第 20 卷 第 10 期　　物 理 学 报　　Vol. 20, No. 10
1964 年 10 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　October, 1964

关于混合气体輸运理論中的积分方程組的研究*

錢　　儉

一

稀薄混合气体的 Boltzmann 方程的一级近似解为[1]

$$f_i = f_i^{(0)}(1+\phi_i),$$

$$f_i^{(0)} = n_i\left(\frac{m_i}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-W_i^2},$$

$$\phi_i = -\mathbf{A}_i\cdot\frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} - \overleftrightarrow{B_i}:\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{V}_0 + n\sum_{j=1}^{\nu}\mathbf{C}_i^{(j)}\cdot\mathbf{d}_j,$$

$$(i = 1, 2, \cdots, \nu;\ \nu\ \text{种組元}). \tag{1}$$

$\mathbf{W}_i \equiv \left(\frac{m_i}{2kT}\right)^{1/2}\mathbf{V}_i$，确定 $\mathbf{A}_i$、$\mathbf{C}_i^{(h,k)} \equiv \mathbf{C}_i^{(h)} - \mathbf{C}_i^{(k)}$ 和 $\overleftrightarrow{B_i}$ 的方程是

$$\sum_{j=1}^{\nu}\iiint\{\mathbf{A}_i' + \mathbf{A}_j' - \mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j\}f_i^{(0)}f_j^{(0)}g_{ij}bdbd\varepsilon d\mathbf{V}_j = f_i^{(0)}\left(\frac{5}{2} - W_i^2\right)\mathbf{V}_i, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{\nu}\iiint\{\mathbf{C}_i^{(h,k)'} + \mathbf{C}_j^{(h,k)'} - \mathbf{C}_i^{(h,k)} - \mathbf{C}_j^{(h,k)}\}f_i^{(0)}f_j^{(0)}g_{ij}bdbd\varepsilon d\mathbf{V}_j = f_i^{(0)}\frac{\delta_{ih}-\delta_{ik}}{n_i}\mathbf{V}_i, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{\nu}\iiint\{\overleftrightarrow{B_i'} + \overleftrightarrow{B_j'} - \overleftrightarrow{B_i} - \overleftrightarrow{B_j}\}f_i^{(0)}f_j^{(0)}g_{ij}bdbd\varepsilon d\mathbf{V}_j = -2f_i^{(0)}\left[\mathbf{W}_i\mathbf{W}_i - \frac{W_i^2}{3}\overleftrightarrow{U}\right]. \tag{4}$$

附加条件是

$$\sum_{i=1}^{\nu}\sqrt{m_i}\int\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{W}_i f_i^{(0)}d\mathbf{V}_i = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu}\sqrt{m_i}\int\mathbf{C}_i^{(h,k)}\cdot\mathbf{W}_i f_i^{(0)}d\mathbf{V}_i = 0. \tag{6}$$

等式二边消去 $f_i^{(0)}$ 后，方程(2)、(3)和(4)可統一地写成[1]

$$\sum_{j=1}^{\nu}\iiint\{\tilde{T}_i' + \tilde{T}_j' - \tilde{T}_i - \tilde{T}_j\}f_j^{(0)}g_{ij}bdbd\varepsilon d\mathbf{V}_j = \tilde{R}_i, \tag{7}$$

其中 $\tilde{T}_i \equiv T_i\widetilde{W}_i$, $\tilde{R}_i \equiv R_i\widetilde{W}_i$. 对于方程 (2) 和 (3), $\widetilde{W}_i = \mathbf{W}_i$; 对于方程 (4), $\widetilde{W}_i = \mathbf{W}_i\mathbf{W}_i - \frac{W_i^2}{3}\overleftrightarrow{U}$. 从方程 (2) 到 (4), T_i 分别是 $A_i(W_i^2)$, $\{C_i^{(h)}(W_i^2) - C_i^{(k)}(W_i^2)\}$ 和 $B_i(W_i^2)$; R_i 分别是 $\left(\frac{2kT}{m_i}\right)^{1/2}\left(\frac{5}{2} - W_i^2\right)$, $\left(\frac{2kT}{m_i}\right)^{1/2}\frac{\delta_{ih}-\delta_{ik}}{n_i}$ 和 -2.

