1] 发表鐵氧体微波放大器的理論时，提出了三种操作(电磁操作、半靜磁操作、靜磁操作)方式，其中以电磁操作(两个諧振腔本征模，通过鐵氧体产生耦合，在注入(pumping)場的作用下形成参量放大)最容易設計，但所需的注入功率最高；靜磁操作(两个靜磁模耦合的操作)所需的注入功率最低，但存在着直流磁場的調諧要求和可能出現 Suhl 所指出的操作不稳定問題。Suhl 的合作者 Weiss[2] 首先实現了电磁操作放大器的制作；苏联的一些电子学家进行过一系列的試制工作和放大性能的分析[3–8]。 电磁操作产生振盪必要的注入功率高达千瓦以上，因而不得不使用脉冲电源。其結果不仅使这种放大器不可能实际使用，而且，使研究噪音水平的工作也难于进行。半靜磁操作(电磁模与靜磁模配合的操作)的設計曾經被 Weiss[9] 作出过，使用損耗最低的釔石榴石($Y_3Fe_5O_{12}$)单晶作为耦合介質，也只将临閾注入功率的峯值降低到 40 瓦。目前已获得实际应用的微波放大器，如固体量子放大器和二极管参量放大器的操作功率，都不超过数十毫瓦。因之，鐵氧体参量放大器的前途决定于能否降低必要的注入功率。

在 Suhl 的理論中，考虑了垂直于直流磁場而且空間分布均匀的注入場(有时被簡称为横向注入場)。其直接效应，为引起同一頻率的对直流磁場为正圓偏振态的磁化向量，当磁矩的进动角张开到一定的大小后，参量振盪才被激发。在横向注入場的作用下，靜磁操

* 1961 年 1 月 6 日收到。

作要求外加静磁場 H_0 不仅是二个耦合的静磁模的共振点磁場，而且还必需与电源頻率的一致进动共振点十分接近，否則注入場得不到充分的利用．静磁操作的設計，不仅仅要满足这一个三重調諧的要求，静磁振盪的頻率 ω_1 和 ω_2 与电源頻率 ω_p（一致进动的共振頻率）之間应有 $\omega_1+\omega_2=\omega_p$，而这一对耦合的静磁模，还要符合一定的选择定則（詳見本文 § 4），并且只有当它們的指标 n_1, m_1 和 n_2, m_2 不太大时，才有較強烈的耦合（表現在 Suhl 的理論中有較大的充填因子）．横向注入場的静磁操作，不仅有这些不是同时都能調节得很好的条件，而且还有在原則上可能出現的不稳定性；因之，横向注入場静磁操作放大器的設計，过去似乎一直陷于困惑之中，并未积极进行． 1960 年初 Denton[10] 使用平行于静磁場方向空間分布均匀的注入場，实現了静磁模参量耦合的操作，在 500 毫瓦的連續波的作用下，获得 25 分貝的放大． 这一发明替鉄氧体微波放大器打开了新的局面，使这一类器件的实用可能性大大地向前推进了一步．纵向注入場胜过横向注入場的优越性，在于減少了外加静磁場必需調諧于电源頻率的一致进动共振点的要求，这是对静磁操作显然极为有利的．因之，可以在很大的范围之內任意选择訊号頻率 ω_1，調制 H_0 使 ω_1 和 $\omega_2(=\omega_p-\omega_1)$ 同时各为一静磁模的共振頻率，此外只要求这一对静磁模指标較小，并适合一定的选择定則（見 § 4）．从 Denton 的工作还得到这样的結論：静磁操作不稳定性在原則上虽然存在，但在实践中并不就妨碍放大器的使用．在未从实驗工作得出这一結論之前，要从理論上去判定这一对静磁模和那一对静磁模的参量耦合振盪的临閾功率是否相差較大，因而实际上并不至于出現操作的不稳定性的問題，牵涉到十分繁杂的計算，而且难于得到确切的結論．

Denton 发明的注入方式和 Suhl 的注入方式本質上的区別，在于前者的注入电磁波直接激发一对静磁振盪，并不通过使磁矩进动角张开的作用，而在后者注入場先激发一致进动，即(1,1,0)模的静磁振盪，当这一振盪的幅度足够大时，才开始出現一对静磁模的参量耦合振盪．它們是二类不同的激发方式的特例．我們建議将前一类名为磁場驅动(field driving)的参量振盪，而后一类名为磁化驅动(magnetization driving)的参量振盪．激发某一静磁振盪的注入場必需具有适当的空間分布，Walker 早已充分研究过静磁振盪的势函数． 場的纵向分量一般地并不为零（在模的指标 $n=|m|$ 的例子里才沒有纵向分量）．显然易見，只有当 ω_p 在 Walker 頻譜的上下限之間才可能有效地形成磁化驅动，从实际操作考虑，H_0 既然不宜太大，故磁化驅动的电源頻率不能任意地高，而磁場驅动則不受此限制． Denton 采用的空間均匀的纵向注入不过是磁場驅动型中最簡单而有用的方式，同样，空間均匀的横向注入場是磁化驅动型中最簡单而有用的方式．由于空間分布不均匀的注入場的理論处理比較繁复，过去的理論与实驗工作，无論是磁場驅动或磁化驅动型的，都局限于空間分布均匀的方式．

值得在此提一下：纵向注入場方式之所以迟至 1960 年才被发明，显然，由于过去工作中习惯于这样的概念，必需使磁矩的势能提高（进动角张开）；因而必然要求注入場有横向成分．纵向場在低功率下对于磁介質不起显著的作用（在纵向注入場強度低于激发参量振盪的临閾值时，注入場能量不被鉄氧体所吸收）．在 1959 年以前，人們从未想到纵向場能产生高功率現象． Schlömann[11] 首先从理論上分析了纵向注入場激发自旋波的运动方程，Denton 从这一工作得到启发才开始他的工作．在略早一些，Thomson[12] 曾經在缺乏

理論認識的情况下，观察到縱向注入場在激发参量振盪时的吸收現象．由于不了解这一現象的本質，他沒有能够測出 ω_1 和 ω_2 的輻射波．自然也未想到使用縱向注入場来实現靜磁操作的放大器．这一些事实相当生动地体現了理論基础对于器件設計的重要性．

在理論方面，靜磁模之間的参量耦合振盪是一个很有兴趣的課題，不仅直接联系到器件原理(振盪器、放大器、功率限制器等)，同时也是鉄磁共振高功率現象中次峯問題的核心．Моносов[13,14,15] 在这上面进行过一些工作，他将場的耦合方程改写为势函数的耦合微分方程[14]是一个可取的办法．在本文中我們将尽可能地发展磁場驅动和磁化驅动的靜磁模参量耦合振盪的理論．对于空間均匀的磁場驅动的分析，我們将要写得較为詳細，因为在这一方面文献上还很少談到 (Denton 本人对于他的操作方式的理論根据显然作过一些分析，但在其报告中并未写出)．我們首先得出三种操作中 1，2 两振盪相互耦合的微分方程一次近似的正确解，然后集中注意力于靜磁操作，仔細分析了如何引用边界条件以及能量守恆与量子数相同的条件来計算振盪的幅度．在这上面我們指出反射波的重要性，并給出参量耦合振盪从注入場吸取的能量 W_p 的表达式．我們根据 W_p 必需不为零，参量耦合才可能从电源吸取能量来維持振盪的道理，推导出两种驅动下靜磁参量耦合的一般选择定則，其中的特例为：均匀磁場驅动(Denton 式)的选择定則为 $m_1 + m_2 = 0$ 与 $n_1 + n_2 =$ 偶；均匀磁化驅动(Suhl 式)的选择定則为 $m_1 + m_2 = 1$ 与 $n_1 + n_2 =$ 偶．最后，我們引用了 Suhl 求注入場临閾強度的方法，并且分析了这一近似計算法的本質．

