第 19 卷 第 5 期
1963 年 5 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 19, No. 5
May, 1963

論散射过程相分析中的不定性問題*

黄 念 宁

提 要

从散射过程的相分析中存在不同的相移的选取所必須滿足的条件出发,在本工作中,討論了任意自旋粒子的弹性散射过程的相分析中的不定性問題. 給出了全部不同的相的集合之間的变换矩陣,其中所含的实参数由二阶代数方程組决定,因此相分析中的不定性問題化为解这些代数方程的实根的問題. 指出此实根的組数之半卽为相分析中不同选取的組数. 这样,相分析中的运动学不定性問題已完全解决. 当道自旋为 1/2 时,只存在两組不同的相移,当道自旋为 1 时,也只有两組不同的相移,因此証明了,已知的南氏不定性是这样的自旋值下的全部不定性. 在道自旋为 3/2 时,給出了四組不同的相移. 因此除已找出的相移間的变换外,还存在两种新的变换. 物理上說,相分析中的不定性相应于自旋的某种运动,它保持自旋张量在动量方向的分量不变,且表征此种运动的参量取一定数值. 从討論中得出,道自旋为整数的情况和为半整数的情况,相移的变换矩陣中所含的实参数所满足的代数方程組具有十分不同的性質,因此实根的組数也不同. 这表示,道自旋为整数和为半整数的情况的相移的不同选取的組数也完全不同. 一般的推测是,道自旋为整数的情况时的相移不同选取要比为半整数时的少很多.

一

利用散射截面决定相移,是近年来研究核相互作用的主要問題. 結果发現,所有的工作中都存在相移的非单值性,因此通常总是給出几組最好描写实验結果的相移[1].

在 π 介子与核子的散射的相分析中,众所周知,存在費米选取和揚选取,但是这种选取之間的取舍原則上可以由精确測量微分截面来判定. 可是同样为众所周知的南氏不定性[2],它所給出的两組不同的相移的选取,則是原則上不能由微分截面来分辨的[3]. 我們称前一种不定性为动力学的,后一种为运动学的.

我們看到,由于一般地存在运动学的不定性,通过微分截面完全决定相移,原則上就是不可能的. 因此完全决定相移的問題首先就要求解决究竟存在着哪些运动学的不定性,然后才便于討論利用什么样的极化現象的測量以消除此等不定性[4]. 这就是完全測量所要解决的問題. 此外,还由于存在相移的变号的不定性,使得完全測量的問題变得更加复杂[4].

南繁夫[2]最先由自旋 1/2 的粒子的散射的微分截面的表式中的拉卡系数的对称性質,发現了所謂南氏不定性. 在南氏变换下,一組相移换成另一組相移,而保持微分截面不变. 随后,不少作者[5]指出了南氏不定性相应于始末态的自旋繞各自的动量方向的轉

* 1962 年 5 月 25 日收到.

动，其轉角取某定値（$\pm\pi$）．因此物理上説明了南氏不定性相应于微分截面不能反映此种自旋的变动的結果．

布西柯夫等[4]曾經結合着变号的不定性討論了π介子与核子、核子与核子散射的完全測量的問題．但是在核子与核子散射的情况下，他們沒有給出正确的結果，原因是沒有得出所需的相移的不同选取．随后，扎斯塔文柯等[6]才找出了代表核子与核子散射中的运动学不定性的变换，并討論了与此种情况下的完全測量有关的問題．

然而这时也会产生一个疑問，除了所找到的相移的变换外，是否不存在别的运动学不定性了．对上述簡单情况，一般認为[7]再也沒有别的运动学不定性了．另一方面，找出此等代表不定性的变换的一般方法，看来是不清楚的，已知的結果的求得，都似乎有偶然的性质．同时，对于高自旋的情况，此等代表运动学不定性的变换如何寻找，至今也无一定方法．

本文的目的是，从相分析中存在不同的相移的选取所必須滿足的和充分的条件出发，一般地討論两个具有任意自旋的粒子的散射过程相分析中的不定性問題．試图找出全部代表不同相移的集合間的变换矩陣，給出計算此等变换矩陣的方法，从而完全解决相分析中的全部运动学不定性問題．由此可論証已知的結果的唯一性問題．

为了这样的目的，我們首先总結出存在不同相移的选取时所应滿足的必要条件，論証此等条件合在一起确是充分条件．这些条件是一般的散射过程中成立的种种不变性或守恆定律的結果，其中包括空間轉动，反射和时間反演的不变性．在这些条件中S矩陣的么正性条件起着最重要的作用．别的条件必要时可作一定的修改以放寬一些，譬如我們要放弃宇称守恆，那么作局部修改后結果仍不难得出．

由于这样的任务相当复杂，我們只限于討論保持道自旋不变的情况，因为一方面这种情况在实际問題中是最重要的，同时也是一般的相互作用置换对称的結果[11]．在这种情况下，由于不同的道的微分截面相加的性质，在不定性問題的討論中可以分别对一定道自旋的情况一一研究．这时，对一定道自旋的散射过程的不定性問題的研究中，由于可以引入道自旋算符而使問題实际上化为和只有一个粒子具有自旋时的处理一样，使計算大大簡化，而更清楚的反映物理內容．在这种情况下，我們得到了全部不定性問題的結果，并指明了相分析中的不定性所反映的物理內容．

随后我們找出了滿足如上所总結出的必要条件的全部綫性独立的厄米变换，算出它們对相移所引起的变换的厄米矩陣，結果得出此等矩陣是实对称矩陣．証明了滿足相应的必要条件的任何么正变换，都可写成它們的指数函数的形式．这时我們对此等么正变换的物理解释是：它們一般地相应于自旋的某种运动，保持自旋张量在动量方向的分量不变．給出了含有实参数的不同相移选取間的变换矩陣，但是是指数矩陣的形式．

在应用我們的全部条件后，原則上可以决定如上的指数矩陣形式中所含的实参数．但是将指数矩陣的形式化为通常矩陣的形式，一般説来是十分繁瑣的，对高自旋的情况进行具体計算是很困难的，因而很不便于得出一般的結果来．这样我們采用另一种更直接的方法，即首先由滿足相应的必要条件的任意算符都可展开为如上所述的綫性独立的厄米算符的形式，因而可令我們的么正算符直接为此等厄米算符的組合的形式，通过我們所有的条件証明了此展开系数为实数，再利用么正性条件得出此等展开系数所应滿足的二阶

代数方程組. 此方程組的实根即我們所要的展开系数,因而原則上說来,解出此代数方程組的实根,就可得出我們所討論的散射过程的相分析中全部代表不定性的变换矩陣. 得出了全部矩陣的形式,它們的元由拉卡系数和磁量子数为 0 的克莱布希-哥东系数表示出来. 由方程組的不含綫性項的性質可以得出,若存在一組解,則全部变号后也是一組解. 由于这給出的变换矩陣互相只是一个±号的不同,而非新的变换矩陣,所以此二阶代数方程組的实根的組数之半,才是可能变换的数目.

