彈性基礎上的連續樑的矩陣理論*

胡　海　昌

（中國科學院數學研究所）

引　言

研究連續樑的彎曲問題時，通常或者採用解算聯立方程的方法（例如三彎矩方程），或者採用逐次接近的數值解法（例如彎矩分配法）． 前者雖然是一個準確的方法，但是實際上解算聯立方程頗多困難． 後者雖然計算簡易，但是只適用於個別的數字問題，不能獲得一般性的公式．

因此若能想出一種方法，既能避免解算聯立方程的麻煩，又能獲得準確的結果，那麼便最合理想． 有人主觀地以爲這樣的方法是找不到的**． 這種想法除了向困難低頭之外，對研究工作毫無裨益． 事實上先進的學者已經找到避免解算聯立方程的準確的方法． 例如，清華大學錢偉長教授利用差分方程和連分數的理論來解三彎矩方程， 避免了解算聯立方程的麻煩， 並獲得了滿意的結果[1]．

另一方面，陳百屏教授曾利用矩陣理論來研究鋼節桁架的平衡和振動問題[2]，獲得簡明的結果． 矩陣理論顯然還適用於其他許多問題．

本文主旨在利用矩陣和連分數的理論來討論彈性基礎上的連續樑（支座不能沉陷）的彎曲問題． 當基礎的彈性常數等於零時，上述問題便化爲普通的連續樑的問題． 我們避免了解算聯立方程的麻煩，但仍求得準確的公式．

一． 固定端彎矩與傳遞方陣

* 1953 年 3 月 14 日收到

** 譚維翰君在其“連續樑的一近似解法———切斷法”（中國科學（中文）2，(4)，525）一文中就有這種想法。

[1] 錢偉長，不均等的連續樑． 物理學報，9 (1953)，(3)，170—180． 1950 年錢偉長教授曾在“工程數學”一課中講解他的方法．

[2] 陳白屏，釘節構架的區格陣量分析． 中國科學（中文），2 (1951)，(2)，133—147．

在討論連續樑之前，本節先將一個單獨直樑的有關性質加以討論． 設樑的長度爲 l，抗彎剛度爲 $K = EI/l$，基礎的彈性常數爲 k，樑所負担的分佈載荷爲 $q(x)$． 樑的撓曲 y 應適合下面的方程：

$$\frac{d^4 y}{d x^4} + \frac{k}{EI} y = \frac{q}{EI}. \tag{1}$$

樑的支承狀况可有種種形式． 我們取兩端固定的場合作爲樑的標準狀態，如圖 1 所示． 這樣在 A，B 兩端所產生的彎矩稱爲固定端彎矩（仍以使樑向上凹者爲正，向下凹者爲負），分別以 M_{FAB}, M_{FBA} 表示之． 本文不擬介紹固定端彎矩的求法；普通直樑的固定端彎矩的求法可參攷[3]，有彈性基礎時的求法可參攷[4]．

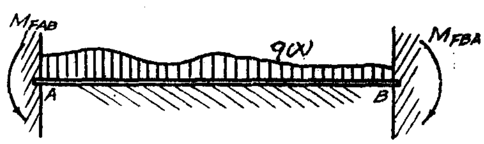

圖 1.

在討論連續樑的彎曲問題時，樑兩端的彎矩和轉動（以順時針向者爲正）是重要的數量． 因此現在進一步來討論在沒有分佈載荷作用時 M_A, θ_A; M_B, θ_B 四數量的關係，見圖 2．

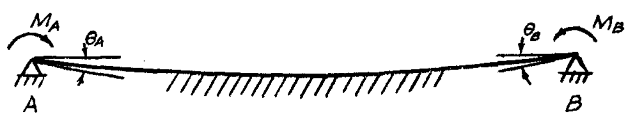

圖 2.