* 1963 年 11 月 18 日收到; 1964 年 3 月 18 日收到修改稿.

通常認为，对速度的积分区域是整个速度空間，瞄准距 b 的积分上限为 ∞. 这是一种数学技巧. 事实上，在质量是常数、速度远小于光速的非相对論情况下，应当認为所有 W_i 都小于某个常数 W_0；在气体足够稀薄和分子力是短程力的条件下，只考虑二体碰撞，b 的积分上限应当取小于分子間平均距离的某个值 b_0，在电离气体情况下，b 的积分上限是德拜屏蔽长度[2].

二

把分别定义在区間 $0 \leqslant W_i \leqslant W_0$ 上的 ν 个实連續函数 $T_i = T_i(W_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, \nu)$ 的有序組

$$|T\rangle \equiv \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_\nu \end{bmatrix}$$

的集合称为抽象空間 Ω. 从 Ω 空間中每个元素 $|T\rangle$，可构成 ν 个新的函数 T_i^*

$$T_i^* \widetilde{W}_i \equiv \widetilde{T}_i^* \equiv \sum_{j=1}^{\nu} \iiint \{\widetilde{T}_i + \widetilde{T}_j - \widetilde{T}'_i - \widetilde{T}'_j\} f_j^{(0)} g_{ij} b db d\varepsilon d\mathbf{V}_j$$
$$(i = 1, 2, \cdots, \nu). \tag{8}$$

在分子力是球对称的假設下，从对称性考虑[1,3]，可証 T_i^* 只依賴于 W_i. 按含参变量的定积分的性质，T_i^* 是 W_i 的連續函数，它們构成 Ω 空間中一个元素 $|T^*\rangle$. 因此 (8) 式定义了 Ω 空間中一个綫性映象算子 $\hat{I}$: $|T^*\rangle \equiv \hat{I}|T\rangle$. $\hat{I}$ 的結构依賴于 $\widetilde{W}_i$；为了区别 $\widetilde{W}_i = 1$、$\mathbf{W}_i$ 和 $\left\{\mathbf{W}_i\mathbf{W}_i - \frac{W_i^2}{3}\overleftrightarrow{U}\right\}$ 三种情况，相应地把 $\hat{I}$ 記为 $\hat{I}_0$、$\hat{I}_1$ 和 $\hat{I}_2$. 这样，方程 (7) 可簡写为

$$\hat{I}|T\rangle = -|R\rangle \equiv |R^-\rangle. \tag{9}$$

对于一定形式的 $\widetilde{W}_i$，定义 Ω 中任何二个元素 $|K\rangle$ 和 $|L\rangle$ 的內积是

$$\langle K|L\rangle \equiv \langle L|K\rangle \equiv 2\sum_{i=1}^{\nu}\int \{\widetilde{K}_i : \widetilde{L}_i\} f_i^{(0)} d\mathbf{V}_i = 2\sum_{i=1}^{\nu}\int K_i L_i \{\widetilde{W}_i\}^2 f_i^{(0)} d\mathbf{V}_i. \tag{10}$$

$\{\widetilde{W}_i\}^2 \equiv \widetilde{W}_i : \widetilde{W}_i$，用“:”表示张量內乘. 称 $\sqrt{\langle K|K\rangle}$ 为元素 $|K\rangle$ 的模. 用 $\langle K|\hat{I}|L\rangle$ 記元素 $|K\rangle$ 和 $\hat{I}|L\rangle$ 的內积，則有

$$\langle K|\hat{I}|L\rangle = 2\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\iiiint [\widetilde{K}_i : \{\widetilde{L}_i + \widetilde{L}_j - \widetilde{L}'_i - \widetilde{L}'_j\}] f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij} b db d\varepsilon d\mathbf{V}_i d\mathbf{V}_j$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\iiiint [\{\widetilde{K}_i + \widetilde{K}_j - \widetilde{K}'_i - \widetilde{K}'_j\} : \{\widetilde{L}_i + \widetilde{L}_j - \widetilde{L}'_i - \widetilde{L}'_j\}] \times$$
$$\times f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij} b db d\varepsilon d\mathbf{V}_i d\mathbf{V}_j, \tag{11}$$

故 $\langle K|\hat{I}|L\rangle = \langle L|\hat{I}|K\rangle$，即 $\hat{I}$ 是自共軛算子[4].