从討論中得出的决定实参数的代数方程組看,整数自旋情况的与半整数自旋情况的很不相同. 如果自旋为 s,証明了一般有 $2s+1$ 个实参数,若以 0, 1, 2, ···, $2s$ 来編号,則依賴于偶数編号的实参数与依賴于奇数編号的实参数,各自滿足一个代数方程組,其中方程的数目等于如上的偶数編号的数目. 因此,在整数自旋下,依賴于奇数編号的实参数为 s 个,而依賴于偶数編号的实参数为 $s+1$ 个. 这样,依賴于奇数編号的 s 个实参数,将要滿足 $s+1$ 个二阶代数方程,因而一般可能是无解的. 这意味着在整数自旋的情况下,代表不定性的变换的数目要少很多.

最后将我們所得的結果应用于道自旋为 1/2, 1 和 3/2 的情形. 在 1/2 时得到了南氏变换是全部代表运动学不定性的变换的結論. 在 1 时,找出唯一的一組变换卽扎斯塔文柯等[6]对核子与核子散射的道自旋为 1 时的变换. 同时原則上本来似乎还可能存在一种变换的,但是如上所指出的,这相当要求一个实参数(奇賴于奇数編号的)滿足两个方程,可是这方程組是矛盾的,因而实际上不存在别的变换.

在自旋 3/2 时,找出了四种可能的相移的选取. 相应于三种变换(恆等变换除外),除了其中的一种是工作[8]中对核子与氚核散射的道自旋为 3/2 时所找出的变换外,还有两种新的变换. 我們算出了此等变换矩陣所引起的相移和混合参量的变换. 簡单地指出了此四种相移和混合参量变换时的羣的特性.

从我們的結果中得出,若有必要討論高道自旋的情况,則相应地解出此等代数方程組之实根,代入所給的变换矩陣的形式中,卽可写出所要的結果. 因此在本工作中,概括了当道自旋守恆时的任意自旋粒子的散射的相分析中的全部运动学不定性問題的結論.

在附录中給出本文所牽涉的一些計算的一般結果.

二

首先我們討論道自旋守恆的弹性散射过程的相分析中若存在不同的相移的选取所必須滿足的条件,然后研究此等条件合在一起是否充分的問題. 設自旋道 s 有两种不同的相移的集合 $R^{Js}_{l;l'}$ 和 $R'^{Js}_{l;l'}$ 存在,它們給出不同的散射振幅 $M(\mathbf{q},\mathbf{q}')$ 和 $M'(\mathbf{q},\mathbf{q}')$:

$$
\begin{aligned}
M(\mathbf{q},\mathbf{q}') &= \frac{2\pi}{iq}\sum_{JM}\sum_{ll'} Y^{JM}_{ls}(\mathbf{q})Y^{JM+}_{l's}(\mathbf{q}')R^{Js}_{l;l'},\\
M'(\mathbf{q},\mathbf{q}') &= \frac{2\pi}{iq}\sum_{JM}\sum_{ll'} Y^{JM}_{ls}(\mathbf{q})Y^{JM+}_{l's}(\mathbf{q}')R'^{Js}_{l;l'},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

这里 q 为动量的絕对值, $\mathbf{q}'$, $\mathbf{q}$ 分别代表始末态的单位动量矢量, l', l 为軌道角动量, s 为道自旋, J, M 为总角动量之值和投影值. $Y^{JM}_{ls}(\mathbf{q})$ 为描写具有一定总角动量值 J,投影 M,軌道角动量 l 和道自旋 s 的态的球諧函数. $R^{Js}_{l;l'}$ 为一定角动量态間的 R 矩陣元.

若如上的两种不同的散射振幅M和M'給出相同的散射微分截面值，卽保持下方程的不变性

$$\mathrm{Tr}MM^{+} = \mathrm{Tr}M'M'^{+} \tag{2}$$

（式中 Tr 表示对自旋空間矩陣的求迹），則M与M'之間应当存在如下形式的变换：

$$M'(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = U_1 M(\mathbf{q}, \mathbf{q}') U_2^{+}, \tag{3}$$

式中 U_1, U_2 为么正变换，由于微分截面不变，易見它們应与动量算符对易.

为了使得 $R^{Js}_{l;l'}$ 和 $R'^{Js}_{l;l'}$ 具有同样的物理意义，卽同样地满足由 S 矩陣的么正性导出的下列結果：

$$\begin{aligned} R^{Js}R^{Js+} &= -R^{Js} - R^{Js+}, \\ R'^{Js}R'^{Js+} &= -R'^{Js} - R'^{Js+} \end{aligned} \tag{4}$$

（式中 R^{Js} 为由 $R^{Js}_{l;l'}$ 写成的矩陣），那么 R^{Js} 与 R'^{Js} 之間应当存在么正变换 L^{Js}，使得

(I) $$R'^{Js} = L^{Js}R^{Js}L^{Js+}.$$

将(3)和(I)代入(1)，比較后卽見

(II) $$\begin{aligned} U_1 Y^{JM}_{ls}(\mathbf{q}) &= \sum_{l''} L^{Js}_{l'';l} Y^{JM}_{l''s}(\mathbf{q}), \\ U_2 Y^{JM}_{l's}(\mathbf{q}') &= \sum_{l'''} L^{Js}_{l''';l'} Y^{JM}_{l'''s}(\mathbf{q}'). \end{aligned}$$

由此式可見，式中的 U_1, U_2 除可能依賴于不同的宗量 $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}'$ 外，应具有相同的形式，所以若 U_1, U_2 一般地依賴于动量，則有如下的形式

(III) $$\begin{aligned} U_1 &= U(\mathbf{q}), \\ U_2 &= U(\mathbf{q}'). \end{aligned}$$

这卽是說，U_1 和 U_2 是同一个算符 $U(\mathbf{p})$ 当动量算符 $\mathbf{p}$ 取本征值 $\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{q}'$ 时的变换，这正是算符 $U(\mathbf{p})$ 作用于末态和始态的波函数上的結果. (III)式当然满足 S 矩陣的么正性所导出的下列关系：

$$\int_q d\omega_{\mathbf{q}''} M(\mathbf{q}, \mathbf{q}'') M^{+}(\mathbf{q}', \mathbf{q}'') = 2\pi[-iM(\mathbf{q}, \mathbf{q}') + iM^{+}(\mathbf{q}', \mathbf{q})] \tag{5}$$

（式中 $d\omega_{\mathbf{q}''}$ 为立体角元）.

