

# 复杂传动轴系扭振的递归传递矩阵法

陈奎孚 彭红涛 焦群英

(中国农业大学)

**摘要** 现有分支轴系的传递矩阵法不仅需针对具体传递结构编制程序,而且它的剩余扭矩存在奇点。作者指出传动系的拓扑结构为树型。利用这一特点,构造了一种递归格式,只须提供描述传动系的数据,无须多次编程和调试。通过对传递过程的修正,消除了余量函数的奇点。算例结果表明所提出的算法是稳定和高效的。

**关键词** 传动系统 扭转振动 固有频率 递归程序 树型结构

掌握机械系统的动态特性对提高机械性能和加工精度,降低噪声和振动,延长使用寿命具有重要意义。机械中许多机构,如发动机转轴、曲柄等可简化为链式结构,计算这类模型动特性的最有效方法为传递矩阵法,并且这种模型没有重频<sup>[1]</sup>,迭代效率很高。但是也有很多机构,如拖拉机变速箱、汽车的驱动轴和差动轴等只能简化为分支链式结构,才能满足工程精度的要求。普通传递矩阵法必须加以改进才能适用这种分支结构,这类改进的方法目前已有几种<sup>[2-4]</sup>,但若分支点超过一个,大多要针对具体的结构重新编制迭代过程,因而调试和使用都不方便。这种方法的另一个缺点是:剩余扭矩  $T(\omega)$  是  $\omega$  的有理分式,即存在许多奇点。

一个轴系无论怎样复杂,绝不允许动力往回传递,所以轴系啮合副不会构成闭环。但一根主动轴可带动几根从动轴,故整个轴系拓扑结构呈树状。向轴系中其它轴提供动力的最初级轴为树根,它只有一根;不再向其它轴提供动力的轴为末端,可能有多根;二者间可能有多级中间传动轴。将主动轴简称为父轴,从动轴简称为子轴。由于整个轴系呈树状结构,故可采用递归编程方法,自末端经中间轴向树根递归计算剩余扭矩,设计一种不依赖具体结构的传递计算方法,并在递归过程中对  $T(\omega)$  修正,以消除其奇点。

## 1 余量的递归计算

末端轴没有输出啮合副,只有一个输入啮合副,边界有自由端和固定端两种情形。不失一般性,自左向右传递计算盘  $p$  处的  $T(\omega)$ ,若左端为自由端,可假定 1 盘左端传递向量  $\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_1^L = \begin{Bmatrix} \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$ ;若为固定端,可假设固定端处的扭矩为

$\beta$ ,则 1 盘左端的  $\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_1^L = \begin{Bmatrix} \theta \\ \beta \end{Bmatrix}$  (图 1 中虚线所示) 将第  $i$  个圆盘和第  $i$  段弹簧取出,其受力如图 2 所示。根据文献 [2],第  $i$  段自左向右的传递关系为:

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{i+1}^R = [T]_i \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_i^L = [F]_i [P] \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_i^L$$

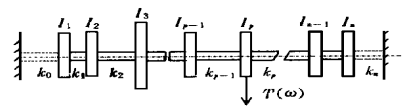


图 1 末端轴示意图

Fig 1 The end shaft in the shaft-tree

收稿日期: 1997-08-18 1999-02-18 修订

陈奎孚, 博士生, 北京市海淀区清华东路 17 号 中国农业大学(东校区)74 信箱, 100083

其中  $[F]_i = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i$ ,  $[P]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I & 1 \end{bmatrix}_i$  分别是场和点传递矩阵, 而  $[T]_i = [F]_i [P]_i$  是第  $i$  段传递矩阵。这样便可由边界  $\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_1^L$  算出  $\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_p^L$ 。由于  $\theta_i$  和  $M_p^L$  都与边界转角(自由端)或扭矩(固定端)成正比, 所以  $M_p^L$  与  $\theta_i$  也成正比, 记为  $M_p^L = f^L \theta_i$ 。将右端的边界向  $\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_p^R$  传递, 同样有  $M_p^R = f^R \theta_i$ 。协调要求  $\theta_i^L = \theta_i^R = \theta_i$ , 所以盘  $p$  的剩余扭矩  $T(\omega)$  为:

$$T(\omega) = (f^L - I_p \omega^2 - f^R) \theta_i \quad (1)$$

将式(1)括号中部分记为  $f$ , 它是不依赖各盘的振幅和扭矩的系数。

盘  $p$  以及与之啮合盘  $q$  的受力如图 3。盘  $q$  平衡方程为:

$$M_q^R + I_q \omega^2 \theta_q + F r_q - M_q^L = 0 \quad (2)$$

$F, F'$  是作用力与反作用力, 由盘  $p$  平衡及式(1)得:

$$F = f \theta_p / r_p \quad (3)$$

将式(3)代入式(2), 并利用啮合协调条件:  $\theta_q = -n \theta_p$ ,  $r_p = n r_q$  ( $n$  为传动比) 故有:

$$M_q^R + I_q \omega^2 \theta_q - f \theta_q / n^2 - M_q^L = 0$$

所以盘  $q$  的点传递关系变为:

