第20卷 第11期
1964年11月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 20, No. 11
November, 1964

具有交叉对称的李模型下的非弹性振幅*

張 宗 燧
(中 国 科 学 院)

提 要

在具有交叉对称的李模型中，写出了非弹性振幅的积分方程組，它們是 Omne 氏型的. 在已知弹性振幅时，这积分方程組是可解的. 在适当地写出这方程組时，可証明非齐次項是小的(在某些区域内)，因而使解也有取小值的可能.

一、引 言

在应用弹性散射的色散关系至具体問題时，通常将非弹性振幅对于吸收部分的貢献加以忽略，这一点当然应該加以証实. 在以往的工作中，非弹性散射振幅的較严格計算只見于 Amado 对于李模型的討論[1]. 他在求 $V\theta$ 散射时也同时求出了 $V\theta—N\theta'\theta''$ 的振幅，但他所討論的模型是最早的李模型，不具有交叉对称性，因此理論不能反映寻常粒子的散射特性. 此外，他的討論也仅在初 θ 的能量 ω 足够小不能产生新粒子时有效(具体講来，在 V, N 粒子質量相等时，要求 $\omega < 2\mu$, μ 为 θ 質量)，而我們也关心 $\omega > 2\mu$ 的情形.

在交叉对称存在时，討論非弹性振幅及后者对弹性散射的影响，显然是有意义的. 但由于求解的困难，我們不能討論有意义的 N-π 碰撞等，而只能从一个具有交叉对称的李模型出发，換句話說，某些重粒子 N, V 是无自旋而不动的，而 θ 粒子旣无自旋，又只具有 s 波[2]. 它們之間具有作用

$$V \rightleftarrows N + \theta^1, \quad N \rightleftarrows V + \theta^2 \tag{1}$$

(此处以 θ^1, θ^2 代替寻常的符号 θ, $\bar{\theta}$ 或 θ^+, θ^-). 我們所求的是 $\langle V\theta^2_{k'}\theta^1_{k''}, \mathrm{out}|N\theta^1_k, \mathrm{in}\rangle$ 等矩陣元，亦卽

$$\langle V\theta^2_{k'}, \mathrm{out}|j^2|N\theta^1_k, \mathrm{in}\rangle, \langle V\theta^1_{k''}, \mathrm{out}|j^1|N\theta^1_k, \mathrm{in}\rangle \tag{2}$$

等矩陣元，式中 j^i 为 θ^i 的流. 此后我們約定在 $\langle A|X|B\rangle$ 中，除非明确表明 in, out 外，A 总代表 out 态，B 总代表 in 态. 此外，$|\theta^1\rangle$, $|\theta^2\rangle$ 均代表分立态. 第二节列出所需的色散关系，在第三节中求解，在此討論中所遇到的弹性振幅，我們以忽略非弹性中間态的形式代入. 第五节討論非弹性振幅对于弹性色散关系的影响，說明它們大概是可以忽略的. 这一点是否由于模型的对称性所产生，尙不能肯定，但看来是很可能的.

---

* 1963年8月27日收到.

二、非弹性振幅的方程

本节列出所需的积分方程．选择适当的哈密顿算符，使 θ^1, θ^2 的产生算符 a_1^+, a_2^+ 及湮灭算符 a_1, a_2 滿足

$$\left.\begin{aligned} d(a_{1k}^+(t)e^{-i\omega t})/dt &= -i[u(k)/(2\omega\Omega)^{1/2}]j_1e^{-i\omega t},\\ d(a_{1k}(t)e^{i\omega t})/dt &= i[u(k)/(2\omega\Omega)^{1/2}]j_2e^{i\omega t},\\ d(a_{2k}^+(t)e^{-i\omega t})/dt &= -i[u(k)/(2\omega\Omega)^{1/2}]j_2e^{-i\omega t},\\ d(a_{2k}(t)e^{i\omega t})/dt &= i[u(k)/(2\omega\Omega)^{1/2}]j_1e^{i\omega t},\\ \omega = (k^2+\mu^2)^{1/2}, &\quad j_1 = j_2^+, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式中 μ 为 θ 質量；$u(k)$ 为收斂因子；Ω 为全部空間体积；j_1, j_2 称为 θ^1, θ^2 的流．在(3)式的第三、第四式右方乘以相因子 $e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}$ 是允許的，它不带来实质上的影响．

将 $\langle V\theta_{k'}^2|j^2|N\theta_k^1\rangle$ 中的 $\theta_{k'}^2$ 取入算符部分，变为 j，可用标准办法获得以下的 Low 方程：

$$\begin{aligned} F^2(\omega', \omega) &\equiv \frac{(\omega\omega')^{1/2}}{uu'}\langle V\theta_{\omega'}^2|j^2|N\theta_\omega^1\rangle = \\ &= \frac{\omega^{1/2}i}{(2\Omega)^{1/2}u}\Big\{-\sum_S \frac{\langle V|j^1|S\rangle\langle S|j^2|N\theta_\omega^1\rangle}{i\omega' - iS + im_V - \epsilon} + \\ &\quad + \sum_S \frac{\langle V|j^2|S\rangle\langle S|j^1|N\theta_\omega^1\rangle}{i\omega' - im_N - i\omega + iS + \epsilon}\Big\}, \end{aligned} \tag{4}$$

式中 $u = u(\omega)$, $u' = u(\omega')$, m_V, m_N 为 V, N 的質量，$m \equiv m_V - m_N$，并假定 $|m| \ll \mu$．如果中間态的粒子数不超过二，則

$$\begin{aligned} F^2(\omega', \omega) &= \frac{\omega^{1/2}}{(2\Omega)^{1/2}u}\Big\{g\frac{\langle N|j^2|N\theta_\omega^1\rangle}{\omega' + m + \epsilon i} - \\ &\quad - \sum_{k_1}\frac{\langle V|j^1|V\theta_{\omega_1}^2, \text{out}\rangle\langle V\theta_{\omega_1}^2|j^2|N\theta_\omega^1\rangle}{\omega' - \omega_1 + i\epsilon} + \\ &\quad + \sum_{k_1}\frac{\langle V|j^2|V\theta_{\omega_1}^1, \text{out}\rangle\langle V\theta_{\omega_1}^1|j^1|N\theta_\omega^1\rangle}{\omega' - \omega + \omega_1 + m - i\epsilon}\Big\}, \end{aligned} \tag{5}$$

