

# 一种用于准静态瑞利衰落信道的空时码设计\*

张坚强,李道本

(北京邮电大学 信息工程学院,北京 100876)

**摘要:**对准静态瑞利衰落信道的空时码设计准则进行了研究。考察了不同差错路径长度的首事件差错概率,这些概率由不同差错路径长度的码字对之间构成的矩阵的最小行列式决定,综合考虑这些最小行列式,提出一种新准则,使这些最小行列式的和最大化。另外,证明了空时码的几何一致性并使用该特性大大地减少了空时码搜索的复杂度。依据该准则搜索得到一些新码,并与现有好码进行性能对比。状态数目更多且/或使用更多发射天线的空时码也可以依据该准则进行搜索。

**关键词:**空时码;首事件差错概率;准静态瑞利衰落信道

**中图分类号:**TN911.22 **文献标识码:**A **文章编号:**1004-5694(2003)03-0084-04

## A Design of Space-Time Code for Quasistatic Rayleigh Fading Channels

ZHANG Jian-qiang, LI Dao-ben

(Department of Information Engineering, BUPT, Beijing 100876, P. R. China)

**Abstract:** The design criterion of space-time code (STC) for quasistatic Rayleigh fading channels is investigated. The probabilities of first-event errors with different lengths are evaluated, which are determined by the minimum determinants of all matrices constructed from pairs of distinct codewords with different lengths. A new criterion maximizing the sum of these minimum determinants is proposed. Furthermore, geometrical uniformity of STC is utilized to reduce the complexity of code search greatly. According to the new criterion, some new QPSK STCs are found and the performance comparisons with some existing codes are presented. The new criterion can also be suitably applied to more complex codes with more states and/or more transmit antennas.

**Key words:** space-time code; first-event error probability; quasistatic Rayleigh fading channel

## 0 引言

空时码是编码、调制和发分集的结合,可以有效地克服无线信道衰落和噪声,从而提高数据速率及传输质量。近年来,文献[1]中提出的空时码已经在无线通信领域中引起越来越多的研究兴趣。文献[1]使用最小秩准则和最小行列式准则设计空时码,使用该准则手工设计的空时码并非是最优的,而且单凭该准则找到高性能的码是非常困难的。到现在为止,在文献[2~5]中依据不同的设计准则找到一

些更优的空时码。例如:文献[2]中提出的设计准则是使不同码字对之间的距离平方矩阵的最小行列式达到最大,而文献[5]中提出的设计准则是使距离平方矩阵的最小迹达到最大。基于不同差错路径长度的首事件差错概率提出一种新空时码设计准则,并把搜索得到的好码与现有码的性能进行了比较。

## 1 系统模型

### 1.1 信道模型

考虑一个无线通信系统,采用 $n$ 根发射天线和 $m$

\* 收稿日期:2003-02-24

基金项目:国家自然科学基金重大项目资助课题(69931050)

作者简介:张坚强(1973-),男,山东平度人,博士研究生,研究方向为空时编码、通信信号处理等;李道本,教授,博导。

根接收天线。任意收发天线对之间的信道是准静态的,可建模为独立同分布零均值复高斯随机变量,其方差为 $0.5/\text{维}$ 。天线 $j(j=1,2,\dots,m)$ 在时间 $t(t=1,2,\dots,L)$ 接收的基带信号可以表示为

$$d_t^j = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} c_i^t \sqrt{E_s/n} + \eta_t^j$$

其中, $\eta_t^j$ 为独立同分布零均值复高斯白噪声,方差为 $N_0/2$ , $N_0$ 为单边带噪声功率谱密度;系数 $\alpha_{i,j}$ 是从发射天线 $i$ 到接收天线 $j$ 的信道增益; $L$ 为帧长度; $c_i^t$ 是发射天线 $i$ 在时间 $t$ 发送的调制符号; $E_s$ 是星座图的平均符号能量。假设接收端的信道估计是理想的。

## 1.2 编码器结构

本文采用生成矩阵的形式表示空时码以便计算机系统搜索。假设发送码字的比特流为 $u=(u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, u_s)$ ,其中, $s=L \times \log_2 M$ , $M$ 为星座点的数目, $L$ 是符号流(码字)的长度。生成矩阵 $G$ 有 $n$ 行、 $v_1+v_2$ 列,在第 $i$ 行、第 $j$ 列的元素记为 $g_{i,j}$ ,其中, $v_1=\log_2 M$ , $v_2$ 表示编码器中二进制状态寄存器的数目。