§2. 耦合方程及其解

我們考虑一放置在諧振腔內适当位置的鉄氧体小样品，形状为一旋轉橢球，H_0 平行于其旋轉对称軸．相关的磁場向量和磁化向量为

$$\mathbf{M} = M_s\mathbf{k} + \mathbf{M}_1(\omega_1) + \mathbf{M}_2(\omega_2) + \mathbf{M}_p(\omega_p), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{H} = H_i\mathbf{k} + \mathbf{H}_1(\omega_1) + \mathbf{H}_2(\omega_2) + \mathbf{H}_p(\omega_p). \tag{2.2}$$

这里足标 1，2 和 p 分別表示与两个耦合振盪和注入場相关的物理量，$\mathbf{k}$ 为 z 方向上的单位向量，并且

$$H_i = H_0 - N_z M_s, \tag{2.3}$$

N_z 为 z 方向的退磁因子．令

$$\mathbf{M}_1(\omega_1) = \mathbf{M}_1 e^{i\omega_1 t} + \mathbf{M}_1^* e^{-i\omega_1 t}, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{H}_1(\omega_1) = \mathbf{H}_1 e^{i\omega_1 t} + \mathbf{H}_1^* e^{-i\omega_1 t}. \tag{2.5}$$

$\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_1^*$ 以及 $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_1^*$ 各为共軛复数，以上二式表达实数的物理量．同样，我們将用到足标为 2 和 p 的 $\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_2^*, \mathbf{M}_p, \cdots$ 等．

我們写出在注入場作用下两种振盪的耦合关系一般的一次近似表达式：

$$\frac{i\omega_1}{\gamma} M_{1x} = - M_{1y} H_i + H_{1y} M_s - H_{pz} M_{2y}^* - M_{py} H_{2z}^*, \tag{2.6}$$

$$\frac{i\omega_1}{\gamma} M_{1y} = M_{1x} H_i - H_{1x} M_s + H_{pz} M_{2x}^* + M_{px} H_{2z}^*, \tag{2.7}$$

$$-\frac{i\omega_2}{\gamma} M_{2x}^* = - M_{2y}^* H_i + H_{2y}^* M_s - H_{pz}^* M_{1y} - M_{py}^* H_{1z}, \tag{2.8}$$

$$-\frac{i\omega_2}{\gamma}M_{2y}^* = M_{ix}^* H_i - H_{2x}^* M_s + H_{pz}^* M_{1x} + M_{px}^* H_{1z}. \tag{2.9}$$

通过

$$4\pi M_{px} = x_p H_{px} + i\kappa_p H_{py}, \tag{2.10}$$

$$4\pi M_{py} = -i\kappa_p H_{px} + x_p H_{py}, \tag{2.11}$$

$$M_{1z} = -(M_{px}M_{2x}^* + M_{py}M_{2y}^*)/M_s, \tag{2.12}$$

$$M_{2z} = -(M_{px}M_{1x}^* + M_{py}M_{1y}^*)/M_s \tag{2.13}$$

等关系,我們看出, M_{px}、M_{py}、H_{px} 和 H_{py} 应看待成同一数量級, 而 M_{1z} 和 M_{2z} 是高一級的小量. 在写(2.6)—(2.9)时,我們已将 $H_{px}M_{2z}^*$、$H_{py}M_{2z}^*$、$M_{pz}H_{2x}^*$、$M_{pz}H_{2y}^*$ 等項略去了. 在(2.6)—(2.13)中我們沒有考虑耗損,在以后必需考虑时,可以将頻率看作复数 $\omega + i\lambda$, 其虛部就表达了損耗. 不难看出, (2.12)、(2.13)是从 $|M| = M_s$ 的关系推导出的. 从(2.6)—(2.13)我們解出

$$4\pi M_{1x} = x_1 H_{1x} + i\kappa_1 H_{1y} - (x_1 m_{px} + i\kappa_1 m_{py})H_{2z}^* - H_{pz}(\tau H_{2x}^* + i\tau_1' H_{2y}^*), \tag{2.14}$$

$$4\pi M_{1y} = -i\kappa_1 H_{1x} + x_1 H_{1y} - (-i\kappa_1 m_{px} + x_1 m_{py})H_{2z}^* - H_{pz}(-i\tau_1' H_{2x}^* + \tau H_{2y}^*), \tag{2.15}$$

这里 $m_{px} = M_{px}/M_s$, $m_{py} = M_{py}/M_s$, 并有

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \omega_0\omega_M/(\omega_0^2 - \omega_1^2), \\ \kappa_1 &= \omega_1\omega_M/(\omega_0^2 - \omega_1^2), \\ \tau &= \frac{\gamma\omega_M(\omega_0^2 - \omega_1\omega_2)}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)(\omega_0^2 - \omega_2^2)} = \frac{\gamma}{\omega_M}(x_1x_2 - \kappa_1\kappa_2), \\ \tau_1' &= \frac{\gamma\omega_0\omega_M(\omega_1 - \omega_2)}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)(\omega_0^2 - \omega_2^2)} = \frac{\gamma}{\omega_M}(x_2\kappa_1 - x_1\kappa_2), \\ \omega_M &= 4\pi\gamma M_s, \\ \omega_0 &= \gamma H_i. \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

应該指出,注入場不能有效地激发一个靜磁模时, (2.6)—(2.9)中 M_{px}、M_{py} 的項可以忽略,这时主要地依靠縱向分量 H_{pz} 起作用,为单純的磁場驅动; 而在注入場能有效地激发靜磁模时, H_{pz} 中应含有 Walker 势函数[16]所要求的成分.

在小样品的条件下,我們依照 Suhl 的办法将所要討論的电磁振盪分为靜磁部分和空腔部分,則 1,2 两个振盪的靜磁势函数滿足

$$\nabla^2\psi_{1,2} = -4\pi\nabla\cdot\mathbf{M}_{1,2} \tag{2.17}$$

的方程式,場向量

$$\mathbf{H}_{1,2} = \nabla\psi_{1,2}. \tag{2.18}$$

在磁化驅动的方式还有

$$\mathbf{H}_p = \nabla\psi_p, \tag{2.19}$$

$$\nabla^2\psi_p = -4\pi\nabla\cdot\mathbf{M}_p. \tag{2.20}$$

从 (2.17) 可以解得出表达参量耦合振盪問題中决定靜磁势函数的微分方程 (这一办法是 Монсов 在研究空間分布均匀的横向注入場的題目时所引入的[13]).