这里我們用了 $\langle V|j^1|N\rangle = \langle N|j^2|V\rangle = -g$ 的关系．由于

$$F^2(\omega - \omega' - m, \omega) = \frac{(\omega\omega')^{1/2}}{uu'}\langle V\theta_{\omega'}^1|j^1|N\theta_\omega^1\rangle + g\delta_{\mathbf{kk}'}\frac{\omega}{u^2},$$

(5)式給我們一个只含有 F^2 及弹性振幅的方程，但这个方程在求解时遇到一些不方便，不如同时列出

$$\begin{aligned} F^1(\omega', \omega) &\equiv \frac{(\omega\omega')^{1/2}}{uu'}\langle V\theta_{\omega'}^1|j^1|N\theta_\omega^1\rangle + g\delta_{\mathbf{kk}'}\frac{\omega}{u^2} = \\ &= \frac{\omega^{1/2}}{(2\Omega)^{1/2}u}\Big\{-g\frac{\langle N|j^2|N\theta_\omega^1\rangle}{\omega' - \omega - \epsilon i} + \\ &\quad + \sum_{k_1}\frac{\langle V|j^1|V\theta_{\omega_1}^2, \text{out}\rangle\langle V\theta_{\omega_1}^2|j^2|N\theta_\omega^1\rangle}{\omega' - \omega + \omega_1 + m - \epsilon i} - \\ &\quad - \sum_{k_1}\frac{\langle V|j^2|V\theta_{\omega_1}^1, \text{out}\rangle\langle V\theta_{\omega_1}^1|j^1|N\theta_\omega^1\rangle}{\omega' - \omega_1 + i\epsilon}\Big\}, \end{aligned} \tag{6}$$

而对 F^1, F^2 联立求解.

对于弹性振幅,引入符号

$$\left.\begin{aligned}\langle V|j^1|V\theta_\omega^2\rangle &= \frac{u(\omega)}{(2\omega\Omega)^{1/2}}M_V^1(\omega),\ \langle V|j^2|V\theta_\omega^1\rangle = \frac{u(\omega)}{(2\omega\Omega)^{1/2}}M_V^2(\omega),\\ \langle N|j^1|N\theta_\omega^2\rangle &= \frac{u(\omega)}{(2\omega\Omega)^{1/2}}M_N^1(\omega),\ \langle N|j^2|N\theta_\omega^1\rangle = \frac{u(\omega)}{(2\omega\Omega)^{1/2}}M_N^2(\omega),\\ M(\omega) &= \frac{4\pi}{|\omega^2-\mu^2|^{1/2}u^2(\omega)}e^{i\delta(\omega)}\sin\delta(\omega).\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

在弹性区域中,δ 为实数. 它們之間有以下关系:

$$\left.\begin{aligned}&\langle V|j^1|V\theta_\omega^2\rangle = \langle V\theta_\omega^2|j^2|V\rangle,\\ &M_V^1(\omega) = M_V^2(-\omega),\quad M_N^1(\omega) = M_N^2(-\omega).\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

M_V^1, M_N^1 的极点在 $\omega = -m$ 处, M_V^2, M_N^2 的极点在 $\omega = m$ 处. 在忽略非弹性中間态对弹性色散关系的影响后,我們还有

$$M_V^1(\omega) = M_N^1(\omega),\quad M_V^2(\omega) = M_N^2(\omega).\tag{9}$$

注意到

$$(\langle V|j^2|V\theta_\omega^1, \mathrm{out}\rangle)^* = \langle V\theta_\omega^1, \mathrm{out}|j^1|V\rangle = \langle V|j^2|V\theta_\omega^1, \mathrm{in}\rangle,\tag{10}$$

(5), (6) 二式可以化为积分方程

$$\begin{aligned}F^2(\omega',\omega) = {}&\frac{g}{2\Omega}\left(\frac{M_N^2(\omega)}{\omega'+m+\epsilon i} - \frac{M_V^2(\omega)^*}{\omega'+m-\epsilon i}\right) + \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty e^{-i\delta_V^1(\omega_1)}\sin\delta_V^1(\omega_1)\frac{1}{\omega_1-\omega'-i\epsilon}F^2(\omega_1,\omega)d\omega_1 + \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty e^{-i\delta_V^2(\omega_1)}\sin\delta_V^2(\omega_1)\frac{1}{\omega_1-\omega+\omega'+m-\epsilon i}F^1(\omega_1,\omega)d\omega_1,\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}F^1(\omega',\omega) = {}&\frac{g}{2\Omega}\left(\frac{M_N^2(\omega)}{\omega-\omega'+\epsilon i} - \frac{M_V^2(\omega')^*}{\omega-\omega'-\epsilon i}\right) + \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty e^{-i\delta_V^1(\omega_1)}\sin\delta_V^1(\omega_1)\frac{1}{\omega_1-\omega+\omega'+m-\epsilon i}F^2(\omega_1,\omega)d\omega_1 + \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty e^{-i\delta_V^2(\omega_1)}\sin\delta_V^2(\omega_1)\frac{1}{\omega_1-\omega'-\epsilon i}F^1(\omega_1,\omega)d\omega_1.\end{aligned}\tag{12}$$

在求 (11),(12) 式时,我們曾用了 (7) 式,并假定 δ 为实数[1]. (11)式右方第一、第二項的 ϵi 有时将被取去.