基带调制码字 $c=c_1^1 c_1^2 \dots c_1^n c_2^1 c_2^2 \dots c_2^n \dots c_L^1 c_L^2 \dots c_L^n$ 可由 $c_1^1 c_1^2 \dots c_1^n = \mathcal{M}\{(u_{v_1 t}, u_{v_1 t-1}, \dots, u_{v_1 t-(v_1+v_2)+1})\} \mathbf{G}^T \text{mod } M$ 得到。其中, $t=1,2,\dots,L$ ; $\mathcal{M}$ 为映射函数 $\mathcal{M}(x)=\exp(2\pi j x/M)$ ; $(\cdot)^T$ 表示转置操作。本文只考察使用2根发射天线的QPSK空时码,8PSK或更高维的空时码也可以用相同的方法考察。对于QPSK空时码有 $u=(b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_L, a_L)$ , $b_t=u_{2t-1}$ , $a_t=u_{2t}$ , $t=1,2,\dots,L$ 。4、8、16和32状态空时码可以分别由下式表示

$$(x_1^k, x_2^k) = (g_{11}, g_{21})a_k + (g_{12}, g_{22})b_k + (g_{13}, g_{23})a_{k-1} + (g_{14}, g_{24})b_{k-1} \quad (1)$$

$$(x_1^k, x_2^k) = (g_{11}, g_{21})a_k + (g_{12}, g_{22})b_k + (g_{13}, g_{23})a_{k-1} + (g_{14}, g_{24})b_{k-1} + (g_{15}, g_{25})a_{k-2} \quad (2)$$

$$(x_1^k, x_2^k) = (g_{11}, g_{21})a_k + (g_{12}, g_{22})b_k + (g_{13}, g_{23})a_{k-1} + (g_{14}, g_{24})b_{k-1} + (g_{15}, g_{25})a_{k-2} + (g_{16}, g_{26})b_{k-2} \quad (3)$$

$$(x_1^k, x_2^k) = (g_{11}, g_{21})a_k + (g_{12}, g_{22})b_k + (g_{13}, g_{23})a_{k-1} + (g_{14}, g_{24})b_{k-1} + (g_{15}, g_{25})a_{k-2} + (g_{16}, g_{26})b_{k-2} + (g_{17}, g_{27})a_{k-3} \quad (4)$$

## 2 设计准则

由于空时码没有固定的长度,可利用首事件差错概率分析其性能。首事件差错概率定义为错误判

决的码字和发送码字的路径在网格图的初始节点分离并在某个节点上首次合并的概率(即错误判决码字与发送码字的路径在某个节点上汇合,且该码字的路径量度首次超过发送码字的路径量度的概率)。

考察2个码字 $c=c_1^1 c_1^2 \dots c_1^n c_2^1 c_2^2 \dots c_2^n \dots c_L^1 c_L^2 \dots c_L^n$ 和 $e=e_1^1 e_1^2 \dots e_1^n e_2^1 e_2^2 \dots e_2^n \dots e_L^1 e_L^2 \dots e_L^n$ ,假设码字 $c$ 和 $e$ 的路径在网格图的初始节点分离并在 $b(2 \leq b \leq L)$ 个转移之后首次合并,即有

$$c_1^1 c_1^2 \dots c_1^n c_2^1 c_2^2 \dots c_2^n \dots c_b^n \neq e_1^1 e_1^2 \dots e_1^n e_2^1 e_2^2 \dots e_2^n \dots e_b^n e_b^{n+1} \dots e_b^n$$

而

$$c_{b+1}^1 c_{b+1}^2 \dots c_{b+1}^n c_{b+2}^1 c_{b+2}^2 \dots c_{b+2}^n \dots c_L^1 c_L^2 \dots c_L^n = e_{b+1}^1 e_{b+1}^2 \dots e_{b+1}^n e_{b+2}^1 e_{b+2}^2 \dots e_{b+2}^n \dots e_L^1 e_L^2 \dots e_L^n$$

则发送码字 $c$ 的最大似然接收机错误译码为码字 $e$ 的概率,称之为 $b$ 分支长首事件成对差错概率,可表示为

$$P(c \rightarrow e, b | a_{i,j}, i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m) \leq \exp(-d_b^2(c, e) E_s / 4n N_0) = \exp(-d_b^2(c, e) \beta)$$