命

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}\, l, \tag{2}$$

並注意到這時 $q = 0$，則方程 (1) 變爲

$$l^4 \frac{d^4 y}{d x^4} + 4 \beta^4 y = 0. \tag{3}$$

用還原法可以證明這個方程的通解是

---

[3] 錢令希，超靜定結構學．

[4] Timoshenko, S., Strength of Materials, Part II.

$$y = A' \cosh \frac{\beta x}{l} \cos \frac{\beta x}{l} + B' \cosh \frac{\beta x}{l} \sin \frac{\beta x}{l} + C' \sinh \frac{\beta x}{l} \cos \frac{\beta x}{l} + \\ + D' \sinh \frac{\beta x}{l} \sin \frac{\beta x}{l}.$$

爲了便於適合邊界條件，這個通解可改寫爲

$$y = A \cosh \frac{\beta x}{l} \cos \frac{\beta x}{l} + B\left(\cosh \frac{\beta x}{l} \sin \frac{\beta x}{l} - \sinh \frac{\beta x}{l} \cos \frac{\beta x}{l}\right) + \\ + C \sinh \frac{\beta x}{l} \sin \frac{\beta x}{l} + D\left(\cosh \frac{\beta x}{l} \sin \frac{\beta x}{l} + \sinh \frac{\beta x}{l} \cos \frac{\beta x}{l}\right). \quad \text{(A)}$$

根據邊界條件

$$(y)_{x=0} = 0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \theta_A, \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=0} = -\frac{M_A}{EI}, (y)_{x=l} = 0, \quad \text{(B)}$$

即可求得四個常數的值如下：

$$A = 0, \ C = -\frac{l M_A}{2\beta^2 K}, D = \frac{l\theta_A}{2\beta}, \\ B = \frac{l M_A}{2\beta^2 K} \frac{\sinh\beta \sin\beta}{\cosh\beta\sin\beta - \sinh\beta\cos\beta} - \frac{l\theta_A}{2\beta} \frac{\cosh\beta\sin\beta + \sinh\beta\cos\beta}{\cosh\beta\sin\beta - \sinh\beta\cos\beta}. \quad \text{(C)}$$

所以得撓曲的算式如下：

$$y = \frac{l\theta_A}{2\beta}\left\{\sinh\frac{\beta x}{l}\cos\frac{\beta x}{l} + \cosh\frac{\beta x}{l}\sin\frac{\beta x}{l} - \right. \\ \left. - \frac{\cosh\beta\sin\beta + \sinh\beta\cos\beta}{\cosh\beta\sin\beta - \sinh\beta\cos\beta}\left(\cosh\frac{\beta x}{l}\sin\frac{\beta x}{l} - \sinh\frac{\beta x}{l}\cos\frac{\beta x}{l}\right)\right\} - \\ - \frac{l M_A}{2\beta^2 K}\left\{\sinh\frac{\beta x}{l}\sin\frac{\beta x}{l} - \right. \\ \left. - \frac{\sinh\beta\sin\beta}{\cosh\beta\sin\beta - \sinh\beta\cos\beta}\left(\cosh\frac{\beta x}{l}\sin\frac{\beta x}{l} - \sinh\frac{\beta x}{l}\cos\frac{\beta x}{l}\right)\right\} \quad (4)$$

有了撓曲的算式，便可計算 θ_B 和 M_B. 因爲

$$\frac{dy}{dx} = \theta_A\left\{\cosh\frac{\beta x}{l}\cos\frac{\beta x}{l} - \frac{\cosh\beta\sin\beta + \sinh\beta\cos\beta}{\cosh\beta\sin\beta - \sinh\beta\cos\beta}\sinh\frac{\beta x}{l}\sin\frac{\beta x}{l}\right\} -$$

$$-\frac{M_A}{2\beta K}\left\{\cosh\frac{\beta x}{l}\sin\frac{\beta x}{l}+\sinh\frac{\beta x}{l}\cos\frac{\beta x}{l}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\sinh\beta\sin\beta}{\cosh\beta\sin\beta-\sinh\beta\cos\beta}\sinh\frac{\beta x}{l}\sin\frac{\beta x}{l}\right\}, \tag{5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\beta\theta_A}{l}\left\{\cosh\frac{\beta x}{l}\sin\frac{\beta x}{l}-\sinh\frac{\beta x}{l}\cos\frac{\beta x}{l}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cosh\beta\sin\beta+\sinh\beta\cos\beta}{\cosh\beta\sin\beta-\sinh\beta\cos\beta}\left(\cosh\frac{\beta x}{l}\sin\frac{\beta x}{l}+\sinh\frac{\beta x}{l}\cos\frac{\beta x}{l}\right)\right\}-$$

$$-\frac{M_A}{lK}\left\{\cosh\frac{\beta x}{l}\cos\frac{\beta x}{l}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sinh\beta\sin\beta}{\cosh\beta\sin\beta-\sinh\beta\cos\beta}\left(\cosh\frac{\beta x}{l}\sin\frac{\beta x}{l}+\sinh\frac{\beta x}{l}\cos\frac{\beta x}{l}\right)\right\}, \tag{6}$$