由(II)显見，

(IV)　　$U(\mathbf{p})$ 与总角动量算符 $\mathbf{J}^2$，投影 $\mathbf{J}_z$ 和道自旋算符 $\mathbf{s}^2$ 对易.

在我們的討論中显然不必考虑与軌道角动量也完全对易的 $U(\mathbf{p})$ 的可能形式，因为如此的算符給出的相应的 L^{Js} 为一常数乘以单位矩陣.

由于散射过程中一般地宇称是守恆的，变换 $U(\mathbf{p})$ 应当为

(V)　　$U(\mathbf{p})$ 具有确定的宇称.

或者等价地

$$L^{Js}_{ll'} = 0, \quad \text{当 } l,\ l' \text{ 之差为奇数，这相当 } U(\mathbf{p}) \text{ 具有正宇称；}$$

或

$$L^{Js}_{ll'} = 0, \quad \text{当 } l,\ l' \text{ 之差为偶数，这相当 } U(\mathbf{p}) \text{ 具有負宇称.}$$

由于时間反演的不变性或运动的可逆性，在一定的 J, s 值下，R^{Js} 为一对称矩陣[6,11].

如果变换 L^{ls} 保持这种对称性，则[6,9]

(VI) L^{ls} 恆可取作具有确定对称性的厄米矩陣.

如上的条件每一个都是相分析中存在不同的相移选取时所必須滿足的条件，对我們說来，显然沒有必要去討論它們是否独立的問題，因为即使不独立也不过使我們多做点驗証的工作. 例如 (III) 和 (IV) 就是 (I) 和 (II) 的直接結論. 但是上述条件合在一起是否充分却是有重要意义的結果，因为只有当它們构成充分条件时，滿足它的变換 $U(\mathbf{p})$ 和 L^{ls} 才会給出不同的但合乎物理要求的相移选取間的变換. 容易看出，若条件 (I)—(VI) 均滿足，則微分截面(2)不变，S 矩陣的么正性(4)和(5)仍然保持，也不破坏宇称守恆、时間反演的不变性，所以通过这样的变換，将給出新的与原来的有相同物理意义的相移. 因此上述条件合在一起是充分的. 这样我們的条件 (I)—(VI) 构成了存在不同的相移的选取时所应滿足的必要和充分的条件. 在上述条件的建立上，S 矩陣的么正性条件起着中心作用. 如果宇称不必守恆，条件 (V) 应去掉，若时間反演不变性不必成立，則条件 (VI) 应作一个修改. 这点我們不去討論.

三

为了得到滿足条件 (IV) 的 $U(\mathbf{p})$，我們首先一般地找出与 $\mathbf{J}^2$、J_z 和 $\mathbf{s}^2$ 对易的算符来. 在此过程中与动量算符对易的全部力学量为能量算符、动量算符、粒子的自旋 $\mathbf{s}_1$ 和 $\mathbf{s}_2$ 以及它們的函数. 由它們构成的与 $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}_z$ 和 $\mathbf{s}^2$ 对易的算符有：能量的函数、动量平方的函数、$\mathbf{s}^2$ 的函数和 $(\mathbf{s}, \mathbf{p})$ 的函数. 由于前三种在我們討論的情况下与軌道角动量也对易，因而不必研究它們 (IV). 那么，唯一値得研究的是 $(\mathbf{s}, \mathbf{p})$ 的函数. 我們可令此 $\mathbf{p}$ 为归一化的算符，即只反映动量方向.

当道自旋为 s 时，自旋算符 $\mathbf{s}$ 的任何函数恆可表为自旋张量算符 $\Omega^s_{kx}(k = 0, 1, \cdots, 2s;\ x = -k, \cdots, k)$ 的展开. 这点是显然的，因为自旋算符 $\mathbf{s}$ 的任何函数也是 $(2s+1)\times(2s+1)$ 維的矩陣，而 Ω^s_{kx} 是如此的矩陣空間的独立完备的矩陣. 标量函数 $(\mathbf{s}, \mathbf{p})$ 用 Ω^s_{kx} 展开时，必然采取下列标量厄米算符：

$$F^{sk}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \sum_{x=-k}^{k} \Omega^s_{kx} Y_{k-x}(\mathbf{p})(-1)^x \tag{6}$$

的綫性組合的形式. 这是因为 $F^{sk}(\mathbf{p})$ 是由自旋张量 Ω^s_{kx} 和 $\mathbf{p}$ 所能构成的唯一的独立标量之故.

现在討論 (6) 式的 $F^{sk}(\mathbf{p})$ 作用于 $Y^{JM}_{ls}(\mathbf{q})$ 上的結果. 首先算符 $\mathbf{p}$ 換成值 $\mathbf{q}$. 由于 $Y^{JM}_{ls}(\mathbf{q})$ 等于

$$Y^{JM}_{ls}(\mathbf{q}) = \sum_{m\mu} (JM|lms\mu) Y_{lm}(\mathbf{q}) x_{s\mu}, \tag{7}$$

式中 $(JM|lms\mu)$ 为克萊布希-哥东系数，$x_{s\mu}$ 为道自旋函数. 根据球諧函数的迭合法則[10] 和自旋张量的矩陣元的維格勒-愛卡特表式[11]，可以算出 $(A, 7)$：

$$F^{sk}(q) Y^{JM}_{ls}(\mathbf{q}) = \sum_{l'} \mathscr{F}^{Jsk}_{l'l} Y^{JM}_{l's}(\mathbf{q}), \tag{8}$$

式中对 l' 的求和由 $|J-s|, \cdots, J+s$, 而 $(A, 9)$

$$\mathscr{F}^{lsk}_{l'l} = (-1)^{l+s}\sqrt{(2s+1)(2k+1)(2l+1)(2l'+1)}\times \\ \times\begin{pmatrix} k & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} l' & k & l \\ s & J & s \end{Bmatrix}, \tag{9}$$

这里 $\begin{pmatrix} k & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{Bmatrix} l' & k & l \\ s & J & s \end{Bmatrix}$ 分别为維格勒的 $3j$ 記号和 $6j$ 記号[12]. 由于它們相对于 l, l' 是对称的，所以由(9)式得出，$\mathscr{F}^{lsk}_{l'l}$ 是相对于 l, l' 对称的. 又因为它們取实数値，所以

$$\mathscr{F}^{Jsk} = \text{实对称矩陣}. \tag{10}$$

既然已知与 $\mathbf{J}^2$, J_z 和 $\mathbf{s}^2$ 对易的算符恆可写作 $F^{sk}(\mathbf{p})$ 的綫性組合的形式，那么若将系数取作实数，由于 $F^{sk}(\mathbf{p})$ 本身是厄米算符，则得的算符也是厄米的. 反之，一个厄米算符用 $F^{sk}(\mathbf{p})$ 展开，由于 $F^{sk}(\mathbf{p})$ 的相互独立性，其展开系数必为实数. 这样得到与 $\mathbf{J}^2$, J_z 和 $\mathbf{s}^2$ 对易的任何厄米算符 H 恆可写作：

$$H = \sum_{\alpha=0}^{2s} a_k F^{sk}(\mathbf{p}), \tag{11}$$

式中 a_k 为实数. 利用(8)式可得

$$HY^{JM}_{ls}(\mathbf{q}) = \sum_{l'} \mathscr{H}^{Js}_{l'l} Y^{JM}_{l's}(\mathbf{q}), \tag{12}$$

