第19卷 第8期 物理学报 Vol. 19, No. 8
1963年8月 ACTA PHYSICA SINICA August, 1963

科学技术简报和经验交流

边界形状的变化对偏微分方程本征值的影响

武 宇

我們考慮下列方程和边界条件:

$$\begin{cases}\text{在区域}V\text{中:} & (\nabla^2 + E)\phi = 0, & (1)\\ \text{在}V\text{的边界上:} & \phi = 0 & (2)\end{cases}$$

所定解的最低本征値 E,簡称为区域 V 的本征値.

例如 V 为半径为 R 的无穷长圓柱,則

$$E = \frac{\alpha^2}{R^2},\ \phi = J_0(\sqrt{E}\,r) = J_0\left(\frac{\alpha r}{R}\right). \tag{3}$$

此处 $\alpha = 2.405$ 为 Bessel 函数 J_0 的最小根. 設由于形状变化而使得 V 改为

$$r \leqslant R(\theta) \equiv R\left[1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n e^{in\theta}\right], \tag{4}$$

其中

$$\varepsilon_{-n} = \varepsilon_n^* \quad (n \neq 0), \quad \varepsilon_0 \equiv 0. \tag{5}$$

我們用(4)的本征値

$$E = \frac{\alpha^2}{R^2} f(\varepsilon_n) \tag{6}$$

与等面积圓柱的本征値

$$\frac{\alpha^2}{R^2}\left[1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n|^2\right]^{-1} \text{的比値}$$

$$F(\varepsilon_n) = \left[1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n|^2\right] f(\varepsilon_n) \tag{7}$$

来表示边界形状的变化对柱的本征値的影响.

我們用边界微扰法計算(6)及(7). 为計算方便起見,我們选长度单位使得 $R = \alpha$; 这样有

$$\phi(r, \theta) = J_0(r) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n e^{in\theta}\phi_n(r) + \frac{1}{2}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\sum \varepsilon_m\varepsilon_n e^{i(m+n)\theta}\phi_{m,n}(r) + \cdots, \tag{8}$$

$$E = 1 + 0 + \frac{1}{2}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\sum \varepsilon_m\varepsilon_n\delta_{m+n,0}E_{m,n} + \cdots. \tag{9}$$

将上述展开代入(1),得到(1)的各級微扰方程

$$(\nabla^2 + 1)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n e^{in\theta}\phi_n(r) = 0, \tag{10}$$

$$(\nabla^2+1)\frac{1}{2}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\sum \varepsilon_m\varepsilon_n e^{i(m+n)\theta}\phi_{m,n}(r)+\frac{1}{2}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\sum \varepsilon_m\varepsilon_n\delta_{m+n,0}E_{m,n}J_0(r)=0. \quad (11)$$

将(4)代入(8)，再代入(2)，得到各級微扰边界条件

$$\phi_n(\alpha)+\alpha J_0'(\alpha)=0, \quad (12)$$

$$\phi_{m,n}(\alpha)+\alpha\phi_m'(\alpha)+\alpha\phi_n'(\alpha)+\alpha^2J_0''(\alpha)=0,\cdots \quad (13)$$

其中‘撇’代表对 r 的微商.

一級微扰很容易解. 从(10)得到

$$\phi_n''(r)+\frac{1}{r}\phi_n'(r)+\left(1-\frac{n^2}{r^2}\right)\phi_n(r)=0,$$

这就是 J_n 的微分方程. 所以連同(12)，得

$$\phi_n(r)=\alpha J_1(\alpha)\frac{J_n(r)}{J_n(\alpha)}. \quad (14)$$

为求本征值的二級微扰，我們只要(11)，(13)中 $m+n=0$ 的那部分，即

$$\phi_{-n,n}''(r)+\frac{1}{r}\phi_{-n,n}'(r)+\phi_{-n,n}(r)+E_{-n,n}J_0(r)=0, \quad (11')$$

$$\phi_{-n,n}(\alpha)=-\alpha J_1(\alpha)\left[\frac{\alpha J_{-n}'(\alpha)}{J_{-n}(\alpha)}+\frac{\alpha J_n'(\alpha)}{J_n(\alpha)}+1\right]. \quad (13')$$