所以 θ_B, M_B 與 θ_A, M_A 的關係如下:

$$\theta_B=-\theta_A\frac{\cosh\beta\sinh\beta-\cos\beta\sin\beta}{\cosh\beta\sin\beta-\sinh\beta\cos\beta}+\frac{M_A}{2\beta K}\frac{\sinh^2\beta-\sin^2\beta}{\cosh\beta\sin\beta-\sinh\beta\cos\beta},$$

$$M_B=2\beta K\theta_A\frac{\sinh^2\beta+\sin^2\beta}{\cosh\beta\sin\beta-\sinh\beta\cos\beta}-M_A\frac{\cosh\beta\sinh\beta-\cos\beta\sin\beta}{\cosh\beta\sin\beta-\sinh\beta\cos\beta}. \tag{7}$$

命

$$E=\frac{\cosh\beta\sinh\beta-\cos\beta\sin\beta}{\cosh\beta\sin\beta-\sinh\beta\cos\beta},$$

$$F=\frac{1}{2\beta K}\frac{\sinh^2\beta-\sin^2\beta}{\cosh\beta\sin\beta-\sinh\beta\cos\beta}, \tag{8}$$

$$G=2\beta K\frac{\sinh^2\beta+\sin^2\beta}{\cosh\beta\sin\beta-\sinh\beta\cos\beta},$$

(在無彈性基礎的場合: $E=2$, $F=1/2K$, $G=6K$) 則 (7) 式可簡寫如下:

$$\theta_B=-E\theta_A+FM_A;\ M_B=G\theta_A-EM_A. \tag{9}$$

利用矩陣, (9) 式更可合併寫成一個矩陣方程如下:

$$\begin{pmatrix}\theta_B\\M_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-E & F\\G & -E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_A\\M_A\end{pmatrix}. \tag{10}$$

已知 θ_A 和 M_A 後,卽可利用 (10) 式求 θ_B 和 M_B. 因此 (10) 式右端的方陣可稱爲自左至右的傳遞方陣.

採用和上面相同的方法，可得 θ_A 和 M_A 與 θ_B 和 M_B 的矩陣關係如下：

$$\begin{pmatrix}\theta_A\\ M_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-E & -F\\ -G & -E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_B\\ M_B\end{pmatrix}. \tag{11}$$

根據同上的理由，(11) 式右端的方陣可稱爲自右至左的傳遞方陣.

從 (10) (11) 兩式可知

$$\begin{pmatrix}-E & F\\ G & -E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-E & -F\\ -G & -E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-E & -F\\ -G & -E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-E & F\\ G & -E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{12}$$

這個關係當然亦可從 E, F, G 的算式得到證明.

(10) 式和 (11) 式是本節的主要公式.

二.　連續樑兩端轉動或彎矩的感應線

今設有一個 n 跨的連續樑（支座不能沉陷）如圖 3—a 所示. 每跨的長度、樑的抗彎剛度和基礎的彈性常數可以各不相同. 設其第 0 號支座是簡支的，其

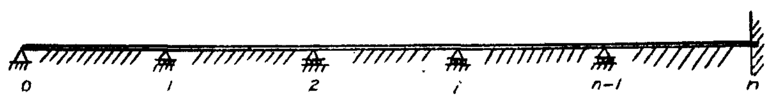

圖 3—a.

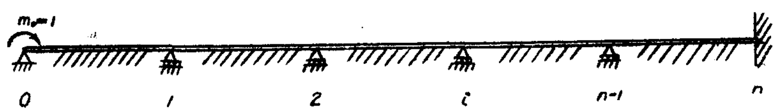

圖 3—b.

第 n 號支座是彈性固定的，亦就是說 M_n/θ_n 等於一個常數 μ_n.（若 $\mu_n=0$，則爲簡支的，若 $\mu_n=\infty$，則爲固定的）. 本節的問題是欲求 θ_0 的感應線. 根據超靜定結構感應線的理論，θ_0 的感應線乃相當於在第 0 號支座上有一單位力矩作用時樑的撓曲曲線，如圖 3—b 所示. 下節分析連續樑時，我們將發現所需要的僅僅是在各支座上感應線的切線與 x 軸的交角 ω_i $(i=0, 1, \cdots n)$. 所以本節的目的在求 ω_i.