由方程可以看到以上所指出的

$$F^2(\omega',\omega) = F^1(\omega-\omega'-m,\omega),$$

从而研究只含有 F^1 或 F^2 的方程. 但这样的計算对以后的討論有不方便之处.

引入

$$H^1(\omega',\omega) = F^1(\omega',\omega)e^{-2i\delta_V^2(\omega')} + \frac{g}{2\Omega}M_V^2(\omega)^*2\pi i\delta(\omega-\omega'),\tag{13}$$

$$H^2(\omega',\omega) = F^2(\omega',\omega)e^{-2i\delta_V^1(\omega')},\tag{14}$$

---

1) 严格地講, δ 不一定为实数,上式中的 δ 应換为 δ^*.

则 H^1, H^2 满足

$$H^1(\omega', \omega) = \frac{l(\omega)}{\omega - \omega' + \epsilon i} + \frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty e^{i\delta_V^1(\omega_1)} \sin\delta_V^1(\omega_1) \frac{1}{\omega_1 - \omega + \omega' + m - i\epsilon} H^2(\omega_1, \omega) d\omega_1 + \\ + \frac{1}{\pi}\int e^{i\delta_V^2(\omega_1)} \sin\delta_V^2(\omega_1) \frac{1}{\omega_1 - \omega' + i\epsilon} H^1(\omega_1, \omega) d\omega_1, \tag{15}$$

$$H^2(\omega', \omega) = \frac{l(\omega)}{\omega' + m} + \frac{1}{\pi}\int e^{i\delta_V^1(\omega_1)} \sin\delta_V^1(\omega_1) \frac{1}{\omega_1 - \omega' + i\epsilon} H^2(\omega_1, \omega) d\omega_1 + \\ + \frac{1}{\pi}\int e^{i\delta_V^2(\omega_1)} \sin\delta_V^2(\omega_1) \frac{1}{\omega_1 - \omega + \omega' + m - \epsilon i} H^1(\omega_1, \omega) d\omega_1, \tag{16}$$

式中

$$l(\omega) = \frac{g}{2\Omega}\left\{M_N^2(\omega) - M_V^2(\omega) + 2i\left[\frac{1}{2i}\left(M_V^2(\omega) - M_V^2(\omega)^*\right) - \frac{ku^2}{4\pi} M_V^2(\omega) M_V^2(\omega)^*\right]\right\}^{1)}. \tag{17}$$

在 ω 不太大时，$M_N^2 - M_V^2$ 为一小量，同时上式方括号中的項为非弹性中間态对于 $M_V^2(\omega)$ 虚部的貢献，在 $\omega < 2\mu \pm m$ 时为零．由此可見，$l(\omega)$ 在 ω 不太大时为一小量．因此 H 解中的非齐次項也为一小量．由(13)，(14)，得

$$\left.\begin{aligned} F^1(\omega', \omega) &= e^{2i\delta_V^2(\omega')}\left[-\frac{g}{2\Omega} M_V^2(\omega)^* 2\pi i\delta(\omega - \omega') + H^1(\omega', \omega)\right], \\ F^2(\omega', \omega) &= e^{2i\delta_V^1(\omega')} H^2(\omega', \omega). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

我們現在来求(15)，(16)的解，亦即用 l 来表出 H_1, H_2．

这里有一点困难，即当 $\omega > 2\mu + m$ 时，$H^1(\omega', \omega)$ 开拓为 ω' 的复变数函数时，左右二割綫有一段重迭，这样我們必須由 ω 为实数而 $\omega < 2\mu + m$ 的情形出发求解，利用对 ω 的解析性对 ω 开拓，开拓至較大值的 ω．为叙述方便，我們令 ω_c', ω_c 为 ω', ω 变为复数时的符号，而让 ω', ω 始終保留为实变数．

首先由(15)式我們看出，开拓至复領域的 $H^1(\omega_c', \omega_c)$ 至少有二条割綫：

$$\operatorname{Im}\omega_c' = 0, \quad \operatorname{Re}\omega_c' > \mu;$$

$$\operatorname{Im}(\omega_c' - \omega_c) = 0, \quad \operatorname{Re}(\omega_c' - \omega_c) < -\mu.$$

而所求振幅乃是 $H^1(\omega_c', \omega_c)$ 在 $\operatorname{Im}\omega_c' < 0, \operatorname{Im}(\omega_c' - \omega_c) < 0$ 条件下让 ω_c', ω_c 趋向实軸时的极限．为討論 $H^1(\omega_c', \omega_c)$ 对 ω_c 的解析性，(15) 是不够的，我們应建立对 ω 的积分方程．在 $\langle V\theta_{\omega'}|j|N\theta_\omega\rangle$ 中将 θ_ω 吸入算符部分，化为 j，我們获得一个相应的 H 及其方程．它开拓至复領域时至少有二割綫：

$$\operatorname{Im}\omega_c = 0, \quad \operatorname{Re}\omega_c > \mu;$$

$$\operatorname{Im}(\omega_c - \omega_c') = 0, \quad \operatorname{Re}(\omega_c - \omega_c') < -\mu.$$

二个 H 的差别仅是它們定义中 M, δ 的指标 V, N 的差别．忽略这些差别(参閱(9)式)，(15)式中的 H^1, H^2 很可能在

$$\operatorname{Im}\omega_c' < 0, \quad \operatorname{Im}\omega_c > 0$$

处解析，而我們所求的乃是 $H^1(\omega' - i0, \omega + i0)$．

---

1) (17)式右方仅在弹性区域中正确．由于 δ 在非弹性区域中可以为复数，(17)式右方应作一相应的改变．

以上告訴了我們求解的方法. 如果在所要的 $H(\omega', \omega)$ 的 ω', ω 中, 有一个满足 $\omega < 2\mu + m$ 或 $\omega' < 2\mu - m$, 我們便建立对另一个变数的积分方程. 此时左右二割綫不重迭,沒有作最后一步解析开拓的必要. 当 $\omega < 2\mu + m$, $\omega' < 2\mu - m$ 均不满足时, 我們自 $\omega < 2\mu + m$ 的(15),(16)式开始,求解,对 ω 进行开拓,再求 $H(\omega'-i0, \omega+i0)$.