当给定SNR和 $n$ 时, $\beta=E_s/4nN_0$ 为一常数;且有

$$d_b^2(c, e) = \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^L \left| \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} (c_i^t - e_i^t) \right|^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^b \left| \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} (c_i^t - e_i^t) \right|^2 + \sum_{j=1}^m \sum_{t=b+1}^L \left| \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} (c_i^t - e_i^t) \right|^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^b \left| \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} (c_i^t - e_i^t) \right|^2$$

用文献[1]中相同的方法可以推得

$$P(c \rightarrow e, b) \leq \left( \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i \beta) \right)^{-m} = (\det(\mathbf{I} + \beta \mathbf{A}_b(c, e)))^{-m}$$

其中

$$\mathbf{B}_b(c, e) = \begin{bmatrix} c_1^1 - e_1^1 & c_2^1 - e_2^1 & \dots & c_b^1 - e_b^1 \\ c_1^2 - e_1^2 & c_2^2 - e_2^2 & \dots & c_b^2 - e_b^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1^n - e_1^n & c_2^n - e_2^n & \dots & c_b^n - e_b^n \end{bmatrix}_{n \times b}$$

且 $\mathbf{A}_b(c, e) = \mathbf{B}_b(c, e) \mathbf{B}_b^*(c, e)$ 为Hermitian矩阵,其特征值 $\lambda_i(i=1,2,\dots,n)$ 为非负实数; $\det(\cdot)$ 表示矩阵的行列式; $\mathbf{I}$ 表示单位矩阵。

尽管已导出了码字 $C$ 错误判决为码字 $e$ 的 $b$ 分支长首事件成对差错概率的上界,但当发送码字 $C$ 时,可能错误地判决为其他码字 $e$ 而产生 $b$ 分支长首事件差错。考虑到 $\det(\mathbf{I} + \beta \mathbf{A}_b(c, e))$ 的最小值在空时码性能特性中的主导作用,当发送码字 $c$ 时, $b$ 分

支长首事件差错概率可以写为

$$P_e(c, b) = \max_{e \in S(c, b)} P(c \rightarrow e, b) \leq (\min_{e \in S(c, b)} \det(\mathbf{I} + \beta \mathbf{A}_b(c, e)))^m$$

其中,  $S(c, b)$  表示所有码字  $e$  的集合, 发送码字  $c$  时可能错误判决为该集合中的码字  $e$  而产生  $b$  分支长首事件差错。令  $\Delta_b$  表示码字  $c$  和  $S(c, b)$  中的码字  $e$  之间的码字对的  $\mathbf{I} + \beta \mathbf{A}_b(c, e)$  的最小行列式, 即  $\Delta_b = \min_{e \in S(c, b)} (\det(\mathbf{I} + \beta \mathbf{A}_b(c, e)))$ , 于是发送码字  $c$  时  $b$  分支长首事件差错概率可写为  $P_e(c, b) \leq \Delta_b^{-m}$ 。

实际上, 空时码的传输差错不仅仅是由于最短的首事件差错造成的, 故考察空时码的性能不能仅仅考虑最短首事件差错概率, 而还要考虑其他长度的首事件差错概率。但目前为止由于误帧率与不同长度的首事件差错概率之间尚没有发现直接的解析关系, 在本文中设想所有  $\Delta_b$  累加之和最大的码是好码, 后面的搜索结果及仿真结果证明了这一设想的合理性, 即新设计准则为:

行列式之和最大化准则 为了获得最好的性能, 对任何发送码字  $c$ , 所有对应于  $b$  分支长首事件差错概率的最小行列式  $\Delta_b (b = 2, 3, \dots, L)$  之和必须最大化。

### 3 空时码搜索

#### 3.1 几何一致性

考察式(1)~式(4)给出的空时码代数结构。根据文献[6], 若任意给定 2 个码字  $x$  和  $y$ , 存在一个等距映射  $\Psi_{x,y}$ , 使  $\Psi_{x,y}(x) = y$ , 则该空时码满足几何一致性, 容易看出, 此时该空时码的性能分析与发送的码字无关。下面以 4 状态 QPSK 空时码为例说明该特性, 定义  $R = (0 \rightarrow 1)(1 \rightarrow 2)(2 \rightarrow 3)(3 \rightarrow 0)$  以及

$$R_{11} = R^{g_{11}}, R_{12} = R^{g_{12}}, R_{13} = R^{g_{13}}, R_{14} = R^{g_{14}}$$

$$R_{21} = R^{g_{21}}, R_{22} = R^{g_{22}}, R_{23} = R^{g_{23}}, R_{24} = R^{g_{24}}$$