这里矩陣

$$\mathscr{H}^{Js} = \sum_{k=0}^{2s} a_k \mathscr{F}^{Jsk}. \tag{13}$$

由于任何么正算符都可以写成厄米算符的指数的形式[13]，如果此么正算符 K 与 $\mathbf{J}^2$, J_z 和 $\mathbf{s}^2$ 对易，則它必可写作：

$$K = \exp iH = \exp i\sum_{k=0}^{2s} a_k F^{sk}(\mathbf{p}). \tag{14}$$

这样再利用(8)和(12)式可得

$$KY^{JM}_{ls}(\mathbf{q}) = \sum_{l'} \mathscr{K}^{Js}_{l'l} Y^{JM}_{l's}(\mathbf{q}), \tag{15}$$

且

$$\mathscr{K}^{Js} = \exp i\mathscr{H}^{Js} = \exp i\sum_{k=0}^{2s} a_k \mathscr{F}^{Jsk}. \tag{16}$$

由(14)和(16)引入的 K 和 $\mathscr{K}^{Js}$ 滿足条件 (I)—(IV)，所以是 U 和 L^{Js} 的可能解. 如果再利用 (V) 和 (VI) 来限制它們，卽决定其中的参数 a_k，就会得到所需的 U 和 L^J.

在前一步討論之前，先来解释一下(14)和(16)式中引入的 K 和 $\mathscr{K}^{Js}$ 的物理意义. 戴逊和南部[5] 以及福田等[5]，曾經指出了自旋 1/2 的粒子的散射的相分析中的代表不定性的变换之严格意义. 在那种情况下，相应于南氏变换的 $U(\mathbf{p})$ 算符为

$$U(\mathbf{p}) = \exp i\theta(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}), \tag{17}$$

其中 θ 取値 $\pm\pi$. 我們先看一般的 θ 値下，(17)式的 $U(\mathbf{p})$ 的物理意义. 由于此算符与自旋自量在动量方向的分量对易，因而此 $U(\mathbf{p})$ 表示自旋矢量繞动量方向的轉动，θ 可以了解为轉角. 福田等[5]指出，θ 只有取 $\pm\pi$ 时，才能保持相移的实数性質. 这等价于我們的条件 (VI) 的限制. 因此在自旋 1/2 的情况下，南氏变换相应于自旋繞动量方向的，轉

角为一定值（$\pm\pi$）的轉动. 但是应当注意的是，始态的自旋繞始态的动量轉，末态的自旋繞末态的动量轉. 这即是我們由 S 矩陣的么正性条件导出的条件(I). 在这样的了解下，不难看出测量极化将消除南氏不定性.

在我們的情况下，間題比較复杂，試看(14)中的一个因子

$$K_k = \exp i\alpha_k F^{sk}(\mathbf{p}), \tag{18}$$

显然它与各阶自旋张量在动量方向的分量对易，因为由（A, 13），任意两个 $F^{sk}(\mathbf{p})$ 和 $F^{sk'}(\mathbf{p})$ 是对易的. 由(18)式中的 K_k 的积組成的 K，因此表示保持各阶自旋张量在动量方向的分量不变的某种运动. 这种运动由若干实参数来表征. 这点沒有什么惊奇的地方，因为众所周知[14]，自旋不是一种古典的矢量，而是一种要求測量其各阶自旋张量的期望值才能决定的量子力学算符. 解释旣然如此，一般我們就很难描繪出一幅有直观意义的运动学图象了.

正如条件(VI)限制在自旋 1/2 的情况下的(17)式中的 θ 所取之值一样，在我們的情况下，条件(V)和(VI)也将限制 α_k 之值. 一般說来，可能有几个 α_k 同时取不为 0 的值. 这表示所需的变换为此几个具有一定值的 α_k 之 K_k 之积. α_k 的可能解的組数，一般的应与相分析中的相移的不同选取的組数有关.

四

在高自旋的情况下，直接采用(14)和(16)式，由条件(V)和(VI)来决定 α_k 所可取之値是很困难的. 原因在于在应用条件(V)和(VI)时，現今所知的方法是，先要将矩陣的指数函数化为通常的矩陣形式，而这是十分繁瑣的. 它将先化为无穷級数，再处理一連串的矩陣乘积，然后再求出此矩陣形式的无穷級数之和. 因此我們采用另一种有可能直接求出結果的方法.

既然已知与 $\mathbf{J}^2$, J_z 和 $\mathbf{s}^2$ 对易的任何算符俱可写成 $F^{sk}(\mathbf{p})$ 的綫性組合的形式，那么我們可以直接假設欲求的 $U(\mathbf{p})$ 为如下的形式:

$$U(\mathbf{p}) = \sum_{k=0}^{2s} \beta_k F^{sk}(\mathbf{p}), \tag{19}$$

式中 β_k 一般为复参数. 其値由 $U(\mathbf{p})$ 所应满足的其余的条件决定. 以此作用于 $Y^{JM}_{ls}(\mathbf{q})$ 上，得到相应的 L^{Js} 如下:

$$L^{Js} = \sum_{k=0}^{2s} \beta_k \mathscr{F}^{Jsk}. \tag{20}$$

在計及全部条件后，若求得 β_k 的一組解，則必然对应于(14)和(16)中的实参数 α_k 的一組值. 但是正如我們前面所指出的，求出此种对应在高自旋情况下是极困难的，而且似乎这一必要性也不太大. 我們不去討論此种对应，只討論满足全部条件的 β_k 所应取的値.