三、H 的 解

当 ω 为实数并小于 $2\mu + m$ 时, 可以应用 Omnes 的标准方法. 在这里有兴趣的是由于 H^1, H^2 的对称性,联立积分方程(15),(16)可以用上述方法来求解. 令

$$G(\omega_c', \omega) = \frac{1}{\pi}\int_\mu e^{i\delta^1(\omega_1)} \sin \delta^1(\omega_1) \frac{1}{\omega_1 - \omega_c'} H^2(\omega_1, \omega) + \\ + \frac{1}{\pi}\int_\mu e^{i\delta^2(\omega_1)} \sin \delta^2(\omega_1) \frac{1}{\omega_1 - \omega + \omega_c' + m} H^1(\omega_1, \omega) \quad (19)$$

(δ 的指标 V 不再写出). 我們得

$$\left.\begin{aligned} G(\omega' + i\epsilon, \omega) &= G(\omega' - i\epsilon, \omega)e^{2i\delta^1(\omega')} + \\ &\quad + 2ie^{i\delta^1(\omega')} \sin \delta^1(\omega')\frac{1}{\omega' + m} l(\omega) \qquad (\omega' > \mu), \\ G(\omega' + i\epsilon, \omega) &= G(\omega' - i\epsilon, \omega)e^{-2i\delta^2(\omega'')} - \\ &\quad - 2ie^{-i\delta^2(\omega'')} \sin \delta^2(\omega'')\frac{1}{\omega' + m + \epsilon i} l(\omega) \\ &\quad (\omega'' \equiv \omega - \omega' - m, \omega' < \omega - \mu - m). \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

(20)的第二式是由于 $G(\omega' + i\epsilon) - G(\omega' - i\epsilon)$ 在此时可以通过 $H^1(\omega'', \omega)$ 表出,从而可以通过 $G(\omega' + i\epsilon)$ 表出. 称以上二式右方末一項不存在时的解为 G_0,我們得

$$\log G_0(\omega_c', \omega) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_\mu^\infty \frac{\delta^1(x)}{x - \omega_c'} dx + \int_{-\infty}^{\omega-\mu-m} \frac{-\delta^2(\omega - x - m)}{x - \omega_c'} dx\right\}. \quad (21)$$

現在(在忽略非弹性中間态时),

$$\left.\begin{aligned} \{M_V^1(\omega_c)\}^{-1} &= g^{-2}(\omega_c + m)(1 - \beta^1(\omega_c)), \\ \{M_V^2(\omega_c)\}^{-1} &= - g^{-2}(\omega_c - m)(1 - \beta^2(\omega_c)), \\ \beta^1(\omega_c) &= \beta_{\mathrm{I}}(\omega_c) + \beta_{\mathrm{II}}(- \omega_c), \\ \beta^2(\omega_c) &= \beta_{\mathrm{II}}(\omega_c) + \beta_{\mathrm{I}}(- \omega_c), \\ \beta_{\mathrm{I}}(\omega_c) &= \frac{g^2}{4\pi^2}(\omega_c + m)\int_\mu^\infty \frac{k'u'^2}{(\omega' + m)^2(\omega' - \omega_c)} d\omega', \\ \beta_{\mathrm{II}}(\omega_c) &= - \frac{g^2}{4\pi^2}(\omega_c - m)\int_\mu^\infty \frac{k'u'^2}{(\omega' - m)^2(\omega' - \omega_c)} d\omega', \\ \delta^1(x) &= - \frac{1}{2i}\log\frac{1 - \beta^1(x)}{1 - \beta^1(x)^*}. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

将上述值代入(21)式,忽略 β^1, β^2 的左方割綫,应用留数定理,获得

$$G_0(\omega_c') = \frac{Z^2}{[1 - \beta^1(\omega_c')][1 - \beta^2(\omega - \omega_c' - m)]}, \quad (23)$$

式中 Z 为一常数. 必須指出, 这个計算不太正确, 因为它忽略了 β^1, β^2 的左方割綫. 在最后一节中, 我們指出, 如果 H^1, H^2 满足那里的方程, G_0 便可能严格地服从上式. 在

$\omega < 2\mu + m$ 时，我們只能停留于(21)式，那时解的非齐次部分[卽与 $l(\omega)$ 有关的部分]可以忽略，在 $\omega > 2\mu + m$ 时，(23)式中所忽略的因素(卽 β^1, β^2 的左方割綫上的积分)对于非齐次項的計算，仅貢献一个緩慢变化的因子，看来可以忽略.

G 的解的非齐次部分为 KG_0,

$$K = \frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty \frac{1}{G_0(\omega_1 - i\epsilon, \omega)} e^{-i\delta^1(\omega_1)} \sin\delta^1(\omega_1) \frac{l(\omega)}{\omega_1 + m} \frac{1}{\omega_1 - \omega_c'} d\omega_1 -$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\omega-\mu-m} \frac{1}{G_0(\omega_1 + i\epsilon, \omega)} e^{-i\delta^2(\omega-\omega_1-m)} \sin\delta^2(\omega - \omega_1 - m) \times$$
$$\times \frac{l(\omega)}{\omega_1 + m + \epsilon i} \frac{1}{\omega_1 - \omega_c'} d\omega_1 =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty \left\{\frac{1 - \beta^2(\omega - \omega_1 - m + i\epsilon)}{Z^2}\right\} \frac{1}{2i} [\beta^1(\omega_1) - \beta^1(\omega_1)^*] \times$$
$$\times \frac{l(\omega)}{\omega_1 + m} \frac{1}{\omega_1 - \omega_c'} d\omega_1 -$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty \left\{\frac{1 - \beta^1(\omega - \omega_1 - m + i\epsilon)}{Z^2}\right\} \frac{1}{2i} [\beta_2(\omega_1) - \beta_2(\omega_1)^*] \times$$
$$\times \frac{l(\omega)}{\omega - \omega_1 + \epsilon i} \frac{1}{\omega - \omega_1 - m - \omega_c'} d\omega_1. \tag{24}$$