在一次近似下,(2.20)得出

$$\nabla_{\mu_p}^2\psi_p = 0, \tag{2.21}$$

这里 $\mu_p = 1 + 4\pi\chi_p$，算符

$$\nabla_\mu^2 \equiv \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.22}$$

故 H_p 的空間分布与静磁模 p 单独激发的完全相同，即 1，2 两振盪的反作用可以略去不計．将(2.6)—(2.9)、(2.18)、(2.19)代入 ψ_1 和 ψ_2 的静磁方程，即可明白地写出耦合微分方程而毫无困难．在这里我們不打算具体处理注入場空間分布不均匀的問題．下面先討論空間均匀的縱向注入場的課題，假定 $H_{pz} = H_{pz}^* = h_l/2$．这时耦合微分方程相当地簡明：

$$\nabla_{\mu_1}^2\psi_1 = \frac{1}{2}\tau h_l\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_2^*; \tag{2.23}$$

同样得

$$\nabla_{\mu_2}^2\psi_2 = \frac{1}{2}\tau h_l\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_1^*. \tag{2.24}$$

其中磁导率 $\mu_{1,2} = 1 + 4\pi\chi_{1,2}$．在 $h_l = 0$ 的情况下，以上二式簡化为 Walker 方程

$$\nabla_\mu^2\psi = 0 \tag{2.25}$$

的形式．值得特别指明，我們在这里进行的分析并未限于静磁操作．

容易看出，1 与 2 两个振盪之間的耦合強度可以用 $\tau h_l/\chi_1$ 或 $\tau h_l/\chi_2$ 来度量；它們的数量級与 h_l/H_i 相同．在以下的处理中作为一級小量．我們将 ψ_1 与 ψ_2 展开为 $\delta\left(\equiv\frac{1}{2}\tau h_l(\chi_1+\chi_2)/\chi_1\chi_2\right)$ 的級数

$$\psi_1 = \psi_1^{(0)} + \delta\psi_1^{(1)} + \delta^2\psi_1^{(2)} + \cdots, \tag{2.26}$$

$$\psi_2 = \psi_2^{(0)} + \delta\psi_2^{(1)} + \delta^2\psi_2^{(2)} + \cdots, \tag{2.27}$$

(2.26)和(2.27)也可以看作是 h_l/H_i 的級数．我們将只作出精确到 δ 一次項的近似解(实际上，由于在(2.6)—(2.9)中略去了高次項，(2.23)、(2.24)本身就是一次近似的微分方程)．将(2.26)和(2.27)代入(2.23)和(2.24)，从零次項和一次項分別得到

$$\nabla_{\mu_1}^2\psi_1^{(0)} = 0, \tag{2.28}$$

$$\nabla_{\mu_2}^2\psi_2^{(0)} = 0, \tag{2.29}$$

$$\nabla_{\mu_1}^2\psi_1^{(1)} = \bar{\chi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_2^{(0)*}, \tag{2.30}$$

$$\nabla_{\mu_2}^2\psi_2^{(1)} = \bar{\chi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_1^{(0)*}. \tag{2.31}$$

这里 $\bar{\chi} = \chi_1\chi_2/(\chi_1+\chi_2)$，$\psi_1^{(0)}$ 和 $\psi_2^{(0)}$ 满足 Walker 方程．我們在后面将 Walker 函数

$$P_n^{|m|}(i\xi)P_n^{|m|}(\eta)e^{-im\varphi} \tag{2.32}$$

写作 $P_{n,m}$．这里 $P_n^{|m|}$ 是第一类伴随 Legendre 函数，$e^{-im\varphi}$ 中 m 可为零或正負整数[1)]，ξ，η，φ 是旋轉橢球坐标，其对 x，y，z 的轉换关系为

$$\left.\begin{aligned} x &= (a^2-\mu b^2)^{\frac{1}{2}}(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi, \\ y &= (a^2-\mu b^2)^{\frac{1}{2}}(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi, \\ z &= \mu^{-\frac{1}{2}}(a^2-\mu b^2)^{\frac{1}{2}}\xi\eta, \end{aligned}\right\} \tag{2.33}$$

1) 本文中 γ 为一正数，故将 $P_{n,m}$ 中含 φ 的部分写作 $e^{-im\varphi}$，以便我們的指标 m 与 Walker 原用者取相同的符号．

这里 a 和 b 为椭球的轴长．于是我們写出

$$\psi_1^{(0)} = \sum_{n,m} (S_1^{(0)})_{n,m} P_{n,m}(\mu_1), \tag{2.34}$$

$$\psi_2^{(0)} = \sum_{n,m} (S_2^{(0)})_{n,m} P_{n,m}(\mu_2), \tag{2.35}$$

$P_{n,m}$ 后面附注的(μ_1)表示坐标轉換中的 $\mu = \mu_1$.

利用 $\psi_2^{(0)*}$ 滿足 Walker 方程

$$\nabla^2_{\mu_2}\psi_2^{(0)*}(\mu_2) = 0, \tag{2.36}$$

我們有

$$\nabla^2_{\mu_1}\psi_2^{(0)*}(\mu_2) = (\mu_1 - \mu)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_2^{(0)*}(\mu_2). \tag{2.37}$$

設 $\mu_1 \neq \mu_2$ (即 $\omega_1 \neq \omega_2$)，可将(2.30)改写为

$$\nabla^2_{\mu_1}\psi_1^{(1)} = \frac{\bar{\chi}}{\chi_1 - \chi_2} \nabla^2_{\mu_1}\psi_2^{(0)*}(\mu_2), \tag{2.38}$$

上式的解显然就是

$$\psi_1^{(1)} = \frac{\bar{\chi}}{\chi_1 - \chi_2} \sum_{n,m} (S_2^{(0)*})_{n,m} P^*_{n,m}(\mu_2) + \sum_{n,m} (S_1^{(1)})_{n,m} P_{n,m}(\mu_1), \tag{2.39}$$

后一部分是微分方程的余函数．我們得到

$$\psi_1 = \sum_{n,m} (S_1)_{n,m} P_{n,m}(\mu_1) + \frac{\bar{\chi}}{\chi_1 - \chi_2}\delta \sum_{n,m} (S_2^{(0)*})_{n,m} P^*_{n,m}(\mu_2). \tag{2.40}$$

这里 $S_1 = S_1^{(0)} + \delta S_1^{(1)}$.

在样品之外势函数滿足 Laplace 方程，故有

$$\psi_1^{外} = \sum_{n,m} (E_1)_{n,m} Q_{n,m}(\mu = 1) + \sum_{n,m} (R_1)_{n,m} P_{n,m}(\mu = 1), \tag{2.41}$$

其中

$$Q_{n,m} = Q_n^{|m|}(i\xi) P_n^{|m|}(\eta) e^{-im\varphi}, \tag{2.42}$$

$Q_n^{|m|}$ 是第二类 Legendre 函数．$Q_{n,m}$ 在无穷远取有限値，而 $P_{n,m}$ 則趋于无限大．Walker 在他的工作中忽略了諧振腔壁对鉄氧体的"反作用"，故在 $\psi^{外}$ 中代表反射波或訊号波的部分 $P_{n,m}$ 項完全被略去．为了引起适当的注意，我們在这里特将后者写出．在下一节中我們将要指出反射波的重要性．

对于第二个模我們同样得到

$$\psi_2 = \sum_{n,m} (S_2)_{n,m} P_{n,m}(\mu_2) + \frac{\bar{\chi}}{\chi_2 - \chi_1}\delta \sum_{n,m} (S_1^{(0)*})_{n,m} P^*_{n,m}(\mu_1), \tag{2.43}$$

$$\psi_2^{外} = \sum_{n,m} (E_2)_{n,m} Q_{n,m}(\mu = 1) + \sum_{n,m} (R_2)_{n,m} P_{n,m}(\mu = 1), \tag{2.44}$$

$S_1, S_2, E_1, R_1, E_2, R_2$ 均为 δ 的一次式，例如

$$E_1 = E_1^{(0)} + \delta E_1^{(1)},$$

在这些式子里的 $S_1^{(0)}, S_1^{(1)}, E_1^{(0)}, E_1^{(1)}, \cdots$ 等都是待定系数．

当直流磁場的強度有利于某些靜磁模的共振激发时，这些模将有显著地較大的振幅．

在注入場激发参量耦合振盪时，調諧条件应当十分接近于静磁模独立被激发的頻譜，后者已被 Walker 和其他几位著者研究过。假定 ω_1 和 ω_2 各自調諧于直流場，而且在其附近并无简并或接近简并的模存在，我們就有充足的理由只考虑 ψ_1 和 ψ_2 中 P_{n_1, m_1} 和 P_{n_2, m_2} 两項．由是得到 Denton 式静磁操作参量耦合振盪的势函数

$$\psi_1 = S_1 P_{n_1, m_1}(\mu_1) + \frac{\bar{\chi}}{\chi_1 - \chi_2} \delta S_2^{(0)*} P^*_{n_2, m_2}(\mu_2), \tag{2.45}$$

$$\psi_2 = S_2 P_{n_2, m_2}(\mu_2) + \frac{\bar{\chi}}{\chi_2 - \chi_1} \delta S_1^{(0)*} P^*_{n_1, m_1}(\mu_1). \tag{2.46}$$