首先由(V)的限制，要求(19)中的 $U(\mathbf{p})$ 具有一定的宇称. 由于 $F^{sk}(\mathbf{p})$ 的宇称为 $(-1)^k$，所以合乎此种要求的(19)式，其中 k 要就只取奇数値，要就只取偶数値. 相应的(20)式当然也如此. 这也可由 $\mathscr{F}^{Jsk}_{ll'}$ 的性质看出来. 由 $\mathscr{F}^{Jsk}_{ll'}$ 中的因子 $\begin{pmatrix} k & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 只当 $k + l + l'$ 为偶数时才不为零. 所以当 l, l' 之差为偶数时，k 为偶数时 $\mathscr{F}^{Jsk}_{ll'}$ 才不为零，

当 l, l' 之差为奇数时，k 为奇数时 $\mathscr{F}^{ls}_{l's}$ 才不为零. 因此由 (V′) 也得到如上的結論. 因此满足条件 (V) 和 (V′) 的(19)式和(20)式所定义的 $U(\mathbf{p})$ 和 L^{ls} 的一般形式为

$$U(\mathbf{p}) = \sum_k{}^{(i)} \beta_k F^{sk}(\mathbf{p}), \tag{21}$$

$$L^{ls} = \sum_k{}^{(i)} \beta_k \mathscr{F}^{lsk}, \tag{22}$$

式中 $\Sigma^{(i)}$ 表对 k 的求和，当 $i=1$ 表对奇数值的 k 求和，当 $i=2$ 表对偶数值的 k 求和.

現在考虑条件 (VI)，由于 $\mathscr{F}^{lsk}$ 是实对称矩陣，所以应用条件 (VI) 于其綫性組合上，要求此組合为具有确定对称性的厄米矩陣，則必然得出組合之系数 β_k 为实数的結論. 这里应当注意对不同的 k 說来，$\mathscr{F}^{lsk}$ 的独立性，这是 $F^{sk}(\mathbf{p})$ 的独立性的直接結果，也可由 $\mathscr{F}^{lsk}$ 的表式得出来. 所以将 β_k 的实数性条件代入(22)，卽見与条件 (VI) 等价的是

(VI′) $L^{ls} =$ 实对称矩陣，

或以此条件代入(21)，卽見条件 (VI) 也等价于

(VI″) $U(\mathbf{p})$ 为厄米算符.

这样再由 $U(\mathbf{p})$ 的么正性条件的要求，得

$$U^2(\mathbf{p}) = I, \tag{23}$$

或等价地由 L^{ls} 的么正性条件的要求得

$$(L^{ls})^2 = I. \tag{24}$$

此等条件卽可限定实参数 β_k.

我們采用(23)式，当然，其結果由条件(24)一样得出. 将(21)代入(23)，利用 $(A, 10)$ 得

$$\sum_{k''} \sum_k{}^{(i)} \sum_{k'}{}^{(i)} b^{sk''}_{kk'} \beta_k \beta_{k'} F^{sk''}(\mathbf{p}) = I, \tag{25}$$

式中的 i 取 1 或取 2. 由于 $F^{sk''}(\mathbf{p})$ 的独立性，上式两端不同 k'' 的 $F^{sk''}(\mathbf{p})$ 的項的系数应相等，注意 $F^{s0}(\mathbf{p}) = I$，故得

$$\sum_k{}^{(i)} \sum_{k'}{}^{(i)} b^{sk''}_{kk'} \beta_k \beta_{k'} = \delta_{k''0}, \tag{26}$$

式中 $\delta_{k''0}$ 为克劳尼克記号，而系数 $b^{sk''}_{kk'}$ 为 $(A, 12)$

$$b^{sk''}_{kk'} = (-1)^{2s} \sqrt{(2s+1)(2k+1)(2k'+1)(2k''+1)} \times \\ \times \begin{pmatrix} k & k' & k'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} s & k & s \\ k' & s & k'' \end{Bmatrix}. \tag{27}$$

由于 k, k' 同时取奇数，或同时取偶数，所以由(27)中 $\begin{pmatrix} k & k' & k'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 当 $k+k'+k''$ 为奇数时为 0 的性質可得 (26) 方程組中不恆为零的方程的 k'' 只能取偶数值. 因此上式所表示的方程組的方程数，当 s 为整数值时为 $s+1$ 个，当 s 取半整数值时为 $\frac{1}{2}(2s+1)$ 个.

由于上方程組不含 β_k 的綫性項，只含有双綫型項，所以若 $\beta_k^{(0)}$ 是一組解，則 $-\beta_k^{(0)}$ 也是一組解. 显然这两組解給出同样的相移的变換. 因此不同的相移的选取的数目为方程組(26)的实数解的組数之半.

現在我們來看方程組(26)的变量 β_k 的个数,容易得出下列結果:

	k 取偶数值的 β_k 的个数	k 取奇数值的 β_k 的个数	方程数
s 半整数	$\frac{1}{2}(2s+1)$	$\frac{1}{2}(2s+1)$	$\frac{1}{2}(2s+1)$
s 整数	$s+1$	s	$s+1$

由此看出一个非常有趣的結果. 当 s 为整数时, k 取奇数值的 β_k 的个数为 s, 比它們所应滿足的方程的个数 $s+1$ 少一个. 这在数学上可能导致无解的情况. 当然要确証此方程組无解,将依賴于系数 $b_{kk'}^{ck''}$ 的性質,这点我們不去詳細討論. 我們以下用簡单的例子($s=1$)来說明那时它确实是无解的,因此我們猜測它一般地也可能是无解的. 但不論怎样,如上的結果已經反映出,整数自旋的情况与半整数自旋的情况下相移的不同选取的組数是很不相同的,因为可能的 β_k 之値滿足的方程組的性質有如此重大的区别. 如果我們的猜測是正确的,則整数自旋情况时的相移的不同选取的可能数将大大減少,但无論怎样也比半整数自旋的情况时的要少.

五

对低道自旋情况,我們写出最終的結果. 对道自旋为 1/2 时,以 $b_{00}^{\frac{1}{2}0}=b_{00}^{\frac{1}{2}0}=1$ 代入(26)式,除当然解 $\beta_0=1$, $\beta_1=0$ 相应于 $U(\mathbf{p})=I$ 外,还有一解 $\beta_0=0$, $\beta_1=1$,它相应于南氏变换:

$$U(\mathbf{p})=F^{\frac{1}{2}0}(\mathbf{p})=\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}.$$

对道自旋为 1 时,以 $b_{11}^{10}=1$, $b_{11}^{12}=1/\sqrt{2}$ 代入(26),得一矛盾方程,因而无解. 这以例子說明了上节的一般猜測. 以 $b_{00}^{10}=b_{22}^{10}=b_{00}^{12}=1$ 和 $b_{22}^{12}=-1/\sqrt{2}$ 代入(26),除当然解外,另一解为 $\beta_0=1/3$, $\beta_2=2\sqrt{2}/3$. 所以相应的 $U(\mathbf{p})$ 为

$$U(\mathbf{p})=\frac{1}{3}F^{10}(\mathbf{p})+\frac{2\sqrt{2}}{3}F^{12}(\mathbf{p})=2(\mathbf{s}\cdot\mathbf{p})^2-I, \tag{28}$$