$\hat{I}$ 是有界算子，即对于任何模为 1 的元素 $|K\rangle$，$\langle K|\hat{I}|K\rangle$ 有界[4]. 証明如下. 从 (11) 式可得

$$\langle K|\hat{I}|K\rangle = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\iiiint[\{\widetilde{K}_i'+\widetilde{K}_j'\}:\{\widetilde{K}_i'+\widetilde{K}_j'-\widetilde{K}_i-\widetilde{K}_j\}]f_i^{(0)}f_j^{(0)}g_{ij}bdbd\varepsilon d\mathbf{V}_i d\mathbf{V}_j$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\iiiint[\{\widetilde{K}_i'+\widetilde{K}_j'\}^2+|\{\widetilde{K}_i'+\widetilde{K}_j'\}:\{\widetilde{K}_i+\widetilde{K}_j\}|]\times$$
$$\times f_i^{(0)}f_j^{(0)}g_{ij}bdbd\varepsilon d\mathbf{V}_i d\mathbf{V}_j,$$

因 $W_i\leqslant W_0$，故 $g_{ij}\equiv|\mathbf{V}_i-\mathbf{V}_j|\leqslant M$（$M$ 是某个常数），利用不等式 $|\{\widetilde{K}_i'+\widetilde{K}_j'\}:\{\widetilde{K}_i+\widetilde{K}_j\}|\leqslant\frac{1}{2}[\{\widetilde{K}_i'+\widetilde{K}_j'\}^2+\{\widetilde{K}_i+\widetilde{K}_j\}^2]$，进一步得

$$\langle K|\hat{I}|K\rangle\leqslant M\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\iiiint\left[\frac{3}{2}\{\widetilde{K}_i'+\widetilde{K}_j'\}^2+\frac{1}{2}\{\widetilde{K}_i+\widetilde{K}_j\}^2\right]f_i^{(0)}f_j^{(0)}bdbd\varepsilon d\mathbf{V}_i d\mathbf{V}_j$$
$$\leqslant 2M\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\iiiint\{\widetilde{K}_i+\widetilde{K}_j\}^2f_i^{(0)}f_j^{(0)}bdbd\varepsilon d\mathbf{V}_i d\mathbf{V}_j$$
$$\leqslant 4M\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\iiiint[\{\widetilde{K}_i\}^2+\{\widetilde{K}_j\}^2]f_i^{(0)}f_j^{(0)}bdbd\varepsilon d\mathbf{V}_i d\mathbf{V}_j$$
$$= 8M\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\iiiint\{\widetilde{K}_i\}^2f_i^{(0)}f_j^{(0)}bdbd\varepsilon d\mathbf{V}_i d\mathbf{V}_j.$$

利用条件 $\langle K|K\rangle=2\sum_{i=1}^{\nu}\int\{\widetilde{K}_i\}^2f_i^{(0)}d\mathbf{V}_i=1$ 以及等式 $\int f_j^{(0)}d\mathbf{V}_j=n_j$ 和 $\iint bdbd\varepsilon=\pi b_0^2$，最后得

$$\langle K|\hat{I}|K\rangle\leqslant 4\pi nMb_0^2, \tag{12}$$

$n\equiv\sum_{j=1}^{\nu}n_j$ 是单位体积内总分子数，$\hat{I}$ 的有界性得証.