同样 $\psi_1^{外}$ 和 $\psi_2^{外}$ 中只保留 $P_{n_1, m_1}(\mu = 1)$、$P_{n_2, m_2}(\mu = 1)$、$Q_{n_1, m_1}(\mu = 1)$ 和 $Q_{n_2, m_2}(\mu = 1)$ 的項．

使用空間分布均匀的横向注入場时，$(1, 1, 0)$模(正圆偏振的一致进动)被激发，

$$m_{px} = i m_{py} \equiv \theta. \tag{2.47}$$

引用(2.17)，(2.18)，(2.6)—(2.9)得到

$$\nabla^2_{\mu_1} \psi_1 = \theta \bar{\chi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_2^*, \tag{2.48}$$

$$\nabla^2_{\mu_2} \psi_2 = \theta \bar{\chi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_1^*, \tag{2.49}$$

这里 $\bar{\chi} = \frac{1}{2}(\chi_1 + \chi_2 + \kappa_1 + \kappa_2)$(Монсов 原先已得到这一方程)．我們将势函数写作

$$\psi_1 = \psi_1^{(0)} + \theta \psi_1^{(1)}, \tag{2.50}$$

$$\psi_2 = \psi_2^{(0)} + \theta \psi_2^{(1)}, \tag{2.51}$$

显然我們有

$$\psi_1^{(0)} = \sum_{n, m} (S_1^{(0)})_{n, m} P_{n, m}(\mu_1), \tag{2.52}$$

$$\psi_2^{(0)} = \sum_{n, m} (S_2^{(0)})_{n, m} P_{n, m}(\mu_2); \tag{2.53}$$

而

$$\nabla^2_{\mu_1} \psi_1^{(1)} = \bar{\chi} \sum_{n, m} (S_2^{(0)*})_{n, m} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) P^*_{n, m}(\mu_2), \tag{2.54}$$

$$\nabla^2_{\mu_2} \psi_2^{(1)} = \bar{\chi} \sum_{n, m} (S_1^{(0)*})_{n, m} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) P^*_{n, m}(\mu_1). \tag{2.55}$$

Монсов 发現 Walker 函数的微商之間存在着关系

$$\frac{\partial}{\partial z} P^*_{n, m}(\mu) = C_{n, m} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) P_{n, m'}(\mu), \tag{2.56}$$

其中

$$m + m' = 1. \tag{2.57}$$

$C_{n, m}$ 是一个比例常数，可从 Walker 函数具体算出；例如，在 $m = n - 2$ 时，則有

$$C_{n, n-2} = -i2(2n - 1)\sqrt{\mu}.$$

通过(2.56)我們得到

$$\nabla^2_{\mu_1} \psi_1^{(1)} = \bar{\chi} \sum_{n, m} (S_2^{(0)*})_{n, m} C_{n, m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) P_{n, m'}(\mu_2), \tag{2.58}$$

$$\nabla^2_{\mu_2}\psi_2^{(1)} = \bar{\varkappa} \sum_{n,m} (S_1^{(0)*})_{n,m} C_{n,m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) P_{n,m'}(\mu_1). \tag{2.59}$$

依照得(2.40)、(2.43)的同样步骤,解出

$$\psi_1 = \sum_{n,m} (S_1)_{n,m} P_{n,m}(\mu_1) + \frac{\bar{\varkappa}\theta}{\varkappa_1 - \varkappa_2} \sum_{n,m} C_{n,m} (S_2^{(0)*})_{n,m} P_{n,m'}(\mu_2), \tag{2.60}$$

$$\psi_2 = \sum_{n,m} (S_2)_{n,m} P_{n,m}(\mu_2) + \frac{\bar{\varkappa}\theta}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \sum_{n,m} C_{n,m} (S_1^{(0)*})_{n,m} P_{n,m'}(\mu_1), \tag{2.61}$$

$\psi_1^{外}$ 和 $\psi_2^{外}$ 的表达式完全与(2.41)和(2.44)相同.

根据得到(2.45)、(2.46)的同样理由,对于 Suhl 式静磁操作的参量耦合振盪的势函数为

$$\psi_1 = S_1 P_{n_1,m_1}(\mu_1) + \frac{\bar{\varkappa}}{\varkappa_1 - \varkappa_2} \theta\, C_{n_2,m_2} S_2^{(0)*} P_{n_2,m_2'}(\mu_2), \tag{2.62}$$

$$\psi_2 = S_2 P_{n_2,m_2}(\mu_2) + \frac{\bar{\varkappa}}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \theta\, C_{n_1,m_1} S_1^{(0)*} P_{n_1,m_1'}(\mu_1), \tag{2.63}$$

这里

$$m_1 + m_1' = 1, \tag{2.64}$$

$$m_2 + m_2' = 1. \tag{2.65}$$

我們在这一节中采用 Моносов 的方法得到表达注入場作用参量振盪的耦合微分方程,但在求解时我們沒有用任何展开式,所得結果,就一次近似而言,是正确而完全的解.应該指出,我們得到的 $\psi_1^{(1)}$ 中既有 $P_{n,m}(\mu_1)$ 又有 $P_{n,m}(\mu_2)$ 的項 ($\mu_1 \neq \mu_2$), 和 Моносов 用了缺乏完全性的展开式

$$\psi_1^{(1)} = \sum_{n,m} A_{n,m} P_{n,m}(\mu)$$

得到者有所不同. 在本文的 § 3 和 § 4 中还有若干結論和 Моносов 原先所得出者是不一致的.

前面已經指出过, 微分方程(2.23)、(2.24)或(2.48)、(2.49)本身只精确到耦合参量的一次項. 如果要进一步得出二次或高次近似的理論,我們应該在(2.6)—(2.9)中增加相应的高次項以及必要的关系式. 其結果将使耦合微分方程也更繁复.

§3. 边 界 条 件

我們引入在鉄氧体表面

$$\psi_{1,2}^{内} = \psi_{1,2}^{外}, \tag{3.1}$$

$$(B_{1,2}^{内})_{法} = (B_{1,2}^{外})_{法} \tag{3.2}$$

的边界条件来分析問題. 首先, 不难看出, ψ_1 和 ψ_2 中 $\sum_{n,m} (S_1)_{n,m} P_{n,m}$、$\sum_{n,m} (S_2)_{n,m} P_{n,m}$、$\sum_{n,m} (E)_{n,m} Q_{n,m}$、$\sum_{n,m} (R)_{n,m} P_{n,m}$、$\cdots$ 等部分对变数 φ 有相同周期的項将分别地各自满足边界条件. 同时, $P_{n,m}$、$Q_{n,m}$ 总是 z 的偶函数或奇函数(依賴于 $n - |m|$ = 偶或奇), 奇偶函数将各自分别地满足边界条件. 根据以上的推理和(2.45)和(2.46)的表达式,我們