式中 $\mathbf{s}$ 为道自旋算符. 由此得(行列以 $l=J+1$, J, $J-1$ 的顺序)

$$L^{J}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2J+1} & 0 & \frac{2}{2J+1}\sqrt{J(J+1)}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{2}{2J+1}\sqrt{J(J+1)} & 0 & \frac{1}{2J+1}\end{pmatrix}. \tag{29}$$

不难直接驗証上式的平方为 I 的性質. 以 δ_{+1}^J, δ_0^J, δ_{-1}^J 分别表示 $l=J+1$, J, $J-1$ 时的相移, ε 表混合参量. 以 $\delta_{+\frac{1}{2}}'^J$, $\delta_0'^J$, $\delta_{-\frac{1}{2}}'^J$, ε' 分别表示变换后的相应的量,經过簡单的計算,得

$$\begin{gathered}\delta_{+\frac{1}{2}}'^J=\delta_{-\frac{1}{2}}^J,\quad \delta_0'^J=\delta_0^J,\quad \delta_{-\frac{1}{2}}'^J=\delta_{+\frac{1}{2}}^J,\\ \varepsilon'=\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{2}[J(J+1)]^{-\frac{1}{2}}-\varepsilon.\end{gathered} \tag{30}$$

此即为扎斯塔文柯等[6] 对核子–核子散射的道自旋为 1 时所得的变換. 但是这里有一点不同，我們的結果是对两个任意自旋粒子的散射在道自旋为 1 时的一般結果，而不限于由两个自旋 1/2 的粒子的散射的道自旋为 1 的情况. 另一点不同在于，他們是找出了这样的变換，而这里是指出了它是唯一的变換. 以两个自旋 1/2 的粒子的散射的道自旋为 1 的情况为特例代入，設 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$, $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ 为它們的自旋算符，由道自旋算符 $\mathbf{s}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{(1)}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$, 代入(28)，即見

$$U(\mathbf{p})=(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\mathbf{p}),$$

此正是[6]中的結果.

对道自旋为 3/2 的情况，以 $b^{\frac{3}{2}0}_{00}=b^{\frac{3}{2}0}_{22}=b^{\frac{3}{2}2}_{20}=1$ 和 $b^{\frac{3}{2}2}_{22}=0$ 代入(26)式，除当然解外，得到

$$U'(\mathbf{p})=F^{\frac{3}{2}2}(\mathbf{p})=(\mathbf{s}\cdot\mathbf{p})^2-\frac{5}{4}I, \tag{31}$$

式中 $\mathbf{s}$ 为道自旋算符. 以 $b^{\frac{3}{2}0}_{11}=b^{\frac{3}{2}0}_{33}=1$ 和 $b^{\frac{3}{2}2}_{11}=4/5$, $b^{\frac{3}{2}2}_{13}=3/5$ 和 $b^{\frac{3}{2}2}_{33}=-4/5$ 代入(26)式，得出两个解：

$$U''(\mathbf{p})=\frac{2}{\sqrt{5}}F^{\frac{3}{2}1}(\mathbf{p})-\frac{1}{\sqrt{5}}F^{\frac{3}{2}3}(\mathbf{p})=\frac{2}{3}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{p})^3-\frac{13}{6}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{p}), \tag{32}$$

$$U'''(\mathbf{p})=-\frac{1}{\sqrt{5}}F^{\frac{3}{2}1}(\mathbf{p})-\frac{2}{\sqrt{5}}F^{\frac{3}{2}3}(\mathbf{p})=\frac{4}{3}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{p})^3-\frac{7}{3}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{p}), \tag{33}$$

由此得出相应的 $L'^{l\frac{3}{2}}$, $L''^{l\frac{3}{2}}$ 和 $L'''^{l\frac{3}{2}}$ 如下（行列以 $l=J+3/2$, $J+1/2$, $J-1/2$, $J-3/2$ 的顺序）：

$$L'^{l\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} -\frac{2J+5}{J+1} & 0 & \frac{1}{J+1}\sqrt{3(2J+3)(2J-1)} & 0 \\ 0 & \frac{2J-3}{J} & 0 & \frac{1}{J}\sqrt{3(2J+3)(2J-1)} \\ \frac{1}{J+1}\sqrt{3(2J+3)(2J-1)} & 0 & \frac{2J+5}{J+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J}\sqrt{3(2J+3)(2J-1)} & 0 & -\frac{2J-3}{J} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

$$L''^{l\frac{3}{2}}=\frac{1}{4\sqrt{J(J+1)}}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 0 & (2J+1)\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{(2J+3)(2J-1)} \\ (2J+1)\sqrt{3} & 0 & \sqrt{(2J+3)(2J-1)} & 0 \\ 0 & \sqrt{(2J+3)(2J-1)} & 0 & (2J+1)\sqrt{3} \\ -\sqrt{(2J+3)(2J-1)} & 0 & (2J+1)\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

和

$$L'''^{J\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{J(J+1)}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{(2J+3)(2J-1)} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{(2J+3)(2J-1)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{(2J+3)(2J-1)} & 0 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{(2J+3)(2J-1)} & 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

以 $\delta^J_{+\frac{3}{2}}$, $\delta^J_{+\frac{1}{2}}$, $\delta^J_{-\frac{1}{2}}$, $\delta^J_{-\frac{3}{2}}$ 分别表示 $l = J + 3/2$, $J + 1/2$, $J - 1/2$, $J - 3/2$ 态的相移，ε_+, ε_- 表示 $l = J + 3/2$, $l = J - 1/2$ 态之間和 $l = J + 1/2$, $l = J - 3/2$ 态之間的混合参量，以代撇的量表示变换得的这些量，經过簡单的計算后，得对应于变换(34)的为

$$\begin{aligned} &\delta'^J_{+\frac{3}{2}} = \delta^J_{-\frac{1}{2}}, \quad \delta'^J_{-\frac{1}{2}} = \delta^J_{+\frac{3}{2}}, \\ &\delta'^J_{+\frac{1}{2}} = \delta^J_{-\frac{3}{2}}, \quad \delta'^J_{-\frac{3}{2}} = \delta^J_{+\frac{1}{2}}, \\ &\varepsilon'_+ = \mathrm{tg}^{-1} \frac{2J+5}{\sqrt{3(2J+3)(2J-1)}} - \varepsilon_+, \\ &\varepsilon'_- = -\mathrm{tg}^{-1} \frac{2J-3}{\sqrt{3(2J+3)(2J-1)}} - \varepsilon_-. \end{aligned} \tag{37}$$

