系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
3 (2) (1983), 120-124

向量极值问题的本质弱有效解

陈 光 亚

向量极值问题(多目标最优化问题)的稳定性研究，几年来已有一些工作. 本文从不同的角度来讨论此类问题. 我们视满足一定条件的向量极值问题全体为一距离空间，将每个向量极值问题与其全体弱有效解的集合之间的对应关系视为集合值映象(多值映象). 然后讨论此集合值映象的连续性质.

(X, d) 是全有界的完备距离空间，R^m 为 m 维欧氏空间，S 是 R^m 上的开凸点锥，$S\cup\{0\}$ 在 R^m 上定义了一个偏序 $\underset{S}{\geq}$.

A, B 是 X 的任意非空子集，定义 A 和 B 之间的 Hausdorff 距离 $\mathscr{D}$,

$$\mathscr{D}(A, B)=\inf\{\varepsilon\in(0,\infty]\mid A\subset B_\varepsilon(B),\ B\subset B_\varepsilon(A)\},$$

其中，$B_\varepsilon(A)=\{x\in X\mid d(x, A)<\varepsilon\}$.

令 $\delta(A, B)=\sup\limits_{x\in A}d(x, B)$,

显然有

$$\mathscr{D}(A, B)=\max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\}.$$

$\mathscr{E}$ 记 X 的全体非空紧致子集系，则 $(\mathscr{E}, \mathscr{D})$ 成为一个完备距离空间.

T 为距离空间，$\varphi: T\to\mathscr{E}$ 是 T 到 X 里的集合值映象.

定义 1. (1) φ 在 $t_0\in T$ 是上半连续的，如果对任意开集 $G\subset X$，满足 $\varphi(t_0)\subset G$，存在 t_0 的邻域 $V(t_0)$，使得对 $\forall t\in V(t_0)$，有 $\varphi(t)\subset G$.

如果对任意 $t\in T$，$\varphi(t)$ 为非空紧致集，φ 在 T 的每一点是上半连续的，则称 φ 在 T 上是上半连续的.

(2) φ 在 $t_0\in T$ 是下半连续的，如果对任意开集 $G\subset X$，满足 $\varphi(t_0)\cap G\neq\varnothing$，存在 t_0 的邻域 $V(t_0)$，对于 $\forall t\in V(t_0)$，有 $\varphi(t)\cap G\neq\varnothing$.

φ 在 T 的每一点是下半连续的，称 φ 在 T 上是下半连续的.

(3) φ 在 $t_0\in T$ (在 T 上)既是上半连续又是下半连续，则称 φ 在 t_0 点(在 T 上)连续.

考虑下面形式的向量极值问题 (VMP) p:

$$\max_{x\in R}f(x), \tag{1}$$

其中，$f: X\to R^m$ 是 X 到 R^m 的有界连续向量函数，$R\in\mathscr{E}$. $C^m[X]$ 记 X 到 R^m 的有界连续向量函数全体. 在 $C^m[X]$ 上定义 ρ,

$$\rho(f, g)=\sup_{x\in X}\|f(x)-g(x)\|,\ f, g\in C^m[X].$$

则 $(C^m[X], \rho)$ 成为一个完备距离空间. 每一个向量极值问题 p 与二元组 (f, R) 一一对

1982 年 5 月 19 日收到.

应. 我们用 P 记具有形式 (1) 的向量极值问题全体. 这样 $P = C^m[X] \times \mathscr{E}$. 定义乘积空间距离 $h = \rho + \mathscr{D}$, 则 (P, h) 成为完备距离空间.

定义 2. 对于向量极值问题 $p = (f, R) \in P$. 我们说 $x^* \in R$ 是 p 的弱有效解, 如果不存在 $x \in R$, 使得 $f(x) \underset{S}{>} f(x^*)$ 且 $f(x) \neq f(x^*)$.

由定义可知, 弱有效解是象集 $f(R)$ 在偏序 $\underset{S}{>}$ 下的极大元在 R 中的原象点.