解(11′)得(含任意常数 C 部分为补足解)

$$\phi_{-n,n}(r)=-\frac{1}{2}E_{-n,n}rJ_1(r)+CJ_0(r). \quad (15)$$

将其边界值(补足解无貢献)与(13′)比較，得

$$E_{-n,n}=2\left[\frac{\alpha J_{-n}'(\alpha)}{J_{-n}(\alpha)}+\frac{\alpha J_n'(\alpha)}{J_n(\alpha)}+1\right]. \quad (16)$$

从(16)，(9)，(6)，(7)得到，到二級微扰为止，

$$F(\varepsilon_n)=1+2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varepsilon_n|^2C_n, \quad (17)$$

$$C_n\equiv 1+\frac{\alpha J_n'(\alpha)}{J_n(\alpha)}. \quad (18)$$

利用 Bessel 函数的递推关系，可把(18)写为

$$C_n=n+1-\frac{\alpha J_{n+1}(\alpha)}{J_n(\alpha)} \quad (18')$$

或

$$C_n=-n+1+\frac{\alpha J_{n-1}(\alpha)}{J_n(\alpha)}. \quad (18'')$$

所以有

$$C_1=0$$

及

$$C_{n+1}=-n+\frac{\alpha^2}{n+1-C_n}. \quad (19)$$

这式可用来从 C_1 递推 C_2，从 C_2 递推 C_3，但逐漸丧失有效数字以至于不能継續运用. 若把(19)逆轉来用則更方便些：

$$n+1-C_n=\frac{\alpha^2}{n+C_{n+1}}=\frac{\alpha^2}{2n+2-(n+2-C_{n+1})},\tag{19'}$$

即

$$C_n=n+1-\frac{\alpha^2}{2n+C_{n+1}}=n+1-\frac{\alpha^2}{2n+2-}\ \frac{\alpha^2}{2n+4-}\cdots\tag{19''}$$

在 n 大时連分式收斂很快．再向 n 減少递推时，有效数字逐次增加，所以数值計算方便．

附带注意柱(4)周长

$$s=\int_0^{2\pi}\left[1+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}rd\theta$$

与等面积圆柱的周长

$$2\pi R\left[1+\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varepsilon_n|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

的比值近似为

$$1+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2-1}{2}|\varepsilon_n|^2,$$

而这与(17)沒有簡单关系(除非只有一个 $|n|$ 的 $\varepsilon_n \neq 0$)．

又例如球，設由于边界形状的变化使得 V 为

$$r\leqslant R(\theta,\varphi)=R\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\varepsilon_n^m\sqrt{2n+1}\sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}\right].\tag{20}$$

其本征值与等体积球的本征值的比值，經过类似計算为

$$F(\varepsilon_n^m)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}|\varepsilon_n^m|^2S_n,\tag{21}$$

此处

$$S_n\equiv\frac{3}{2}+\frac{\pi J'_{n+\frac{1}{2}}(\pi)}{J_{n+\frac{1}{2}}(\pi)},\tag{22}$$

$$S_1=0,\ S_{n+1}=-n+\frac{\pi^2}{n+2-S_n},\tag{23}$$

$$S_n=n+2-\frac{\pi^2}{n+S_{n+1}}=n+2-\frac{\pi^2}{2n+3-}\ \frac{\pi^2}{2n+5-}\tag{23'}$$

与 m 无关．数值結果 C_n, S_n 列于下表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C_n	0	1.89	3.22	4.39	5.50	6.58	7.63	8.68	9.71
S_n	0	2.29	3.77	5.03	6.20	7.32	8.40	9.47	10.52

如从对称考虑所期望的，边界形状的变化使球或柱的最低本征值增加．