通过一特例可說明 $\hat{I}$ 不是全連續算子. 文献 [3] 中,对于分子力是排斥力的单組元气体,証明方程(2)、(3)、(4)等式左边可化成

$$n^2I(\Phi)\equiv\iiint f^{(0)}f_1^{(0)}(\Phi+\Phi_1-\Phi_1'-\Phi')gbdbd\varepsilon d\mathbf{V}_1=$$
$$=K_0(\mathbf{V})\,\Phi(\mathbf{V})+\int K(\mathbf{V},\mathbf{V}_1)\Phi(\mathbf{V}_1)d\mathbf{V}_1, \tag{13}$$

$K(\mathbf{V},\mathbf{V}_1)$ 是 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{V}_1$ 的对称連續函数. (13)式和(8)式的差别(Φ 相当于张量 $\widetilde{T}_i$ 的某个分量、(13)式中沒有消去 $f^{(0)}$)不是本质的. 由(13)式定义的算子 $\hat{I}^*$ 可写成 $\hat{I}^*=\hat{I}_1^*+\hat{I}_2^*$. $\hat{I}_2^*$ 与 $\int K(\mathbf{V},\mathbf{V}_1)\Phi(\mathbf{V}_1)d\mathbf{V}_1$ 对应，是自共軛（加強）全連續算子[4]. $\hat{I}_1^*$ 与 $K_0(\mathbf{V})\Phi(\mathbf{V})$ 对应,是自共軛算子,但不是全連續算子(全連續自共軛算子至少有一个非零本征元素,但本征方程 $K_0(\mathbf{V})\Phi(\mathbf{V})=\lambda\Phi(\mathbf{V})$ 沒有非零解). 因全連續算子的綫性組合仍是全連續算子,故 $\hat{I}^*$ 不是全連續算子.

三

等式(11)表明：$\langle T|\hat{I}|T\rangle\geqslant 0$，齐次方程 $\hat{I}|T\rangle=0$ 等价于下列函数方程

$$\widetilde{T}_i'+\widetilde{T}_j'=\widetilde{T}_i+\widetilde{T}_j$$

或

$$T'_i\widetilde{W}'_i + T'_j\widetilde{W}'_j = T_i\widetilde{W}_i + T_j\widetilde{W}_j \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, \nu). \tag{14}$$

方程(14)的綫性独立的解是 Ω 空間中下列元素：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{(\text{共}\,\nu\,\text{个})} \begin{bmatrix} W_1^2 \\ W_2^2 \\ W_3^2 \\ \vdots \\ W_\nu^2 \end{bmatrix} \quad (\text{当 } \widetilde{W}_i = 1,\ \hat{I} = \hat{I}_0);$$

$$|m^{1/2}\rangle \equiv \begin{bmatrix} m_1^{1/2} \\ m_2^{1/2} \\ m_3^{1/2} \\ \vdots \\ m_\nu^{1/2} \end{bmatrix} \quad (\text{当 } \widetilde{W}_i = \mathbf{W}_i,\ \hat{I} = \hat{I}_1). \tag{15}$$

分別对应弹性碰撞过程中粒子数、动能和动量守恆[5].

把关于自共軛有界綫性算子的理論运用到(9)式，可說明方程(2)、(3)、(4)和附加条件(5)、(6)唯一地确定 Boltzmann 方程的一級近似解(1). 方程(4)所对应的齐次方程 $\hat{I}_2|T\rangle = 0$ 沒有非零解，故其解唯一. 与方程(2)或(3)对应的齐次方程 $\hat{I}_1|T\rangle = 0$ 存在非零解 $c|m^{1/2}\rangle$ (c 是任一常数)，故方程(2)和(3)有解的必要条件是它們的非齐次項

$$|R^-\rangle = -\begin{bmatrix} \left(\frac{2kT}{m_1}\right)^{1/2}\left(\frac{5}{2} - W_1^2\right) \\ \left(\frac{2kT}{m_2}\right)^{1/2}\left(\frac{5}{2} - W_2^2\right) \\ \vdots \\ \left(\frac{2kT}{m_\nu}\right)^{1/2}\left(\frac{5}{2} - W_\nu^2\right) \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad |R^-\rangle = -\begin{bmatrix} \left(\frac{2kT}{m_1}\right)^{1/2}\frac{\delta_{1h} - \delta_{1k}}{n_1} \\ \left(\frac{2kT}{m_2}\right)^{1/2}\frac{\delta_{2h} - \delta_{2k}}{n_2} \\ \vdots \\ \left(\frac{2kT}{m_\nu}\right)^{1/2}\frac{\delta_{\nu h} - \delta_{\nu k}}{n_\nu} \end{bmatrix}$$