为 QPSK 星座图上星座点的置换。实际上置换  $R$  就是把星座点逆时针旋转  $\pi/2$  弧度。由此可知, 这些置换是复空间的等距映射。给定码字  $x$ , 考察对应的输入比特  $(b_k, a_k)$ 。令  $\Psi_k: (C \times C) \rightarrow (C \times C)$ , 定义为等距映射

$$(R_{11}^{a_k} R_{12}^{b_k} R_{13}^{a_{k-1}} R_{14}^{b_{k-1}}, R_{21}^{a_k} R_{22}^{b_k} R_{23}^{a_{k-1}} R_{24}^{b_{k-1}})$$

可知,  $\dots \times \Psi_0 \times \Psi_1 \times \Psi_2 \times \dots$  把全零码字映射到码字  $x$ 。这就证明了由式(1)构造的空时码是满足几

何一致性的, 其性能的分析与发送的码字无关。用相同的方法可以证明更高状态的 QPSK 空时码也是满足几何一致性的。因而, 不失一般性, 在本文中假设发送码字为全零码字, 即  $c=0$ , 而不必对所有可能的发送码字逐个考察, 从而大大地减少了空时码搜索的运算量。

#### 3.2 好码搜索

依据新准则, 需要计算并比较所有空时码的  $\sum_{b=2}^L \Delta_b$ 。任意长度首事件差错路径的数目可以通过空时码的转移函数计算, 例如: 4 状态 QPSK 空时码, 当  $b=2 \sim 8$  时,  $b$  分支长首事件差错路径的数目分别为 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187。显然, 当  $L$  很大 (例如 130) 时, 计算机不可能完成如此巨大的搜索运算量。退而求其次可以计算  $\sum_{b=2}^{L'} \Delta_b$  以代替  $\sum_{b=2}^L \Delta_b$ , 其中  $L'$  小于  $L$  但必须大于空时码的约束长度, 以使得到的计算结果尽可能真实地反映空时码的特性。在本文中对于 4, 8, 16 和 32 状态空时码分别取  $L' = 5, 6, 7, 8$ 。计算机搜索结果表明  $\beta = E_s / 4nN_0$  的大小在适度的范围内几乎不影响搜索的结果, 出于简洁起见, 本文没有包括该部分结果的分析。在好码搜索过程中, 取  $\beta = 1$  (当  $n=2$  时, 对应于 SNR = 9 dB), 得到

$$\Delta_b = \min_{e \in S(0, b)} (\det(\mathbf{I} + \mathbf{A}(0, e)))$$

表 1 示出了依据该准则通过计算机系统搜索得

表 1 新码与现有码的参数

Tab. 1 Parameters of the New Codes and Some Existing Codes			
状态数	码	G	最小行列式之和
4	TSC	[0012; 1200]	108
4	BBH	[0231; 2210]	126
4	CYV	[2021; 3202]	152
4	NEW	[2120; 0232]	152
8	TSC	[00122; 12002]	185
8	BBH	[02122; 12002]	169
8	CYV	[22120; 02212]	203
8	NEW	[02302; 22323]	219
16	TSC	[210220; 002102]	193
16	BBH	[210220; 022102]	237
16	CYV	[212123; 022302]	301
16	NEW	[202322; 021120]	309
32	TSC	[0012232; 1212032]	272
32	CYV	[2012212; 2223320]	386
32	NEW	[2032123; 3212012]	396

到的 4~32 状态好码 (标记为 NEW 码) 的参数, 在文献 [1]、[2]、[5] 中提出的好码也引入作为参考并分

别标记为TSC码、BBH码和CYV码。

表1可知,4状态新空时码的最小行列式之和大于TSC码和BBH码的最小行列式之和,但与CYV码相同。8、16、32三种状态新空时码的最小行列式之和大于或基本等于现有好码的最小行列式之和。

### 4 仿真结果

假设帧长 $L=130, n=2, m=2$ 或 $4$ ;另外在每帧的开始和结束时,要求编码器在零状态。图1示出了4状态新码和现有码的性能比较。当使用2根接收天线时,新码相对TSC码、BBH码分别有1.3 dB和0.4 dB的增益;当使用4根接收天线时,新码相对TSC码、BBH码分别有2.3 dB和0.7 dB的增益。可以看出,接收天线数目越多,新码的增益就越大。新码与CYV的性能几乎相同,这与表1中的最小行列式之和的比较结果相吻合。