看出，縱向注入場静磁操作的 1，2 两模如不滿足

$$m_1 + m_2 = 0, \tag{3.3}$$

$$n_1 + n_2 = 偶 \tag{3.4}$$

的条件者，在边界連續的要求下將互不关联．可以設想，只有互相关联的一对静磁模才有可能在注入場下产生参量耦合振盪；換言之，(3.3)和(3.4)是参量振盪静磁操作的选择定則．我們將在下一节(§4)中給出这一論斷的較严格的推导．对于横向注入場的情况(参看(2.62)、(2.63))，相当于(3.3)和(3.4)的选择定則为

$$m_1 + m_2 = 1, \tag{3.5}$$

$$n_1 + n_2 = 偶. \tag{3.6}$$

(3.5)的条件已經被 Suhl 給出过[1]．

在下面我們將进一步分析静磁模耦合振盪問題的边界条件．系数 R_1 和 R_2 代表反射波的振幅，显然，我們还应考虑为实験装置的几何与物理状况所决定的边界条件．为了避免指定所采用的微波結构，以保持理論分析的一般性，并且簡化数学上的麻煩，我們假定 $R_1 = R_2 = 0$（无异于將鉄氧体样品置于无限真空之中）；过去 Walker 分析静磁模的頻譜与空間分布的工作就是这样作的．

考虑 $m_1 = -m_2(=m)$ 的一对静磁模在縱向注入場作用下的耦合，

$$\psi_1 = S_1 P_{n_1, m}(\mu_1) + \frac{\bar{\chi}}{\chi_1 - \chi_2} \delta S_2^{(0)*} P^*_{n_2,-m}(\mu_2), \tag{3.7}$$

$$\psi_2 = S_2 P_{n_2,-m}(\mu_2) + \frac{\bar{\chi}}{\chi_2 - \chi_1} \delta S_1^{(0)*} P^*_{n_1, m}(\mu_1), \tag{3.8}$$

$$\psi_1^{外} = E_1 Q_{n_1, m}(\mu = 1) + E_1' Q^*_{n_2,-m}(\mu = 1), \tag{3.9}$$

$$\psi_2^{外} = E_2 Q_{n_2,-m}(\mu = 1) + E_2' Q^*_{n_2,m}(\mu = 1). \tag{3.10}$$

將以上各式代入(3.1)，(3.2)，并按照 δ 的次数展开．由 δ 的零次項得到

$$E_1'^{(0)} = E_2'^{(0)} = 0,^{1)} \tag{3.11}$$

以及 $S_1^{(0)}$ 和 $E_1^{(0)}$ 可能不为零的条件为

$$F_1 \equiv \left[m\kappa_1 \frac{b^2}{a^2} P_{n_1}^{|m|}(i\xi_{01}) + i\xi_{01} P_{n_1}'^{|m|}(i\xi_{01}) \right] Q_{n_1}^{|m|}(i\xi_0) - \\ - i\xi_0 P_{n_1}^{|m|}(i\xi_{01}) Q_{n_1}'^{|m|}(i\xi_0) = 0, \tag{3.12}$$

$S_2^{(0)}$ 和 $E_2^{(0)}$ 可能不为零的条件为

$$F_2 \equiv \left[m\kappa_2 \frac{b^2}{a^2} P_{n_2}^{|m|}(i\xi_{02}) + i\xi_{02} P_{n_2}'^{|m|}(i\xi_{02}) \right] Q_{n_2}^{|m|}(i\xi_0) - \\ - i\xi_0 P_{n_2}^{|m|}(i\xi_{02}) Q_{n_2}'^{|m|}(i\xi_0) = 0, \tag{3.13}$$

这里

$$P_n'^{|m|}(x) = \frac{d}{dx} P_n^{|m|}(x), \tag{3.14}$$

$$Q_n'^{|m|}(x) = \frac{d}{dx} Q_n^{|m|}(x), \tag{3.15}$$

ξ_{01}、ξ_{02} 和 ξ_0 是变数 $\xi(\mu_1)$、$\xi(\mu_2)$ 和 $\xi(\mu = 1)$ 在椭球面上的值，同时在表面的同一点上

---

1) 此处指 $n_1 \neq n_2$ 的情况而言；但在 $n_1 = n_2$ 时，E_1' 和 E_2' 的項无须写出，故本式仍成立．

变数 $\eta(\mu_1)$、$\eta(\mu_2)$ 和 $\eta(\mu=1)$ 取相同的值 η. 这里得到的 1, 2 两模振幅不为零的条件和它們单独被激发时相同[11]. 由 δ 的一次項得到

$$S_1^{(1)}P_{n_1}^{|m|}(i\xi_{01})P_{n_1}^{|m|}(\eta)+\frac{\bar{x}}{x_1-x_2}S_2^{(0)*}P_{n_2}^{|m|}(-i\xi_{02})P_{n_2}^{|m|}(\eta)=$$
$$=E_1^{(1)}Q_{n_1}^{|m|}(i\xi_0)P_{n_1}^{|m|}(\eta)+E_1^{\prime(1)}Q_{n_2}^{|m|}(-i\xi_0)P_{n_2}^{|m|}(\eta), \tag{3.16}$$

$$S_1^{(1)}P_{n_1}^{|m|}(\eta)\left[m\kappa_1\frac{b^2}{a^2}P_{n_1}^{|m|}(i\xi_{01})+i\xi_{01}P_{n_1}^{\prime|m|}(i\xi_{01})\right]+$$
$$+\frac{\bar{x}}{x_1-x_2}S_2^{(0)*}P_{n_2}^{|m|}(\eta)\left[m\kappa_2'\frac{b^2}{a^2}P_{n_2}^{|m|}(-i\xi_{02})-i\xi_{02}P_{n_2}^{\prime|m|}(-i\xi_{02})\right]=$$
$$=E_1^{(1)}P_{n_1}^{|m|}(\eta)[i\xi_0Q_{n_1}^{\prime|m|}(i\xi_0)]+E_1^{\prime(1)}P_{n_2}^{|m|}(\eta)[-i\xi_0Q_{n_2}^{\prime|m|}(-i\xi_0)], \tag{3.17}$$

这里

$$\kappa_2'=\kappa_1-\frac{\mu_1-\mu_2}{\tau}\tau_1'. \tag{3.18}$$

在这里要分两种情况来討論: (a) 在 $n_1\neq n_2$ 的情况下, $P_{n_1}^{|m|}(\eta)$ 和 $P_{n_2}^{|m|}(\eta)$ 为两正交的函数,以上的式子中足标为 n_1 和 n_2 的項势必分别地满足边界条件, 因而出现两套方程組. 当 $F_1=0$ 时 $S_1^{(1)}$ 和 $E_1^{(1)}$ 可能有不等于零的解,而 $S_2^{(0)*}$ 和 $E_1^{\prime(1)}$ 可能不等于零的条件为

$$F_3\equiv\left[m\kappa_2'\frac{b^2}{a^2}P_{n_2}^{|m|}(i\xi_{02})+i\xi_{02}P_{n_2}^{\prime|m|}(i\xi_{02})\right]Q_{n_2}^{|m|}(i\xi_0)-$$
$$-i\xi_0P_{n_2}^{|m|}(i\xi_{02})Q_{n_2}^{\prime|m|}(i\xi_0)=0. \tag{3.19}$$

$F_1=F_2=0$ 时 F_3 一般不等于零,因之我們必然有

$$S_1^{(0)}=S_2^{(0)}=E_1^{\prime(0)}=E_2^{\prime(0)}=0 \tag{3.20}$$

的結論,因而

$$\psi_1=\delta S_1^{(1)}P_{n_1,m}(\mu_1), \tag{3.21}$$
$$\psi_2=\delta S_2^{(1)}P_{n_2,-m}(\mu_2). \tag{3.22}$$