与 $|m^{1/2}\rangle$ 正交，按(10)式計算后知确实有 $\langle m^{1/2}|R^-\rangle = 0$. 方程(2)和(3)的解不唯一，不同解相差 $c|m^{1/2}\rangle$，若要求它們的解与 $|m^{1/2}\rangle$ 正交(附加条件(5)、(6)正好表达这个要求)，則解唯一.

C. F. Curtiss 和 J. O. Hirschfelder[1,6] 用变分法把积分方程組(2)、(3)、(4)化为代数方程組，即文献[1]中的公式(7.3-70)，作为近似計算輸运系数的出发点. 利用前面引入的概念，很容易得到这組代数方程. 設 $\phi^{(m)}(W)$ $(m = 1, 2, \cdots)$ 是定义于 $0 \leqslant W \leqslant W_0$ 上的完备函数組. 选取 Ω 空間中基底为

$$|A_i^{(m)}\rangle \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_i^{(m)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, \nu \\ m = 1, 2, \cdots \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$|A_i^{(m)}\rangle$ 中除了第 i 个分量 $\phi_i^{(m)} \equiv \phi^{(m)}(W_i)$ 外，其他分量都为零．把 $|T\rangle$ 按基底 $|A_i^{(m)}\rangle$ 展开，

$$|T\rangle = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{m=1}^{\infty} t_i^{(m)} |A_i^{(m)}\rangle. \tag{17}$$

把 (17) 式代入 (9) 式，然后在等式二边內乘 $|A_{i'}^{(m')}\rangle$，記 $I_{ii'}^{mm'} \equiv I_{i'i}^{m'm} \equiv \langle A_{i'}^{(m')} | \hat{I} | A_i^{(m)}\rangle$，则 (9) 式变为

$$\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{m=1}^{\infty} I_{i'i}^{m'm} t_i^{(m)} = -\langle A_{i'}^{(m')} | R\rangle \equiv -R_{i'}^{(m')} \qquad \begin{pmatrix} i' = 1, 2, \cdots, \nu \\ m' = 1, 2, \cdots \end{pmatrix}. \tag{18}$$

若令 $\phi^{(m)}$ 为 Sonine 多項式，并取展开式 (17) 前面有限項，注意到 $\langle K|\hat{I}|L\rangle$ 等于文献 [1] 中的 $\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} n_i n_j [\widetilde{K}_i + \widetilde{K}_j;\ \widetilde{L}_i + \widetilde{L}_j]_{ij}$，就可看出方程 (18) 等价于文献 [1] 的公式 (7.3-70).

最后討論文献[1]和[6]中采用的变分法．由綫性算子 $\hat{I}$ 的自共軛性和正定性，易証下列引理：

[引理]　如 $\langle K|\hat{I}|K\rangle = \langle K|\hat{I}|L\rangle$，则 $\langle K|\hat{I}|K\rangle \leqslant \langle L|\hat{I}|L\rangle$.

若把 $\langle K|\hat{I}|L\rangle$ 称为元素 $|K\rangle$ 和 $|L\rangle$ 的准內积，把$\sqrt{\langle K|\hat{I}|K\rangle}$ 称为 $|K\rangle$ 的准模（"准"字反映 $\hat{I}$ 非严格正定），则引理的几何意义变得很明显.

Ω 空間中滿足等式

$$\langle f|\hat{I}|f\rangle = \langle f|R^-\rangle \tag{19}$$

的元素 $|f\rangle$ 的集合記为 F_{R^-}．对于 F_{R^-} 中每一元素 $|f\rangle$，有 $\langle f|\hat{I}|f\rangle = \langle f|\hat{I}|T\rangle$，$|T\rangle$ 是方程 (9) 的解，根据引理，得到文献[1]和[6]中的变分原理：

$$\langle f|\hat{I}|f\rangle \leqslant \langle T|\hat{I}|T\rangle. \tag{20}$$

它的几何意义是：方程 (9) 的解 $|T\rangle$ 是 F_{R^-} 中准模最大的元素.