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_q^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -I_q \omega^2 + f/n^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_q^L \quad (4)$$

由式(4)可以看出, 有子轴圆盘的点传递关系要将原惯性项  $-I_q \omega^2$  修正成  $-I_q \omega^2 + f/n^2$ 。修正之后, 末端轴可视为不存在。若将父轴上所有带子轴的圆盘均按式(4)修正, 即可删去全部子轴, 这样父轴变成末端轴, 再次按照相同办法传递下去, 直到树根。最后树根剩余扭矩若为零, 则  $\omega$  就是固有频率, 若不等于零, 可通过插值、弦割法等寻找其零点, 从而得到固有频率。

## 2 奇点的意义与消除

首先考察末端轴。为了书写简洁, 记分别从左边界和右边界传递到  $p$  盘右侧的传递向量为

$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_1^L$  和  $\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_p^R$ 。由式(1), 容易验证

$$f = M^L / \theta - M^R / \theta = (M^L \theta - M^R \theta) / (\theta \theta) = f^E / f^D \quad (5)$$

式中分母  $f^D = \theta \theta$ , 分子  $f^E = M^L \theta - M^R \theta$ 。

如果恰好选一个  $\omega$  使  $f^D = 0, f^E \neq 0$ , 则  $f$  无穷大。这就是奇点。奇点的存在, 将会出现被零除等不稳定现象, 另外也会导致漏根和误判增根<sup>[3]</sup>。若将  $I_p$  变成固定端, 则末端轴变成左右两根轴。这两根轴的固有频率就是  $f^D = 0$  的根。这就是奇点的意义。  $f$  本身也就是使  $\theta$  发生单位变化需在  $p$  盘施加的扭矩。如果  $p$  盘是固定端, 那么  $\theta$  恒等于零, 显然无论  $f$  多大,  $\theta$  也不会变化。

在递归过程中, 只要  $\omega$  使该轴后代的所有啮合副中一个啮合点的转角为零, 就会出现奇点。因此多级传动系统的树根剩余扭矩奇点远远多于系统固有频率个数。

为了消除奇点, 将式(5)代入式(4)有

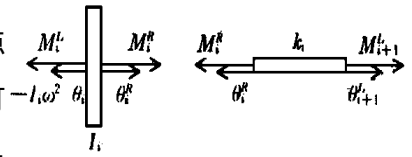


图 2 第  $i$  端单元示意图

Fig 2 The  $i$ th segment

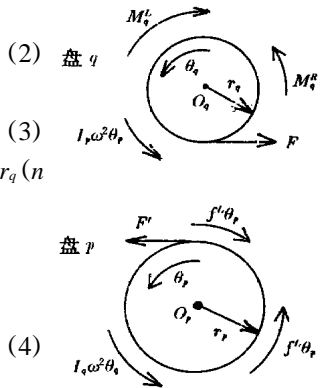


图 3 两个啮合圆盘

Fig 3 The two engaging plates

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_q^R = \frac{1}{f^D} \begin{bmatrix} f^D & 0 \\ -I_q \omega^2 f^D + f^E/n^2 & f^D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_q^L \quad (6)$$

如果我们记录了  $f$  的分子和分母, 则式(6)中矩阵乘以向量不会存在奇点, 而  $1/f^D$  可作为父轴的传递中一个比例因子, 这里可删去, 直接用下式代替式(4)的点传递

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_q^R = \begin{bmatrix} f^D & 0 \\ -I_q \omega^2 f^D + f^E/n^2 & f^D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_q^L \quad (7)$$

对递归过程的所有啮合点均按式(7)处理, 由递归过程可知各轴的  $f^E$  均是  $\omega^2$  的多项式, 可以证明根轴的  $f^E$  的多项式次数就等于系统的自由度数, 又若  $\omega$  取系统固定频率, 则  $f^E$  必等于零, 所以  $f^E$  与系统特征多项式只相差一个非零系数, 因此, 计算固有频率, 就等于寻找根轴  $f^E$  的零点, 而后者作为多项式, 肯定没有奇点。

为了编程简洁, 式(7)可进一步变形为

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_q^R = \begin{bmatrix} f^D & 0 \\ f^E/n^2 & f^D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I_q & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_q^L \quad (8)$$

式中第一个矩阵记为  $T_\omega$ 。它反映的是  $I_q$  右侧向量与子轴相互作用关系, 这个关系与  $I_q$  本身无关。

传动系统中, 有时会出现一个主动轮带动几个从动轮, 可仿图(3)作相似分析, 这时式(8)右端第一个矩阵变为各子轴  $T_c$  之积。

以上公式均为自左向右传递关系, 自右向左的点场传递关系为

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_q^L = \begin{bmatrix} f^D & 0 \\ -f^E/n^2 & f^D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \omega^2 I_q & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_q^R \quad (9)$$