(b) 在 $n_1=n_2=n$ 的情况下, 利用 $Q_n^{|m|}$ 为其变数的奇函数或偶函数的事实, 将 (3.16) 和(3.17)改写为

$$S_1^{(1)}P_n^{|m|}(i\xi_{01})+\frac{\bar{x}}{x_1-x_2}S_2^{(0)*}P_n^{|m|}(-i\xi_{02})=(E_1^{(1)}\pm E_1^{\prime(1)})Q_n^{|m|}(i\xi_0), \tag{3.23}$$

$$S_1^{(1)}\left[m\kappa_1\frac{b^2}{a^2}P_n^{|m|}(i\xi_{01})+i\xi_{01}P_n^{\prime|m|}(i\xi_{01})\right]+$$
$$+\frac{\bar{x}}{x_1-x_2}S_2^{(0)*}\left[m\kappa_2'\frac{b^2}{a^2}P_n^{|m|}(-i\xi_{02})-i\xi_{02}P_n^{\prime|m|}(-i\xi_{02})\right]=$$
$$=(E_1^{(1)}\pm E_1^{\prime(1)})[i\xi_0Q_n^{\prime|m|}(i\xi_0)]. \tag{3.24}$$

由上二式消去 $E_1^{(1)}\pm E_1^{\prime(1)}$, 得到

$$F_1S_1^{(1)}+\frac{\bar{x}}{x_1-x_2}F_3^*S_2^{(0)*}=0, \tag{3.25}$$

于是,我們仍然有(3.21)和(3.22)的結果[1].

---

1) 对于 $m_1\neq-m_2$ 的一般情况,通过同样的演算仍得到与(3.21)、(3.22)相似的結果,即

$$\psi_1=\delta S_1^{(1)}P_{n_1,m_1}(\mu_1),$$
$$\psi_2=\delta S_2^{(1)}P_{n_2,m_2}(\mu_2).$$

对于横向注入場，我們按照同样的程序得到

$$\psi_1 = \theta S_1^{(1)} P_{n_1, m}(\mu_1), \tag{3.26}$$

$$\psi_2 = \theta S_2^{(1)} P_{n_2, 1-m}(\mu_2). \tag{3.27}$$

当鉄氧体与其周围的微波結构处在热平衡的状态时，1,2 两模均应有依照玻色統計律决定的振幅，即 $S_1^{(0)}$ 和 $S_2^{(0)}$ 均不为零．在上面的分析中，我們令 $R_1 = R_2 = 0$，即假定了鉄氧体处在无限眞空之中，自然也就无从表現与周围达到热平衡，故 $S_1^{(0)} = S_2^{(0)} = 0$ 的結果在省略了反射波的前提下是完全合理的．反之，不难証明，在存在着反射波或外加訊号时，$S_1^{(0)}$ 和 $S_2^{(0)}$ 确有不等于零之解．(3.21)、(3.22)和(3.26)、(3.27)給出的振盪势比例于注入場振幅，正是沒有热訊号或外加訊号时应有的結果．

在省略反射波的一次近似处理中，1, 2 两模的势函数以及磁場向量的空間分布和它們独立激发时相同．决定 $\omega_1(H_i)$ 和 $\omega_2(H_i)$ 的条件 $F_1 = F_2 = 0$．也和独立激发的頻譜相同，即参量振盪激发静磁模并不产生頻譜移动．如果不忽略反射波，頻譜移动必然存在，但是从独立激发静磁模的实驗数据和 Walker 忽略反射波算出的頻譜符合得很好的事实，可以肯定反射波对頻譜的影响一般是很微弱的．此外我們应該提一下介質对静磁振盪的阻尼和振盪幅度的增強或衰减的速率，也会导致頻譜的移动．

§4. 参量耦合振盪吸取的功率

在 §3 中簡化到(3.21)、(3.22)和(3.26)、(3.27)后，仍有 $S_1^{(1)}$ 和 $S_2^{(1)}$ 两个待定系数，即参量耦合振盪的振幅尙未定出．它們可以通过下列的能量守恆和量子数相等的方程式来計算：

$$W_1 + W_2 = W_p, \tag{4.1}$$

$$W_1/\omega_1 = W_2/\omega_2, \tag{4.2}$$

这里 W_1 和 W_2 是 1, 2 两模的功率，原則上可以从 ψ_1 和 ψ_2 直接算出．W_p 是注入功率中实际上用于产生参量振盪的部分：

$$W_p = -\frac{\omega_p}{2\pi} \int \oint \mathbf{M}_p \cdot d\mathbf{H}_p dv, \tag{4.3}$$

这里 $\oint$ 表示对注入电磁波的一个周期积分．$\int \cdots dv$ 对鉄氧体的体积积分．$\omega_p/2\pi$ 等于周期的倒数．

W_p 本身是一个在参量耦合振盪現象中有关鍵性的物理量，显然必需 $W_p \neq 0$ 才有可能在注入場的作用下产生耦合振盪．对于空間均匀的縱向注入場，(4.3)簡化为

$$W_p = -\omega_p h_l \int \operatorname{Im}(M_{pz}) dv, \tag{4.4}$$

M_{pz} 为通过 1, 2 两振盪所形成的縱向磁化強度，从进动方程或 $|M| =$ 常数 M_s 的条件算出

$$M_{pz} = -(M_{1x}M_{2x} + M_{1y}M_{2y})/M_s, \tag{4.5}$$

当 $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$ 的空間分布与静磁模独立被激发时相同[1]，則

---

1) 这一个条件事实上近似地存在着，在略去反射波的近似下就完全被滿足了．

$$W_p \propto \int (m_{1x}m_{2x} + m_{1y}m_{2y})dv, \tag{4.6}$$

上式中的 m_{1x}, m_{1y}, ··· 等是由(2.32)的 Walker 函数算出的磁化強度，其与 M_{1x}, ··· 等的关系为 $M_{1x} = \delta S_1^{(1)} m_{1x}$, ··· 等.

对于空間分布均匀的横向注入場，

$$W_p = -\omega_p h_t \int \mathrm{Im}(M_{px} + iM_{py})dv, \tag{4.7}$$

这里 h_t 是正圓偏振注入場的振幅. $M_{px} + iM_{py}$ 的一級項为 $2M_s\theta$, 对积分无貢献，由于 1, 2 两振盪的反作用所产生的二級項，由下式算出

$$i(\omega_p - \omega_0)(M_{px} + iM_{py}) = i\gamma[(M_{1x} + iM_{1y})H_{2z} + (M_{2x} + iM_{2y})H_{1z}], \tag{4.8}$$

当 $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$ 有着与 1, 2 两模独立激发时的空間分布，得到

$$W_p \propto \int [(m_{1x} + im_{1y})h_{2z} + (m_{2x} + im_{2y})h_{1z}]dv \tag{4.9}$$

的結論. 这里 h_{1z}, h_{2z} 是 Walker 函数的导数，即 $H_{1z} = \theta S_1^{(1)} h_{1z}$, $H_{2z} = \theta S_2^{(1)} h_{2z}$. 如果 $W_p = 0$, 則参量振盪不能吸取功率因而不可能形成，故从 $W_p \neq 0$, 可推出 1, 2 两静磁模可能配合起来产生参量振盪的选择定則. 容易想到，要求 $\int \cdots dv$ 的积分不为零，必須被积函数为 z 的偶函数，而且不含变数 φ（被积函数或者不含 φ, 或者为 φ 的周期函数；如为后者，积分等于零）. 应用这一方法[1]，我們得到的选择定則与 § 3 中所預料者完全一致；不滿足选择定則的一对静磁模，在边界連續的要求下，互不相关联，显然也就不可能耦合起来. 从 Walker 函数的性質，不难进一步証明(4.9)中的积分为一虛数，而(4.6)中的积分为一实数. 因之在縱向注入場产生的振盪 S_1 和 S_2 相差一个 90° 的相角，而在横向注入場产生的振盪 S_1 和 S_2 的相角差等于零.