对于 $p \in P$, 用 $M(p)$ 记 p 的全体弱有效解集合. 这就定义了一个集合值映象 M: $X \to \mathscr{E}$.

引理 1. 对任意 $p \in P$, $M(p)$ 是 X 的非空紧致子集.

证. 1°. 设 $p = (f, R)$. 由 f 的连续性及 R 的紧致性知 $f(R)$ 是 R^m 中的紧致集. 由 [2] 的推论 4.6 知 $M(p) \neq \varnothing$.

2°. $M(p)$ 是闭集. 因为, 如果序列 $\{x_n\} \subset M(p)$, $x_n \to x_0$, $x_0 \bar{\in} M(p)$. 由 R 的紧致性及 $M(p) \subset R$ 知 $x_0 \in R$. 由弱有效解定义, 存在 $\bar{x}_0 \in M(p)$, 使得 $f(\bar{x}_0) \underset{S}{>} f(x_0)$ 且 $f(\bar{x}_0) \neq f(x_0)$, 即 $f(\bar{x}_0) - f(x_0) \in S$. 由于 $f(x_n) \to f(x_0)$, 则存在 $N > 0$, 当 $n \geqslant N$ 时, 有 $f(\bar{x}_0) \underset{S}{>} f(x_n)$ 且 $f(\bar{x}_0) \neq f(x_n)$. 这与 $x_n, \bar{x}_0 \in M(p)$ 矛盾. 由 R 的紧致性得 $M(p)$ 是紧致集.

引理 2. 设 $R_n, R \in \mathscr{E}$, $\forall n$, $\mathscr{D}(R_n, R) \to 0$, 则 $\tilde{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \cup R$ 是 X 的紧致集.

证明同 [8] 中的引理 3.

引理 3. 集合值函数 M 在 P 上是上半连续的.

证. 由引理 1, 对所有 $p \in P$, $M(p)$ 是非空紧致集.

设 $p \in P$, 开集 $G \supset M(p)$, 如果对 p 的每个邻域 $V(p)$, 存在一点 $p_V \in V(p)$, 使得 $M(p_V) \not\subset G$. 这样可选择序列 $p_n \to p$ 及 $x_n \in M(p_n)$ 使得 $x_n \bar{\in} G$, $\forall n$. 但是 $p_n = (f_n, R_n)$, $p = (f, R)$. 由 $p_n \to p$, 得 $\rho(f_n, f) \to 0$, $\mathscr{D}(R_n, R) \to 0$. 由引理 2, $\tilde{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \cup R$ 是紧致集. 存在收敛子序列, 仍记为 $\{x_n\}$, 有 $x_n \to x_0$, 且 $x_0 \in R$. 由于 $x_n \bar{\in} G$, $\forall n$, G 是开集且包含 $M(p)$. 所以又有 $x_0 \bar{\in} M(p)$. 由弱有效解定义知, 存在一点 $\bar{x}_0 \in M(p)$, 使得 $f(\bar{x}_0) \underset{S}{>} f(x_0)$. 又由 $\mathscr{D}(R_n, R) \to 0$, 存在 $\{\bar{x}_n\}$, $\bar{x}_n \in R_n$, $\forall n$, 使得 $\bar{x}_n \to \bar{x}_0$. 由 f_n 的连续性及 $\tilde{R}$ 的紧致性知 $f_n(\bar{x}_n) \to f(\bar{x}_0)$, $f_n(x_n) \to f(x_0)$. 因为 $f(\bar{x}_0) - f(x_0) \in S$, S 是开集, 则存在 $N > 0$, 当 $n \geqslant N$ 时, 有 $f_n(\bar{x}_n) - f_n(x_n) \in S$, 即是 $f_n(\bar{x}_n) \underset{S}{>} f_n(x_n)$ 且 $f_n(\bar{x}_n) \neq f_n(x_n)$, 这与 $x_n \in M(p_n)$ 矛盾. 由定义知 M 在 p 点是上半连续的.