我們所求(15),(16)的解为

$$\left.\begin{aligned} H^1(\omega', \omega) &= \frac{l(\omega)}{\omega - \omega' + \epsilon i} + G(\omega - \omega' - m + \epsilon i, \omega), \\ H^2(\omega', \omega) &= \frac{l(\omega)}{\omega' + m} + G(\omega' - i\epsilon, \omega), \\ G &= G_0 P(\omega, \omega') + KG_0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

式中 P 为 ω' 的一个多項式. 获得上式后，对 ω 进行开拓，例如

$$H^2(\omega_c', \omega_c) = \frac{l(\omega_c)}{\omega_c' + m} + G(\omega_c', \omega_c), \tag{26}$$

而最后求 $H^2(\omega' - i0, \omega + i0)$.

我們将忽略 P 項. 在 $\omega < 2\mu + m$ 时，$KG_0 \doteq 0$，在 $\omega > 2\mu + m$ 时，我們可以近似地計算 K, G_0 等. 結果为

$$\left.\begin{aligned} H^2 = {} & \frac{l(\omega)}{\omega' + m}\Big\{1 + \frac{1}{[1 - \beta^1(\omega')^*][1 - \beta^2(\omega - \omega' - m)]}\Big[\beta_{\rm I}^*(\omega') - \beta_{\rm II}(\omega) + \\ & + \beta_{\rm II}(\omega - \omega' - m) - \beta_{\rm I}(\omega')^*\beta_{\rm I}(\omega' - \omega + m)^* + \\ & + \beta_{\rm II}(-\omega')\beta_{\rm II}(\omega - \omega' - m) - \frac{1}{2}\beta_{\rm I}(\omega')^*\beta_{\rm II}(\omega - \omega' - m)\Big]\Big\}, \\ H^1 = {} & \frac{l(\omega)}{\omega - \omega' + \epsilon i}\Big\{1 + \frac{1}{[1-\beta^1(\omega-\omega'-m)][1-\beta^2(\omega')^*]}\Big[\beta_{\rm I}(\omega - \omega' - m) - \\ & - \beta_{\rm II}(\omega) + \beta_{\rm II}(\omega')^* - \beta_{\rm I}(\omega - \omega' - m)\beta_{\rm I}(-\omega') + \\ & + \beta_{\rm II}^*(\omega' - \omega - m)\beta_{\rm II}^*(\omega') - \frac{1}{2}\beta_{\rm I}(\omega - \omega' - m)\beta_{\rm II}^*(\omega')\Big]\Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

計算見附录.

四、$\langle 0|j_V|N\theta^1_\omega\rangle$ 的計算

在此我們作 $\langle 0|j_V|N\theta^1_\omega\rangle$ 的計算，j_V 为 V 粒子的流，定义为

$$j_V = \{-i(d/dt) + m_V\}\psi_V,$$

ψ_V 为 V 粒子的湮沒算符.

我們有

$$\frac{u}{(2\omega\Omega)^{1/2}}M^2_V(\omega)^* = \langle V|j^2|V\theta^1_\omega\rangle^* = \langle V\theta^1_\omega|j^1|V\rangle^* = \langle V|j^2|V\theta^1_\omega, \text{out}\rangle =$$

$$= \sum_{k'}\langle 0|j_V|N\theta^1_{k'}\rangle\langle N\theta^1_{k'}, \text{in}|j^2|V\theta^1_\omega, \text{out}\rangle\frac{1}{\omega'-m}.$$

令

$$K^2_N(\omega) = \frac{(2\omega\Omega)^{1/2}}{u(\omega)}\langle 0|j_V|N\theta^1_\omega\rangle, \tag{29}$$

得

$$M^2_V(\omega)^* = \sum_{k'}\frac{K^2_N(\omega')u(\omega')^2}{\omega'(\omega'-m)}\left\{F^1(\omega,\omega')^* - g\delta_{\mathbf{kk}'}\frac{\omega}{u^2}\right\}. \tag{30}$$

令

$$K^2_N(\omega) = -\frac{1}{g}M^2_N(\omega)(\omega-m)(1+K^{2\prime}_N(\omega)), \tag{31}$$

再以我們求得的

$$F^1(\omega',\omega) = e^{2i\delta^2_V(\omega')}\left(-\frac{g}{2\Omega}M^2_V(\omega)^*2\pi i\delta(\omega-\omega') + H^1(\omega',\omega)\right)$$

代入(30)，获得

$$-M^2_V(\omega)K^{2\prime}_N = [M^2_N(\omega) - M^2_V(\omega)] + 2i\left\{\frac{1}{2i}(M^2_V(\omega) - M^2_V(\omega)^*) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\pi}ku^2M^2_VM^2_V(\omega)^*\right\} - \sum_{k'}\frac{M^2_V(\omega')u^2}{\omega' g}e^{-2i\delta^2(\omega')}H^1(\omega,\omega')^* + 0(K^{2\prime}\cdot H)^{1)}. \tag{32}$$

右方前二項的和即是 $l(\omega)$（除开因子 $g/2\Omega$），在弹性区域为小量. 由此可見，$K^{2\prime}_N$ 在該区域中也为一小量. 如果我們忽略(32)式的末一項，卽可以求出該区域中的 $K^{2\prime}_N$，显然，$K^{2\prime}_N$ 是非弹性中間态对于 K 的影响.