在圖 3—b 的載荷場合，設第 i 號支座上的彎矩爲 m_i. 在第 0 號支座上已知 $m_0=1$ 而未知轉動 ω_0；在第 n 號支座上則未知 ω_n 和 m_n 而已知兩者的比

$m_n/\omega_n = \mu_n$. 命 E_i, F_i, G_i 爲第 i 跨（卽兩端是第 $i-1$ 和第 i 號支座）的傳遞方陣中的元素. 利用自右至左的傳遞方陣（卽公式（11）），可得

$$\begin{pmatrix}\omega_{i-1}\\ m_{i-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-E_i & -F_i\\ -G_i & -E_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_i\\ m_i\end{pmatrix},\ (i = 1, 2, \cdots n). \tag{13}$$

接連應用這個公式 n 次，並注意到 $m_0 = 1$，得

$$\begin{pmatrix}\omega_0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-E_1 & -F_1\\ -G_1 & -E_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-E_2 & -F_2\\ -G_2 & -E_2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}-E_n & -F_n\\ -G_n & -E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_n\\ m_n\end{pmatrix}. \tag{14}$$

這是一個矩陣方程，實際上相當於兩個普通方程，因此再加上 $m_n/\omega_n = \mu_n$，恰能求解 ω_0 和 ω_n, m_n. 求得了 ω_0，便不難應用自右至左的傳遞方陣、依次求第 1 號，第 2 號，最後求第 n 號支座上的 ω 和 m.

依照上面的方法求 ω_0，需要演算 n 個方陣的連乘積和解算一組二元聯立方程. 這些演算已比解算許多聯立方程方便得多了. 但是下面我們將應用連分數，使演算進一步簡化.

先將方程（13）展開成普通的方程如下：

$$\omega_{i-1} = -(E_i\omega_i + F_i m_i),\ m_{i-1} = -(G_i\omega_i + E_i m_i). \tag{15}$$

將此兩式相比，並命

$$\mu_i = \frac{m_i}{\omega_i},\quad \frac{F_i}{E_i} = f_i,\quad \frac{G_i}{E_i} = g_i, \tag{16}$$

則得相鄰兩個 μ 的關係如下：

$$\mu_{i-1} = \frac{E_i + F_i\mu_i}{G_i + E_i\mu_i} = f_i + \frac{1 - f_i g_i}{g_i + \mu_i}. \tag{17}$$

連續應用這個公式 n 次，最後得

$$\mu_0 = f_1 + \frac{1 - f_1 g_1}{g_1 + f_2} + \frac{1 - f_2 g_2}{g_2 + f_3} + \cdots \frac{1 - g_n f_n}{g_n + \mu_n}. \tag{18}$$

此式的右端全是已知數，所以 μ_0 卽可根據這個公式算出.

因爲 $m_0 = 1$，所以 $\omega_0 = 1/\mu_0$. 求得 ω_0 後，則便可應用和前相似的方法，

依次求各支座上的 ω 和 m．

假若第 0 號支座是固定的，則在分析連續樑時將需要 m_0 的感應線．m_0 的感應線乃相當於第 0 號支座有一單位轉動（即 $\theta_0=1$）時樑的撓曲曲線，所以 m_0 的感應線可由前述 θ_0 的感應線除以 ω_0 而得．

三．連續樑的分析

今設有一個 n 跨的連續樑（支座不能沉陷）負担分佈載荷如圖 4—a 所示．

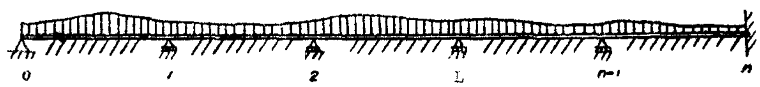

圖 4—a.