对应于变换(35)的为

$$\begin{aligned} &\delta''^J_{+\frac{3}{2}} = \delta^J_{+\frac{1}{2}}, \quad \delta''^J_{-\frac{1}{2}} = \delta^J_{-\frac{3}{2}}, \\ &\delta''^J_{+\frac{1}{2}} = \delta^J_{+\frac{3}{2}}, \quad \delta''^J_{-\frac{3}{2}} = \delta^J_{-\frac{1}{2}}, \\ &\varepsilon''_+ = -\mathrm{tg}^{-1} \frac{1}{2J+1} \sqrt{\frac{(2J+3)(2J-1)}{3}} - \varepsilon_-, \\ &\varepsilon''_- = \mathrm{tg}^{-1} \frac{1}{2J+1} \sqrt{\frac{(2J+3)(2J-1)}{3}} - \varepsilon_+. \end{aligned} \tag{38}$$

而对应于(36)的为

$$\begin{aligned} &\delta'''^J_{+\frac{3}{2}} = \delta^J_{-\frac{3}{2}}, \quad \delta'''^J_{-\frac{1}{2}} = \delta^J_{+\frac{1}{2}}, \\ &\delta'''^J_{+\frac{1}{2}} = \delta^J_{-\frac{1}{2}}, \quad \delta'''^J_{-\frac{3}{2}} = \delta^J_{+\frac{3}{2}}, \\ &\varepsilon'''_+ = \mathrm{tg}^{-1} \sqrt{\frac{3}{(2J+3)(2J-1)}} - \varepsilon_-, \\ &\varepsilon'''_- = \mathrm{tg}^{-1} \sqrt{\frac{3}{(2J+3)(2J-1)}} - \varepsilon_+. \end{aligned} \tag{39}$$

变换 (39) 的相移和混合参量与工作 [8] 中所得出的一致，即核子与氘核散射在道自旋为 3/2 时所找出的結果.

除了(39)外，此处求出的(37)，(38)式则是新找出的道自旋为 3/2 时的代表不定性的变换. 和以上所講的一样，我們的結果是对任意自旋粒子的散射在道自旋为 3/2 时的結論. 同时我們所找出的是全部代表运动学不定性的变换，再也沒有别的了.

变换(34)，(35)，(36)和恆等变换一起构成一个么正羣，因此四种如上的相移和混合参量构成一个置換羣．例如由 $\delta''^{J}_{+\frac{3}{2}}$ 等变成 $\delta'''^{J}_{+\frac{3}{2}}$ 等的变换，其形式相同于(37).

以核子与氘核散射在道自旋 3/2 的情况作为我們的特例．設 $\mathbf{s}^{(1)}$ 是氘核的自旋算符，$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ 为核子的自旋算符，則由 $\mathbf{s}=\mathbf{s}^{(1)}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ 代入(31)，(32)和(33)得

$$U'(\mathbf{p})=(\mathbf{s}^{(1)}\cdot\mathbf{p})^2+(\mathbf{s}^{(1)}\cdot\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\mathbf{p})-I,$$
$$U''(\mathbf{p})=(\mathbf{s}^{(1)}\cdot\mathbf{p})^2(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\mathbf{p})-(\mathbf{s}^{(1)}\cdot\mathbf{p})-(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\mathbf{p}),$$

和

$$U'''(\mathbf{p})=[2(\mathbf{s}^{(1)}\cdot\mathbf{p})^2-I](\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\mathbf{p}).$$

最后一式卽[8]中所得到的，相应于自旋繞动量方向轉 π．前两式相应于自旋的較复杂的运动[1)].

这里还应当注意一点，在工作[8]中对核子与氘核散射的相分析中的不定性問題所得的結果是，在那里所找出的变换下，道自旋为 1/2 和为 3/2 的相移应当同时变换．但我們这里，从一般地分析道自旋不变的过程时，不同的道的相移的变换却是不必相关的.

最后作者感謝时学丹同志在物理問題上的討論和陈天权同志在数学問題上的討論．尤其对胡宁教授詳細地閱讀本文的手稿和給予宝貴支持，表示深刻謝意.

附　　录

設自旋为 s，定义自旋张量算符 $\Omega^s_{k\varkappa}$，其中 $k=0,1,\cdots,2s$，$\varkappa=-k,\cdots,k$，$\Omega^s_{k\varkappa}$ 为轉动羣的 k 阶不可約张量表示，$\Omega^s_{k\varkappa}$ 满足如下的正交归一化条件：

$$\mathrm{Tr}\,\Omega^s_{k\varkappa}\Omega^{s+}_{k'\varkappa'}=(2s+1)\delta_{kk'}\delta_{\varkappa\varkappa'},\tag{A.1}$$

且

$$\Omega^{s+}_{k\varkappa}=(-1)^{\varkappa}\Omega^s_{k-\varkappa}.\tag{A.2}$$

由以上的性質，利用維格勒-爱卡特定理，得出 $\Omega^s_{k\varkappa}$ 的矩陣元的下列表式[11]：

$$\langle s\mu'|\Omega^s_{k\varkappa}|s\mu\rangle=(s\mu'|k\varkappa s\mu)\langle s\|\Omega^s_k\|s\rangle,\tag{A.3}$$

式中 $\langle s\|\Omega^s_k\|s\rangle$ 为約化矩陣元，它与磁量子数无关．由条件(A.1)，以表式(A.3)代入，利用克莱布希-哥东系数的对称性質，可以求出約化矩陣元之值为

$$\langle s\|\Omega^s_k\|s\rangle=\sqrt{2s+1},\tag{A.4}$$

其中原有一个 $\pm$ 号的不定性，我們可以取为 $+$ 号.

两个自旋张量之积可以表为自旋张量的綫性組合：

$$\Omega^s_{k\varkappa}\Omega^s_{k'\varkappa'}=\sum_{k''\varkappa''}\sqrt{(2s+1)(2k+1)(2k'+1)}W(sksk';sk'')\times$$
$$\times(k''\varkappa''|k\varkappa k'\varkappa')\Omega^s_{k''\varkappa''}.\tag{A.5}$$

此式之証明是先将两端取矩陣元，利用(A.3)，(A.4)，再根据拉卡系数与克莱布希-哥东

1) 由于李华鍾副教授的提醒，最近作者看到 N. P. Klepikov and Ya. A. Smorodinsky 的論文 "INVERSION OF HELICITY IN NUCLEAR REACTIONS" 的預印本 (JINR-D-1016 (1962)) 中簡单地将自旋 1/2 的情况的相移不定性所反映的結果——自旋轉 π，扩充到高自旋的情况，因此没有論及高自旋情况时相移不定性所反映的自旋的别种复杂运动．作者感謝李华鍾副教授指出这点.

系数間的关系即得.