必須強調指出，与以上相似的公式

$$M^1_V(\omega)^* = \frac{(2\omega\Omega)^{1/2}}{u(\omega)}\langle V|j^1|V\theta^2_\omega, \text{out}\rangle = \tag{33}$$

$$= \frac{(2\omega\Omega)^{1/2}}{u(\omega)}\sum_{k'}\langle 0|j_V|N\theta^1_{k'}\rangle\langle N\theta^1_{k'}, \text{in}|j^1|V\theta^2_\omega, \text{out}\rangle\frac{1}{\omega'-m} \tag{34}$$

是不正确的. 理由是(33)式右方最左的 V 可能在 j^1 頂点走出，而依照(34)式，j_V，j^1 并不会合在一点.

1) 在 ω 的非弹性区域中，(32)式右方应有一个小的改变.

五、非弹性中間态对弹性散射的影响

現在討論非弹性中間态对弹性散射的影响．振幅 M_V^2 滿足

$$M_V^2(\omega)=\frac{(2\omega\Omega)^{1/2}}{u}\langle V|j^2|V\theta_\omega^1\rangle=\frac{(2\omega\Omega)^{1/2}}{u}\langle V\theta_\omega^1|j^1|V\rangle=$$

$$=-\frac{g^2}{\omega-m}-\sum_{k'}\frac{|\langle V\theta_{\omega'}^1|j^1|V\rangle|^2}{\omega-\omega'+i\epsilon}+\sum_{k'}\frac{|\langle V\theta_{\omega'}^2|j^2|V\rangle|^2}{\omega+\omega'-i\epsilon}-$$

$$-\sum_{k_1k_2}\frac{|\langle N\theta_{\omega_1}^1\theta_{\omega_2}^1|j^1|V\rangle|^2}{\omega+m-\omega_1-\omega_2+i\epsilon}+\sum_{k_1k_2}\frac{|\langle N\theta_{\omega_1}^1\theta_{\omega_2}^2|j^2|V\rangle|^2}{\omega+\omega_1+\omega_2-m-i\epsilon}. \tag{35}$$

取 $\langle N\theta_{\omega_1}^1\theta_{\omega_2}^1|$ 为 in 态，不难証明

$$\frac{(\omega_1\omega_2)^{1/2}}{u_1u_2}\langle N\theta_{\omega_1}^1\theta_{\omega_2}^1,\text{in}|j^1|V\rangle=F^2(-\omega_2,\omega_1)^*=e^{-2i\delta^1(-\omega_2)}H^2(-\omega_2,\omega_1)^*. \tag{36}$$

如果在 H^2 的解中忽略齐次部分，那末上式的絕对値平方与 $|l(\omega_1)|^2$ 成正比，因此在 $\omega_1<2\mu\pm m$ 时，$\langle N\theta^1\theta^1|j^1|V\rangle$ 項对(35)式的貢献是小的．由于 $\langle N\theta^1\theta^1|j^1|V\rangle$ 对 ω_1, ω_2 的对称性，上述結論在 $\omega_2<2\mu\pm m$ 时也成立．此外

$$\frac{(\omega_1\omega_2)^{1/2}}{u_1u_2}\langle N\theta_{\omega_1}^1\theta_{\omega_2}^2,\text{in}|j^2|V\rangle=F^1(-\omega_2,\omega_1)^*=$$

$$=e^{-2i\delta^2(-\omega_2)}\left\{\frac{g}{2\Omega}M_V^2(\omega_1)2\pi i\delta(\omega_1+\omega_2)+H^1(-\omega_2,\omega_1)^*\right\}. \tag{37}$$

因此在忽略 H^1 解中的齐次部分时，$\langle N\theta^1\theta^2|j^2|V\rangle$ 項对(35)的貢献在 $\omega_1<2\mu+m$ 时是小的．同样，由 $F^1(\omega',\omega)$ 对 ω 的色散关系可知，$\langle N\theta_{\omega_1}^1\theta_{\omega_2}^2|j^2|V\rangle$ 項在 $\omega_2<2\mu-m$ 时是小的．以上說明(35)式中的非弹性項要在 $\omega\doteq 4\mu$ 时才重要．

六、一个更对称的方程

由 (5), (6), (11), (12) 式所討論的 F^2 实际上为下面图 1 至图 4 的过程所貢献，但由微扰論知，图 5, 6 的貢献也应該存在．它們在 (11), (12) 式中不出現的理由是因为在由

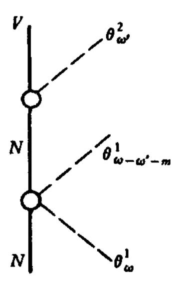

图 1

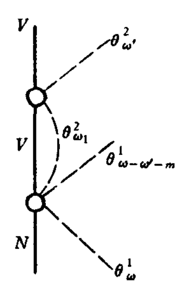

图 2

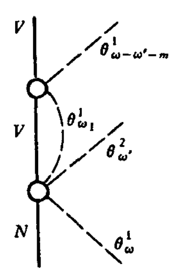

图 3

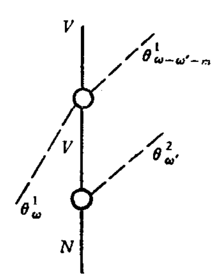

图 4

(4) 式导至 (5), (6) 式时我們忽略了三个粒子的中間态．現在引入这些中間态，而在 $\langle N\theta^1\theta^1|j^1|N\theta^1\rangle$, $\langle N\theta^1\theta^2|j^2|N\theta^1\rangle$ 等項中只保留相应于不相联的图，那时色散关系变为

$$F_2(\omega',\omega)=\frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty e^{-i\delta_V^1(\omega_1)}\sin\delta_V^1(\omega_1)\frac{1}{\omega_1-\omega'-i\epsilon}F_2(\omega_1,\omega)d\omega_1+$$