我們将进一步利用 $W_p \neq 0$ 的判据来推导空間分布不均匀的注入場作用下的一般选择定則，仍然假定 $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_2$ 有与 1, 2 两模单独激发时的空間分布. 对于磁化驅动 $\mathbf{h}_p$, $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ 在 x, y, z 三个方向上均可能不为零，m_{1z}、m_{2z}、m_{pz} 都是高一級的小量. W_p 比例于

$$\int \{(m_{1y}h_{2z} + m_{2y}h_{1z})h_{px}^* - (m_{1x}h_{2z} + m_{2x}h_{1z})h_{py}^* + \\ + (m_{1x}h_{2y} + m_{2x}h_{1y} - m_{1y}h_{2x} - m_{2y}h_{1x})h_{pz}^*\}dv. \tag{4.10}$$

依照前面已經解說过的方法，不难从 $W_p \neq 0$ 的要求推出

$$m_1 + m_2 = m_p, \tag{4.11}$$

$$n_1 + n_2 + n_p = 奇 \tag{4.12}$$

的选择定則.

对于磁場驅动一般分布的注入場，W_p 比例于

$$\int (m_{1x}m_{2x} + m_{1y}m_{2y})H_{pz}^* dv. \tag{4.13}$$

---

1) 这里用的推导选择定則的方法，在另一篇論文[18]內有較詳細的解說.

如 H_{pz} 有 $h(\rho, z)e^{-im_p\varphi}$ 的成分 ($\rho = \sqrt{x^2+y^2}$),这一成分激发的参量耦合模滿足

$$m_1 + m_2 = m_p \tag{4.14}$$

的条件. 如果 $h(\rho, z)$ 为 z 的偶(或奇)函数,则所激发的 1, 2 两模滿足

$$n_1 + n_2 + m_p = \text{偶(或奇)} \tag{4.15}$$

的条件. 不难看出, $m_1 + m_2 = m_p$ 本质上是跃迁前后 z 方向上角动量守恆的宏观体現.

前面已經討論过的对于两种空間分布均匀的注入方式适用的选择定则, 显然是这里給出的一般規律的特殊例子. 一般性的选择定则对于实驗工作有着实际的用途: 除了有意采用不均匀注入場时显然会用到外,应該指出,在采用空間均匀注入場的設計里, 一般混入有不均匀的成分,在功率很高时后者也将引起参量耦合振盪.

选择定则是在一定的近似下得到的,不符合条件的耦合振盪(类似光譜問題中的禁戒跃迁)在更高的注入功率下可能出現. 鉄氧体样品晶体結构的不均匀性,如多晶样品的晶粒間界或单晶样品的次結构,都可能成为破坏选择定则的因素.

§5. 注入場临閾强度

Suhl 对空間均匀的横向注入場曾經得到临閾强度的公式. 他将 $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ 展开为独立静磁模(略去損耗的)的綫性組合,使用由

$$\nabla^2\varphi'' = -4\pi\frac{\partial M_z}{\partial z} \tag{5.1}$$

定出的耦合势和系統的进动方程, 来推算 1, 2 两模振幅随时間而增長的临閾条件. Suhl 并未說明所用近似的本质,在下面我們将搞清楚这一問題,并求出空間均匀的縱向注入方式的临閾强度.

为了便于比較,我們先討論 Suhl 式注入. 与 Suhl 采取一致的假定: ω_1 和 ω_2 并不属于腔的本征頻率;因而反射波十分微弱,可以略去不管. 同时我們只考虑注入場激发参量振盪的問題,因之訊号波也不存在. 在这样的情况下, ψ_1 和 ψ_2 被(3.26)和(3.27)所給出. 磁化向量可分为两部分:

$$\left.\begin{aligned} M_{1x} &= M_{1x}^{(1)} + M_{1x}^{(2)} \doteq M_{1x}^{(1)}, \\ M_{1y} &= M_{1y}^{(1)} + M_{1y}^{(2)} \doteq M_{1y}^{(1)}, \\ M_{1z} &= M_{1z}^{(2)}, \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

$$\left.\begin{aligned} 4\pi M_{1x}^{(1)} &= S_1\theta\,(\varkappa_1 h_{1x} + i\kappa_1 h_{1y}) = S_1\theta\, m_{1x}, \\ 4\pi M_{1y}^{(1)} &= S_1\theta\,(-i\kappa_1 h_{1x} + \varkappa_1 h_{1y}) = S_1\theta\, m_{1y}, \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

$$\left.\begin{aligned} 4\pi M_{1x}^{(2)} &= -\frac{\theta^2}{2}(\varkappa_1 + \kappa_1)S_2^* h_{2x}^*, \\ 4\pi M_{1y}^{(2)} &= i\frac{\theta^2}{2}(\varkappa_1 + \kappa_1)S_2^* h_{2x}^*, \\ 4\pi M_{1z}^{(2)} &= -\frac{\theta^2}{2}S_2^*(m_{2x}^* - im_{2y}^*), \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

这里 S_1, S_2 即 $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$, 上面的表达式 $M_{1z}^{(2)}$ 是完全正确的, 但 $M_{1x}^{(2)}$ 和 $M_{1y}^{(2)}$ 显然未能将 M_{1x} 和 M_{1y} 中的 H_{1x} 和 H_{1y} 的二級項算进去. 依照 Suhl 的近似处理, 耦合势 $\varphi''_{1,2}$ 被下

式所决定：

$$\nabla^2\varphi_1'' = -4\pi\frac{\partial M_{1z}^{(2)}}{\partial z} =$$
$$= \frac{\theta^2}{2}(x_2+\kappa_2)S_2^*\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)P_2^*(\mu_2) =$$
$$= \frac{\theta^2}{2}S_2^*\frac{\partial}{\partial z}(m_{2x}^* - im_{2y}^*), \tag{5.5}$$

同样

$$\nabla^2\varphi_2'' = \frac{\theta^2}{2}S^*(x_1+\kappa_1)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)P_1^*(\mu_1) =$$
$$= \frac{\theta^2}{2}S_1^*\frac{\partial}{\partial z}(m_{1x}^* - im_{1y}^*). \tag{5.6}$$

严格地說，在一次近似中，$\mathbf{M}_1^{(2)}$ 是应該略去的小量，我們在这里用了 $M_{1z}^{(2)}, M_{2z}^{(2)}$ 来求 φ''，却是完全可以容許的微扰近似計算. 对于 Denton 式注入，我們取

$$\nabla^2\varphi_1'' = -4\pi\left(\frac{\partial^2 M_{1x}^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{1y}^{(2)}}{\partial y^2}\right) =$$
$$= \delta^2\bar{x}S_2^*\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(h_{2x}^* - ih_{2y}^*), \tag{5.7}$$

$$\nabla^2\varphi_2'' = -4\pi\left(\frac{\partial^2 M_{2x}^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{2y}^{(2)}}{\partial y^2}\right) =$$
$$= \delta^2\bar{x}S_1^*\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(h_{1x}^* - ih_{1y}^*). \tag{5.8}$$

依照 Suhl 的計算步驟(其細节不在此重复)，我們得到

$$\theta_{临} = \sqrt{\frac{\Delta H_1}{4\pi M_s}}\sqrt{\frac{\Delta H_2}{4\pi M_s}}F_t^{-1}, \tag{5.9}$$

$$(h_l)_{临} = \sqrt{\frac{\Delta H_1}{4\pi M_s}}\sqrt{\frac{\Delta H_2}{4\pi M_s}}F_l^{-1}, \tag{5.10}$$

$$F_t = \frac{1}{8\pi}|T_{12}|/(\mathrm{Im}I_1\mathrm{Im}I_2)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.11}$$

$$F_l = \frac{1}{2M_s}\frac{|\omega_0^2 - \omega_1\omega_2|}{[(\omega_0^2-\omega_1^2)(\omega_0^2-\omega_2^2)]^{\frac{1}{2}}}|L_{12}|/(\mathrm{Im}I_1\mathrm{Im}I_2)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.12}$$

$$T_{12} = \int[(m_{1x}+im_{1y})h_{2z} + (m_{2x}+im_{2y})h_{1z}]dv, \tag{5.13}$$

$$L_{12} = \int(m_{1x}m_{2x} + m_{1y}m_{2y})dv, \tag{5.14}$$

$$I_1 = \int(m_{1x}m_{1y}^* - m_{1x}^*m_{1y})dv. \tag{5.15}$$

同样有 I_2 的表达式. 关于 $\theta_{临}$ 的公式早經在文献[1]中給出.