### 3 算例

#### 3.1 算例 1

为了考核算法, 构造图 4 所示的模型, 其参数见表 1。轴 1 的  $I_8$  与  $I_{10}$  分别与轴 2 和轴 3 的  $I_2$  和  $I_5$  啮合, 传动比均为 1。选择  $I_9$  为根轴的传递终点, 经过奇点消除处理后的计算结果的频率部分见表 2, 它与用解析法计算的结果在小数点后六位以内完全一致, 这就验证了本文的方法是可靠的。二者的振型结果也是一致的。限于篇幅, 不再列出具体的数据。根据本文提出的方法绘制的剩余扭矩图没有奇点, 未消除奇点的余量图有很多反号奇点, 特别是在  $\omega = 1$  附近, 很小的频率范围之内就有多个奇点, 不只是漏掉固有频率, 稍有不慎, 奇点也会漏掉。

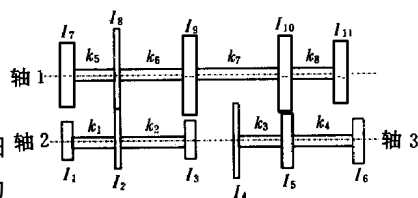


图 4 算例 1 模型

Fig 4 The model of example 1

表 1 算例 1 参数

Tab. 1 The data of model of example 1

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$I_i/\text{kg} \cdot \text{m}^2$	1	0.5	1	1	0.5	1	1	0.5	1	0.5	1
$k_i/\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$	1	1	3	4	2	5	6	7			

表 2 算例 1 的频率

Tab. 2 The frequency of model of example 1

阶次	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\omega/\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	0.0000	0.8872	1.0000	1.2578	1.8239	2.0954	2.4790	3.7522	5.1245

### 3.2 算例 2

图 5 是一只船舶的主传动模型,  $I_4$  与  $I_6$  分别表示低压和高压蒸汽轮机的惯性,  $I_3$  与  $I_5$  代表中速齿轮,  $I_2$  为主齿轮,  $I_1$  为螺旋桨。具体参数和符号意义见文献 [2, 4]。系统有 6 个自由度, 第 1 阶为零频。文献的结果和本文的结果列于表 3。由表 3 可看出, 对前 5 阶频率, 本文的结果与文献的基本一致, 而第 6 阶频率文献 [2, 4] 均未提供, 它与第 5 阶频率非常接近。对  $T(\omega)$  图细化, 发现在第 5 阶和第 6 阶频率之间有一个反号的奇点, 但是用弦割法寻找零点时, 很容易漏掉第 6 阶。而按本文的算法在计算第 6 阶频率时非常稳定, 余量图无奇点。

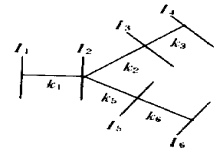


图 5 算例 2 模型  
Fig 5 The model of example 2

### 4 结 语

本文提出了一种递归方法计算复杂分支轴系模态参数方法。该方法无需针对具体结果编制迭代过程。为了提高迭代的数值稳定性, 讨论了奇点的物理意义, 并给出了消除奇点的措施。两个算例表明本文提出的方法是可靠的。

表 3 算例 2 与文献 [2, 4] 的固有频率比较

Tab 3 The final comparison of natural frequency between the model example 2 and document [2, 4]

阶次	Hz				
	2	3	4	5	6
文献 [2]	2 110	7. 005	28 681	135. 11	-
文献 [4]	2 110	7. 007	28 692	135. 108	-
本文	2 110	7. 005	28 680	135. 108	135. 751

### 参 考 文 献

- 1 陈奎孚, 焦群英 链式结构振动系统固有频率互异性 北京农业工程大学学报, 1995, 15(2): 24~ 28
- 2 郑兆昌 机械振动(中册). 北京: 机械工业出版社, 1988 295~ 304, 511~ 522
- 3 王 正 Riccati 传递矩阵法的奇点及其消除方法 振动与冲击 1987(2): 74~ 78
- 4 吴慧新, 严新生 分支轴系扭振分析的动态子结构矩阵法 振动、测试与诊断, 1995, 15(2): 1~ 8

## The Recursive Transfer Matrix Method to Calculate the Torsional Vibration of Complex Transmission System

Chen Kuifu Peng Hongtao Jiao Qunying  
(China Agricultural University, Beijing, 100083)

**Abstract** The existing transfer matrix method used to calculate complex transmission system needs programming and debugging in accordance with specific structures, in addition, its residual function has many singular points. The transmission system has the tree structure, a recursive routine was presented, which can be applied to any system without repetitive programming. The singular points were also eliminated by revising the transfer procedure. The simulation results showed that the new method has high efficiency and stability.

**Key words** transmission system, torsional vibration, natural frequency, recursive program, tree structure