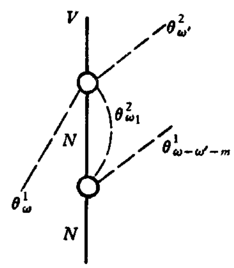

图 5

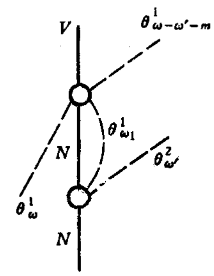

图 6

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\infty} e^{-i\delta_V^2(\omega_1)}\sin\delta_V^2(\omega_1)\frac{1}{\omega_1-\omega+\omega'+m-i\epsilon}F_1(\omega_1,\omega)d\omega_1+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\infty} e^{-i\delta_N^1(\omega_1)}\sin\delta_N^1(\omega_1)\frac{1}{\omega_1+\omega-\omega'-m-i\epsilon}F_1(-\omega_1,\omega)d\omega_1+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\infty} e^{-i\delta_N^2(\omega_1)}\sin\delta_N^2(\omega_1)\frac{1}{\omega_1+\omega'-i\epsilon}F_2(-\omega_1,\omega)d\omega_1+$$
$$+\frac{g}{2\Omega}\left[\frac{1}{\omega'+m}(M_N^2(\omega)-M_V^2(\omega)^*)\right], \tag{38}$$

$$F_1(\omega',\omega)=\cdots+\frac{g}{2\Omega}\left[\frac{1}{\omega-\omega'+\epsilon i}M_N^2(\omega)-\frac{1}{\omega-\omega'-\epsilon i}M_V^2(\omega)^*\right], \tag{39}$$

F_1, F_2 与 $\langle V\theta\theta|S|N\theta\rangle$ 的关系如前，注意能量分母不涉及 ω' 的項均未包含在上式中. 忽略 δ 指标 N, V 的差別,經过类似(13),(14)式的变換,可得

$$H_2(\omega',\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\infty} e^{i\delta_V^1(\omega_1)}\sin\delta_V^1(\omega_1)\frac{1}{\omega_1-\omega'+i\epsilon}H_2(\omega_1,\omega)d\omega_1+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\infty} e^{i\delta_V^2(\omega_1)}\sin\delta_V^2(\omega_1)\frac{1}{\omega_1-\omega+\omega'+m-i\epsilon}H_1(\omega_1,\omega)d\omega_1-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\mu} e^{i\delta_V^2(\omega_1)}\sin\delta_V^2(\omega_1)\frac{1}{\omega_1-\omega+\omega'+m+\epsilon i}H_1(\omega_1,\omega)d\omega_1-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\mu} e^{i\delta_V^1(\omega_1)}\sin\delta_V^1(\omega_1)\frac{1}{\omega_1-\omega'}H_2(\omega_1,\omega)d\omega_1+\cdots, \tag{40}$$

$H_1=\cdots$.

通过极端形式的方法,我們可获得(40)的齐次方程解

$$H_2(\omega',\omega)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\infty}\frac{\delta_V^1(\omega_1)}{\omega_1-\omega'+i\epsilon}d\omega_1+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\mu}\frac{\delta_V^1(\omega_1)}{\omega_1-\omega'+i\epsilon}d\omega_1-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_{\omega+\mu-m}^{\infty}\frac{\delta_V^2(\omega-\omega_1-m)}{\omega_1-\omega'+i\epsilon}d\omega_1-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\omega-\mu-m}\frac{\delta_V^2(\omega-\omega_1-m)}{\omega_1-\omega'+i\epsilon}d\omega_1\right\},$$

因而等于 (23) 式的右方. 这些形式方法为将 (40) 式右方四割綫視为不重迭, 以及将 $H_2(\omega',\omega)$ 視为 ω' 的解析函数 f 的极限 $f(\omega'-i\epsilon)$ 等等, 因而是不可靠的. 由于缺乏(40)式的可靠解法,我們不企图在此求出(40)式的解,但是看来(40)式似乎是更代表实际的方程.

作者在撰作中曾获得戴元本同志很多宝貴意見,謹此致謝.

附　　录

我們在此作(25)式在 $\omega > 2\mu + m$ 时的計算，先計算 $\omega'_c = \omega' - i\epsilon$ 时 (24) 式的右方.

当把(24)式右方花括号項换为 1 时，注意到 $\beta^1(\omega) - \beta^1(\omega)^*$ 在此可以换为 $\beta_{\rm I}(\omega) - \beta_{\rm I}(\omega)^*$ 等，我們可以应用留数定理得

$$\frac{1}{Z^2}\, l(\omega)\, \frac{1}{\omega' + m}\, \{\beta_{\rm I}(\omega')^* - \beta_{\rm II}(\omega) + \beta_{\rm II}(\omega - m - \omega')\}. \tag{A.1}$$

困难在于花括号中含有 β 的項.

以

$$\beta_{\rm II}(\omega - \omega_1 - m) + \beta_{\rm I}(\omega_1 + m - \omega)^*,$$
$$\beta_{\rm I}(\omega - \omega_1 - m) + \beta_{\rm II}(\omega_1 + m - \omega)^*$$

代替(24)右方的 $\beta^2(\omega - \omega_1 - m + i\epsilon)$, $\beta^1(\omega - \omega_1 - m + i\epsilon)$. 仅涉及 $\beta_{\rm I}$ 的項为

$$\beta_{\rm I}(\omega_1 + m - \omega)^*[\beta_{\rm I}(\omega_1) - \beta_{\rm I}(\omega_1)^*],$$

可化为

$$\beta_{\rm I}(\omega_1 + m - \omega)\beta_{\rm I}(\omega_1) - \beta_{\rm I}(\omega_1 + m - \omega)^*\beta_{\rm I}(\omega_1)^* \tag{A.2}$$

加上

$$-[\beta_{\rm I}(\omega_1 + m - \omega) - \beta_{\rm I}(\omega_1 + m - \omega)^*]\beta_{\rm I}(\omega_1). \tag{A.3}$$