下面証明它的逆定理：F_{R^-} 中准模最大的元素是方程 (9) 的解．記 $\Phi \equiv \langle f|\hat{I}|f\rangle$，则 F_{R^-} 中准模最大的元素就是在限制条件

$$\Psi \equiv \Phi - \langle f|R^-\rangle = 0 \tag{21}$$

下泛函 Φ 的条件极值点．把 $|f\rangle$ 按基底 $|A_i^{(m)}\rangle$ 展开，$|f\rangle = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{m=1}^{\infty} f_i^{(m)} |A_i^{(m)}\rangle$，可得

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i''=1}^{\nu} \sum_{m''=1}^{\infty} I_{ii''}^{mm''} f_i^{(m)} f_{i''}^{(m'')},$$

$$\langle f|R^-\rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{m=1}^{\infty} f_i^{(m)} R_i^{(m)}. \tag{22}$$

按拉格朗日乘子法，F_{R^-} 中准模最大的元素 $|T\rangle$ 的展开系数 $t_i^{(m)}$ 滿足等式

$$\left[\frac{\partial}{\partial f_{i'}^{(m')}} (\Phi + \lambda \Psi)\right]\Bigg|_{\text{令所有 } f_i^{(m)} = t_i^{(m)}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} m' = 1, 2, \cdots \\ i' = 1, 2, \cdots, \nu \end{pmatrix}, \tag{23}$$

λ 是拉氏乘子．把(22)式代入(23)式，得到

$$2(1+\lambda) \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{m=1}^{\infty} I_{i'i}^{m'm} t_i^{(m)} + \lambda R_{i'}^{(m')} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i' = 1, 2, \cdots, \nu \\ m' = 1, 2, \cdots \end{pmatrix}, \tag{24}$$

在(24)式等式二边乘 $t_{i'}^{(m')}$，而后对 i' 和 m' 求和，得到

$$2(1+\lambda)\langle T|\hat{I}|T\rangle-\lambda\langle T|R^{-}\rangle=0. \tag{25}$$

考虑到限制条件(21)，知 $\lambda=-2$，于是(24)式变成(18)式，逆定理得証.

与方程(9)的解可能不唯一相对应，F_{R^-} 中准模最大的元素可能不止一个. 近似求解(18)式时，系数行列式 $|I_{i'i}^{m'm}|$ 可能为零，考虑附加条件(5)和(6)式后可消除这种不唯一性[1]. 以上証明逆定理的过程本質上与文献[1]中用变分法推导公式(7.3—70)的过程相似，不过文献[1]中用了 ν 个拉氏乘子，而这里仅引入一个拉氏乘子. 作者認为只需要一个拉氏乘子，因为对于 F_{R^-} 中的元素只有一个限制条件(19)或(21)式.

本文的一些初步想法，是作者在北京大学作毕业論文时想到的，在此感謝指导論文工作的包科达老师.

参 考 文 献

[1] Hirschfelder, J. O., Curtiss, C. F., Bird, B. R., Molecular Theory of Gases and Liquids, Wiley, New York (1954).

[2] Grad, H., Proceedings of the Fifth International Conference on Ionization Phenomena in Gases, II (1961), 1630.

[3] Chapman, S. and Cowling, T. G., The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases (1952).

[4] B. И. 斯米尔諾夫，高等数学教程四卷一分册（陈传璋譯），人民教育出版社，第 113—134 頁.
B. И. 斯米尔諾夫，高等数学教程五卷二分册（宋 正譯），人民教育出版社，第 308—317 頁，第 387—397 頁.

[5] Grad, H., Rarefied Gas Dynamics (Proceedings of the First International Symposium Held at Nice), p. 100.

[6] Curtiss, C. F. and Hirschfelder, J. O., *J. Chem. Phys.*, **17** (1949), 550.