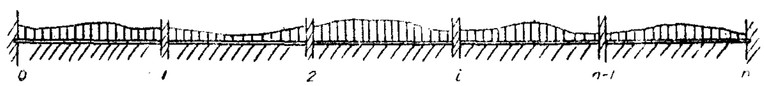

圖 4—b. 固定端彎矩 M_F．

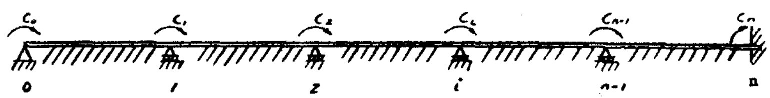

圖 4—c. 改正彎矩 M'．

本節的問題是欲求各支座上的彎矩．應用疊加原理，這些彎矩可由下列兩部份疊加而得，見圖 4—b，c．首先假定樑在各支座上不能轉動．這樣每一跨都變成兩端固定的直樑，外界載荷在各支座上產生固定端彎矩 M_{F01}, M_{F10}, M_{F12}, ……等，見圖 4—b．其次我們讓樑在各支座上可以自由轉動，這樣在各支座上產生了不平衡力矩

$$C_i = M_{Fi,i-1} - M_{Fi,i+1}\,,\quad (i=0,1,\cdots n)\,, \tag{19}$$

如圖 4—c 所示．設由這些不平衡力矩所產生的改正端彎矩爲 M'_{01}, M'_{10}, M'_{12}, ……．根據疊加原理，任一支座上的眞正彎矩 M_i 爲

$$M_i = M_{Fi,i-1} + M'_{i,i-1} = M_{Fi,i+1} + M'_{i,i+1}\,. \tag{20}$$

由這些不平衡力矩 C_i 所產生的樑在各支座上的轉動，顯然就是眞正的轉動．

現在我們來求 θ_i 和 M_i .

今試攷慮圖 4—c 中第 i 跨的平衡狀態,如圖 5 所示、 根據 (10) 式,第 i 跨兩端的轉動和彎矩有下面的矩陣關係:

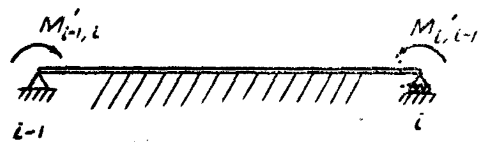

圖 5.

$$\begin{pmatrix} \theta_i \\ M'_{i,i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_i & F_i \\ G_i & -E_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{i-1} \\ M'_{i-1,i} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

因爲

$$M'_{i,i-1} = M_i - M_{Fi,i-1}, \quad M'_{i-1,i} = M_{i-1} - M_{Fi-1,i}, \tag{22}$$

將此代入 (21) 式,並命

$$a_i = -F_i M_{Fi-1,i}, \quad b_i = M_{Fi,i-1} - E_i M_{Fi-1,i}, \tag{23}$$

則得

$$\begin{pmatrix} \theta_i \\ M_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_i & F_i \\ G_i & -E_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{i-1} \\ M_{i-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}. \tag{24}$$

顯而易見, $M_0 = 0$. 同時利用上節求得的 θ_0 的感應係數 ω_i, 可得

$$\theta_0 = \sum_{i=0}^{n} \omega_i C_i = \sum_{i=0}^{n} \omega_i (M_{Fi,i-1} - M_{Fi,i+1}). \tag{25}$$

所以根據 (24) 式便可依次計算 $\theta_1, M_1; \theta_2, M_2; \cdots\cdots$. 這樣得

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_1 & F_1 \\ G_1 & -E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ M_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & F_2 \\ G_2 & -E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ M_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -E_2 & F_2 \\ G_2 & -E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E_1 & F_1 \\ G_1 & -E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ M_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -E_2 & F_2 \\ G_2 & -E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

依此類推，第 i 號支座上的 θ_i 和 M_i 是

$$\begin{pmatrix}\theta_i\\ M_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-E_i & F_i\\ G_i & -E_i\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}-E_1 & F_1\\ G_1 & -E_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_0\\ M_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-E_i & F_i\\ G_i & -E_i\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}-E_2 & F_2\\ G_2 & -E_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}+\cdots$$

$$\cdots+\begin{pmatrix}-E_i & F_i\\ G_i & -E_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{i-1}\\ b_{i-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix}. \qquad (26)$$

ON THE MATRIX THEORY OF CONTINUOUS BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION

HU HAI-CHANG

(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, we employ the theory of matrices and continued fractions for the solution of the bending problem of continuous beams on elastic foundation with unyielding supports. End moments are obtained in explicit expressions. Accurate numerical results may be calculated from these expressions directly without solving simultaneous equations.