定义如下的标量:

$$F^{sk}(\mathbf{q}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \sum_{x} \Omega^{s}_{kx} Y_{k-x}(\mathbf{q})(-1)^{x}, \tag{A.6}$$

以此作用于 $Y^{JM}_{ls}(\mathbf{q})$ 上,利用球諧函数的迭合法則[10]和 (A.3), (A.4)

$$\Omega^{s}_{kx} x_{s\mu} = \sqrt{2k+1} \sum_{\mu'} (s\mu' | kxs\mu) x_{s\mu'},$$

再利用克莱布希-哥东系数和拉卡系数的性質,得

$$F^{sk}(\mathbf{q}) Y^{JM}_{ls}(\mathbf{q}) = \sum_{l'} \mathscr{F}^{lsk}_{l'l} Y^{JM}_{l's}(\mathbf{q}), \tag{A.7}$$

式中

$$\mathscr{F}^{lsk}_{l'l} = (-1)^{k} \sqrt{(2k+1)(2l+1)(2s+1)} W(l'kJs; ls)(l'0 | k0l0). \tag{A.8}$$

为更明显地看出它的对称性,将上式中的拉卡系数和克莱布希-哥东系数换成維格勒的 $6j$ 記号和 $3j$ 記号[12],得

$$\mathscr{F}^{lsk}_{l'l} = (-1)^{l+s} \sqrt{(2s+1)(2k+1)(2l+1)(2l'+1)} \times \\ \times \begin{pmatrix} k & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l' & k & l \\ s & J & s \end{Bmatrix}. \tag{A.9}$$

任意两个 $F^{sk}(\mathbf{p})$ 和 $F^{sk'}(\mathbf{p})$ 的乘积可表为 $F^{sk''}(\mathbf{p})$ 的綫性組合如下:

$$F^{sk}(\mathbf{p}) F^{sk'}(\mathbf{p}) = \sum_{k''} b^{sk''}_{kk'} F^{sk''}(\mathbf{p}), \tag{A.10}$$

式中 $b^{sk''}_{kk'}$ 为实数,其值为

$$b^{sk''}_{kk'} = \sqrt{(2s+1)(2k+1)(2k'+1)} W(sksk'; sk'')(k''0 | k0k'0). \tag{A.11}$$

上式之証明由 (A.5) 和球諧函数的迭合法則即得. 以 $3j$ 記号和 $6j$ 記号改写上式得

$$b^{sk''}_{kk'} = (-1)^{2s} \sqrt{(2s+1)(2k+1)(2k'+1)(2k''+1)} \times \\ \times \begin{pmatrix} k & k' & k'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} s & k & s \\ k' & s & k'' \end{Bmatrix}. \tag{A.12}$$

由此看出 $b^{sk''}_{kk'}$ 相对于 k, k', k'' 任意置换是对称的,所以 $F^{sk}(\mathbf{p})$ 与 $F^{sk'}(\mathbf{p})$ 对易:

$$[F^{sk}(\mathbf{p}), F^{sk'}(\mathbf{p})] = 0. \tag{A.13}$$

利用 $3j$ 記号和 $6j$ 記号表,一般得出

$$b^{s0}_{kk'} = \delta_{kk'}. \tag{A.14}$$

由 (A.9) 得

$$\mathscr{F}^{ls0}_{l'l} = \delta_{l'l}. \tag{A.15}$$

这是 $F^{s0}(\mathbf{p}) = I$ 的当然結果.

参 考 文 献

[1] Stapp, Ypsilantis and Metropolis, *Phys. Rev.*, **105** (1957), 302. Cziffra, MacGregor, Moravcsik and Stapp, *Phys. Rev.*, **114**, (1959), 880.

[2] Minami, S., *Progr. Theor. Phys.*, **11** (1954), 213.

[3] Hayakawa, S., Kawaguchi M., and Minami, S., *Progr. Theor. Phys.*, **12** (1954), 355.

[4] Пусиков, Л., Рындин, Р., Смородинский, Я., *ЖЭТФ.*, **32** (1957), 592.

[5] Dyson, F. J., and Nambu, Y., (私人通信 1954), 参看 Bethe and de Hoffmann, Mesons and Fields, 32g (1955).
Fukuda, N., Gotō, S., Okubo, S. and Sawada, K., *Progr. Theor. Phys.*, **12** (1954), 79.
[6] Заставенко, Л. Г., Рындин, Р. М. 周光呂, *ЖЭТФ.*, **34** (1958), 526.
[7] 例如参看 R. E. Marshak, Phenomenological Aspects of Two-Nucleon Interaction, in Nuclear Forces and Few Nucleon Problem (1960).
[8] 时学丹, 物理学报, **18** (1962), 184; **18** (1962) 421.
[9] 甘特馬赫尔, 矩陣論 (1953).
[10] Rose, M. E., Elementary Theory of Angular Momentum (1957).
[11] Wigner, E. P., Group Theory (1959). Eckart, C., *Revs. Mod. Phys.*, **2** (1930), 305.
[12] Edmonds, A. R., Angular Momentum in Quantum Mechanics (1957).
[13] Von Neuman, Methematical Foundations of Quantum Mechanics (1955).
[14] Fano, U., *Phys. Rev.*, **90** (1953), 577.

ON THE PROBLEM OF AMBIGUITY IN THE PHASE SHIFT ANALYSIS OF SCATTERING PROCESSES

HUANG NIEN-NING

ABSTRACT

Starting from the conditions which should be satisfied by the existence of different choice in the phase shift analysis, in this paper the general ambiguity in the analysis of elastic scattering of particles with arbitrary spins has been discussed. The transformation matrices among the different sets of phase shift are given, the real parameters involved are determined by the system of second order algebraic equations. The problem of ambiguity in the phase shift analysis therefore is reduced to the problem of finding the real roots of those equations. The number of different sets of real roots is twice that of different phase shift choice. Therefore, the kinematical ambiguity in the phase shift analysis in general is solved. When the channel spin is 1/2, it has been shown that only two sets of phase shift exist; when the channel spin is 1, only two sets of phase shift are given also, therefore it has been shown that the Minami's ambiguity is the whole ambiguity in these cases. When the channel spin is 3/2, it has been found that there are four different sets of phase shift. Therefore, in addition to the known transformation there are two new transformation matrices in that case. In general, the ambiguity in the phase shift analysis corresponds to the motion of spin which conserves the components of spin-tensors in the direction of momentum, and the parameters which characterize those general spin motion take the fixed values. In our discussion it has been shown that the systems of algebraic equations which are satisfied by the real parameters in the transformation matrices in the whole integral spin cases are quite different from that in the half integral spin cases. Therefore, the numbers of real roots in those two cases are also different, this means that the numbers of different phase shift sets are quite different. From the properties of those algebraic equation it has been suggested that the ambiguity in the case of integer spin is much smaller than that in the case of half integer spin.