后者仅涉及 $x > \omega + \mu - m$ 时的 $\beta_{\rm I}(x)$，在 ω 取大値时可以忽略. 前一項出現于积分中时可援用留数定理，得

$$-\frac{1}{Z^2}\, l(\omega)\beta_{\rm I}(\omega')^*\beta_{\rm I}(\omega' + m - \omega)^* \frac{1}{\omega' + m}. \tag{A.4}$$

同样，仅涉及 $\beta_{\rm II}$ 的項貢献

$$\frac{1}{Z^2}\, l(\omega)\beta_{\rm II}(\omega - m - \omega')\beta_{\rm II}(-\omega')\, \frac{1}{\omega' + m}. \tag{A.5}$$

旣涉及 $\beta_{\rm I}$ 又涉及 $\beta_{\rm II}$ 的項为

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{Z^2}\frac{l(\omega)}{2\pi i}\int_\mu^\infty \beta_{\rm II}(\omega - \omega_1 - m)[\beta_{\rm I}(\omega_1) - \beta_{\rm I}(\omega_1)^*]\, \frac{1}{\omega_1 + m}\, \frac{1}{\omega_1 - \omega' + \epsilon i}\, d\omega_1 + \\ &+ \frac{1}{Z^2}\frac{l(\omega)}{2\pi i}\int_\mu^\infty \beta_{\rm I}(\omega - \omega_1 - m)[\beta_{\rm II}(\omega_1) - \beta_{\rm II}(\omega_1)^*] \times \\ &\times \frac{1}{\omega - \omega_1 + \epsilon i}\, \frac{1}{\omega - \omega_1 - \omega' - m + \epsilon i}\, d\omega_1, \end{aligned} \tag{A.6}$$

可化为

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{Z^2}\frac{l(\omega)}{2\pi i}\int_\mu^\infty [\beta_{\rm I}(\omega_1)\beta_{\rm II}(\omega - \omega_1 - m)^* - \beta_{\rm I}(\omega_1)^*\beta_{\rm II}(\omega - \omega_1 - m)] \times \\ &\times \frac{1}{\omega_1 + m}\, \frac{1}{\omega_1 - \omega' + \epsilon i}\, d\omega_1 + \\ &+ \frac{1}{Z^2}\frac{l(\omega)}{2\pi i}\int_{\omega-\mu-m}^{-\infty} [\beta_{\rm I}(\omega)\beta_{\rm II}(\omega - \omega_1 - m)^* - \beta_{\rm I}(\omega_1)^*\beta_{\rm II}(\omega - \omega_1 - m)] \times \\ &\times \frac{1}{\omega_1 + m}\, \frac{1}{\omega_1 - \omega' + \epsilon i}\, d\omega_1 - \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{Z^2}\frac{l(\omega)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\omega-\mu-m}\beta_{\mathrm{I}}(\omega-\omega_1-m)[\beta_{\mathrm{II}}(\omega_1)-\beta_{\mathrm{II}}(\omega_1)^*]\times\\
&\times\frac{1}{\omega-\omega_1+\epsilon i}\,\frac{1}{\omega-\omega_1-\omega'-m+\epsilon i}\,d\omega_1+\\
&+\frac{1}{Z^2}\frac{l(\omega)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\omega-\mu-m}\beta_{\mathrm{II}}(\omega-\omega_1-m)[\beta_{\mathrm{I}}(\omega_1)-\beta_{\mathrm{I}}(\omega_1)^*]\times\\
&\times\frac{1}{\omega_1+m}\,\frac{1}{\omega_1-\omega'+\epsilon i}\,d\omega_1.
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

上式第一、第二项的和可用留数定理求出．第三、第四两项积分的下限可以改为 μ. 如果将上限近似为 ∞，即为 $(-1)\times(\mathrm{A.6})$，因此

$$
\text{式}(\mathrm{A.6}) = -\frac{l(\omega)}{2Z^2(m+\omega')}\beta_{\mathrm{I}}(\omega')^*\beta_{\mathrm{II}}(\omega-\omega'-m).
\tag{A.8}
$$

$(KG_0)(\omega'-i\epsilon,\omega)$ 为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{[1-\beta^1(\omega')^*][1-\beta^2(\omega-\omega'-m)]}\,\frac{l(\omega)}{(m+\omega')}\Big\{\beta_{\mathrm{I}}^*(\omega')-\beta_{\mathrm{II}}(\omega)+\\
&\quad+\beta_{\mathrm{II}}(\omega-\omega'-m)-\beta_{\mathrm{I}}^*(\omega')\beta_{\mathrm{I}}^*(\omega'-\omega+m)+\\
&\quad+\beta_{\mathrm{II}}(-\omega')\beta_{\mathrm{II}}(\omega-\omega'-m)-\frac{1}{2}\beta_{\mathrm{I}}^*(\omega')\beta_{\mathrm{II}}(\omega-\omega'-m)\Big\}.
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

这即相应于正文中的(27)式.

参 考 文 献

[1] Amado, R. D., *Phys. Rev.*, **122** (1961), 696.
[2] Vaughn, M. T., Aaron, R., Amado, R. D., *Phys. Rev.*, **124** (1961), 1258.

INELASTIC AMPLITUDES IN THE LEE MODEL POSSESSING CROSSING SYMMETRIES

T. S. Chang
(Academia Sinica)

Abstract

The first inelastic amplitudes in the Lee model possessing crossing symmetries are shown to satisfy a pair of simultaneous integral equations of Omne's type which may be solved in the usual way, on assuming known elastic amplitudes. The equations may be written in such a way that the inhomogeneous terms are small in the elastic region of one of the variables. From this, it is shown that it is possible that the inelastic contributions to the absorptive part of the elastic scattering are small in the first inelastic region.

A set of integral equations displaying fuller crossing symmetry among the θ particles involved is proposed.