填充因子 F_l (或 F_t)中含有的积分式 L_{12} (或 T_{12})，将称为耦合积分，是决定 1，2 两模能否产生参量振盪和临閾場強度的主要参量. 它們和上一节中討論过的 W_p(1，2 两模在参量振盪中从注入場吸取的功率)中出現的积分完全相同，这显然是应有的結果. 如果

我們沒有作出 § 4 的研究，仍然会从(5.9)和(5.10)想出 § 4 中同样的办法：从 $L_{12} \neq 0$ 或 $T_{12} \neq 0$ 去推导出两种均匀注入場作用下的选择定則[1)]. 容易看出，L_{12} 或 T_{12} 如等于零，則 $(h_l)_{临}$ 或 $\theta_{临} \to \infty$，参量振盪不可能产生. 然而，我們也应該指出本节中所用方法的一个弱点. 如 Suhl 的 $\varphi''_{1,2}$ 取为

$$\nabla^2\varphi''_{1,2} = -4\pi\nabla\cdot\mathbf{M}^{(2)}_{1,2}, \tag{5.16}$$

包含 $M^{(2)}_{1x}$, $M^{(2)}_{1y}$, ⋯ 等項，則有

$$\nabla^2\varphi''_1 = \theta^2\bar{x}S_2^*\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)P_2^*(\mu_2) =$$

$$= \theta^2\frac{\bar{x}}{x_2+\kappa_2}S_2^*\frac{\partial}{\partial z}(m_{2x}^* - im_{2y}^*), \tag{5.17}$$

这里 $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1+\kappa_1+x_2+\kappa_2)$. 同样

$$\nabla^2\varphi''_2 = \theta^2\frac{\bar{x}}{x_1+\kappa_1}S_1^*\frac{\partial}{\partial z}(m_{1x}^* - im_{1y}^*). \tag{5.18}$$

于是，在 $\theta_{临}$ 的公式中相应于 T_{12} 出现了 T'_{12}.

$$T'^2_{12} = \frac{2\bar{x}}{x_1+\kappa_1}|T_1|^2 + \frac{2\bar{x}}{x_2+\kappa_2}|T_2|^2 + T_1^*T_2 + $$

$$+ \frac{(2\bar{x})^2}{(x_1+\kappa_1)(x_2+\kappa_2)}T_1T_2^*, \tag{5.19}$$

这里

$$T_1 = \int(m_{1x} + im_{1y})h_{2z}dv, \tag{5.20}$$

$$T_2 = \int(m_{2x} + im_{2y})h_{1z}dv, \tag{5.21}$$

虽然并不改变 $\theta_{临}$ 的数量級，而且也从 T_1 和 T_2 不为零得到同样的选择定則，应該指出的是 W_p 中所含的积分为 T_{12} 而非 T'_{12}.

附　　記

采用 Denton 式注入場也能够激发磁声参量振盪[13]. 以式(4.6)的 $W_p \neq 0$ 为判据，并引用[18]的表 2 中所列出的对称性，就得到以下的选择定則：(1)只有 $n=$ 奇数的静磁模才可能与球状样品的旋轉模、向径模、椭球模三类振盪相配合产生参量振盪；(2) m 为偶数的不与旋轉模产生参量耦合振盪，而 m 为奇数的不与向径模、椭球模产生参量耦合振盪. 在已发表的文章中，目前尚未見到采用纵向注入場激发磁声参量振盪的实驗工作.

参　考　文　献

[1] Suhl H., *J. Appl. Phys.*, **28** (1957), 1225.
[2] Weiss M. T., *Phys. Rev.*, **107** (1957), 317.
[3] Никольский В. В., *Радиотехника и Электроника*, **4** (1959), 726.

1) 使用正确的正交关系不可能从 $T_{12} \neq 0$ 得出 $n_1 = n_2$ 的选择定則[13].

[4] Микаэлян А. Л., Шварц Н. З., *Радиотехника и Электроника*, **4** (1959), 1196.
[5] Никольский В. В., *Радиотехника и Электроника*, **5** (1960), 141.
[6] Тыченский В. П., Деркач Ю. Т., Карпечкий В. В., *Радиотехника и Электроника*, **5** (1960), 285.
[7] Тыченский В. П., Деркач Ю. Т., Карпечкий В. В., *Радиотехника и Электроника*, **5** (1960), 943.
[8] Мигулин В. В., *Радиотехника и Электроника*, **5** (1960), 955.
[9] Weiss M. T., *J. Appl. Phys.*, **29** (1958), 421.
[10] Denton R. T., *Proc. IRE*, **48** (1960), 937.
[11] Schlömann E. et. al., Suppl. *J. Appl. Phys.*, **31** (1960), 386 S.
[12] Thomson A. F. H., *Proc. IRE*, **48** (1960), 259.
[13] Моносов Я. А., *Радиотехника и Электроника*, **5** (1960), 59.
[14] Моносов Я. А., *Радиотехника и Электроника*, **5** (1960), 278.
[15] Моносов Я. А., Вашковский А. В., *Радиотехника и Электроника*, **5** (1960), 105.
[16] Walker L. R., *Phys. Rev.*, **105** (1957), 390.
[17] Suhl H., *J. Appl. Phys.*, **29** (1958), 416.
[18] 李荫远、冷忠昂、潘守甫，物理学报，**16** (1960), 449.

THEORY OF THE PARAMETRICALLY COUPLED OSCILLATIONS IN FERRITE

LI YIN-YUAN XU ZHENG-YI LIU DA-QIAN

ABSTRACT

In this article the parametrically coupling of oscillations in a small ellipsoid of ferrite under the excitation of an uhf pumping of any spatial distribution is discussed. It is pointed out that the coupled oscillations may be induced through the two types of driving, field driving and magnetization driving. A special case of the former was recently discovered by Denton, who used a longitudinal pumping field uniform in space. A special example of the latter is found in Suhl's theoretical analysis and a number of experimental works after him. The pumping field transverse in direction and spatially uniform does not induce the coupled oscillations directly, but the rf magnetization of the Kittel precession excited by the pumping becomes the driving force of the oscillations. For each type of a uniform pumping we obtain from a set of differential equations the magnetostatic potential functions (the first order approximation) as linear combinations of Walker's functions. These solutions are different from those given by Моносов. Making use of the boundary conditions at the ferrite surface we find that for the Walker modes involved in the oscillations to be coupled, their indices must satisfy certain conditions. For the case of magnetostatic operations the dc magnetic field is tuned to a pair of the Walker modes, the potential functions may be reduced greatly. By studying the power drawn by the coupled oscillations from the pumping, we obtain the selection rules of a pair of magnetostatic modes excited by a pumping field of any given spatial distribution. We point out that for the determination of the amplitudes of the oscillations the equations derived from the conservation of energy and from the equality of the number of quanta emitted must be used. Finally, the threshold intensity of Denton's pumping field is derived using Suhl's method. We indicate that this method is based on a perturbation calculation.