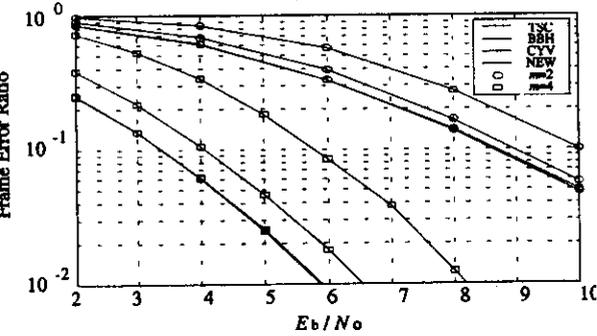


图1 4状态空时码的性能比较

Fig. 1 Performance Comparison of STCs with 4 States

图2示出8状态空时码的性能比较。当使用2根接收天线时新码相对TSC码、BBH码有0.3 dB的增益;当使用4根接收天线时,新码相对TSC码、

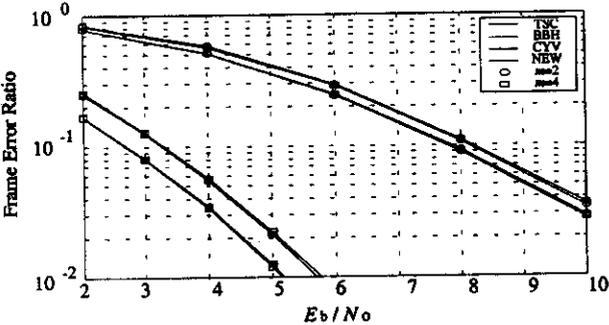


图2 8状态空时码的性能比较

Fig. 2 Performance Comparison of STCs with 8 States

BBH码有0.7 dB的增益。而新码与CYV码的性能

基本相同。图3示出16状态空时码的性能比较。当使用2根接收天线时,新码相对现有码有至少0.3 dB的增益。当使用4根接收天线时,新码相对TSC码、BBH码也有至少0.3 dB的增益,而与CYV码的性能基本相同。图4示出32状态空时码的性能比较,可以看出,新码优于现有好码,只是当使用2根接收天线时新码与CYV码的性能几乎相同。

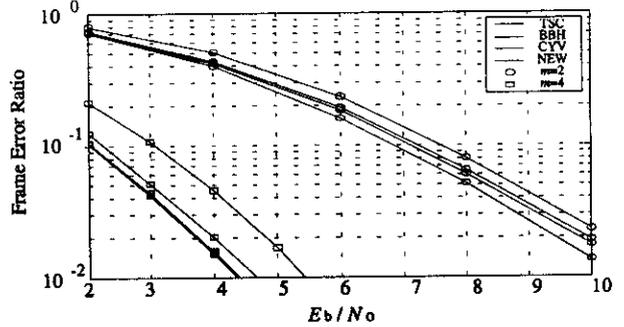


图3 16状态空时码的性能比较

Fig. 3 Performance Comparison of STCs with 16 States

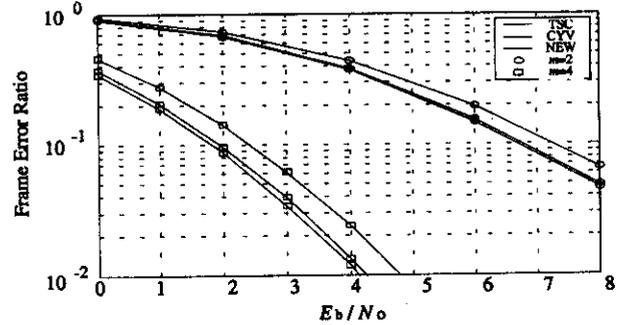


图4 32状态空时码的性能比较

Fig. 4 Performance Comparison of STCs with 32 States

### 5 结束语

本文考察不同差错路径长度的首事件差错概率,提出一种准静态瑞利衰落信道下空时码设计的新准则。另外本文证明了空时码的几何一致性,并使用该特性大大地减少了空时码搜索的复杂度。依据该准则通过计算机系统搜索得到一些4状态、8状态、16状态和32状态新码,仿真结果表明这些新码优于现有的空时码或至少有相同的性能。

### 参考文献

[1] TAROKH V, SESHADRI N, CALDERBANK A R. Space-time codes (下转91页)