定义 3. 设 $p \in P$, 我们说 $x \in M(p)$ 是向量极值问题 p 的本质弱有效解, 如果对每一个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $q \in P$, $h(p, q) < \delta$ 时, 有

$$x \in B_\varepsilon(M(q)) = \{x \in X \mid d(x, M(q)) < \varepsilon\}.$$

定理 1. 向量极值问题 $p \in P$ 的所有弱有效解是本质弱有效解的充要条件为 p 是集合值映象 M 的连续点.

证. 由引理 3, 只须证明命题对 p 点是 M 的下半连续点成立即可.

必要性. 设开集 G 使得 $M(p) \cap G \neq \varnothing$. 如果存在序列 $p_n \to p$, 且 $M(p_n) \bigcap_{l} G \neq \varnothing$.

由于 $M(p)$ 是非空紧致的, 存在有限个点 $\{x_1, \cdots, x_l\} \subset M(p)$, 有 $M(p) \subset \bigcup_{i=1}^{l} B_{\varepsilon/3}(x_i)$,

$\varepsilon > 0$ 是任意给定的. 又由于 $M(p)$ 中每一点是本质的及 $p_n \to p$, 存在 $N > 0$, 当 $n \geqslant N$ 时, 有 $x_i \in B_{\varepsilon/2}(M(p_n))$, $i = 1, 2, \cdots, l$. 因此有 $M(p) \subset B_\varepsilon(M(p_n))$, $n \geqslant N$. 由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, $M(p)$ 是紧致集以及 $M(p_n) \cap G = \varnothing$, $\forall n$, 得到 $M(p) \cap G = \varnothing$. 这与假设矛盾.

充分性. 设 M 在 p 点下半连续. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 因为 $M(p)$ 是非空紧致集, 存在 $\{x_1, \cdots, x_l\} \subset M(p)$, 有 $M(p) \subset \bigcup_{i=1}^{l} B_{\varepsilon/2}(x_i)$. 由于 M 是下半连续的, 存在 $\delta_i > 0$, 当 $h(p, q) < \delta_i$ 时, 有 $M(q) \cap B_{\varepsilon/2}(x_i) \neq \varnothing$. 取 δ_i 中最小者记为 δ. 则当 $h(p, q) < \delta$ 时, 有 $\{x_1, \cdots, x_l\} \subset B_{\varepsilon/2}(M(q))$. 故有 $M(p) \subset B_\varepsilon(M(q))$. 这说明 $M(p)$ 的每一点均是 p 的本质弱有效解.

定理 2. 每一个向量极值问题 $p \in P$, 及任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在一个向量极值问题 $q \in P$, 使得 $h(p, q) < \varepsilon$, 且 q 的每一个弱有效解是本质弱有效解. 换言之, 集合值映象 M 的连续点在 P 上处处稠密.

证. 令

$$C_M(\varepsilon) = \left\{ p \in P \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{存在 } p \text{ 的邻域 } U(p) \text{ 使得} \\ \sup\limits_{q \in U(p)} \mathscr{D}(M(p), M(q)) < \varepsilon \end{array} \right\},$$

$$C = \bigcap_{\varepsilon > 0} C_M(\varepsilon).$$

易知集合值映象 M 在 p 点连续的充要条件是 $p \in C$. 现在证明, 对任给的 $\varepsilon > 0$, $C_M(\varepsilon)$ 在 P 上是处处稠密的. 令 $P_\varepsilon = P - C_M(\varepsilon)$. 因为 P 是完备的, 我们只需证明 P_ε 是闭集且无处稠密就行了.

1°. 由定义, $p \in P_\varepsilon$ 的充要条件是对每个邻域 $V(p)$ 及每个正数 $\alpha < \varepsilon$, 存在 $q \in V(p)$ 使得 $\delta(M(p), M(q)) \geqslant \alpha$, 其中

$$\delta(M(p), M(q)) = \sup_{x \in M(p)} d(x, M(q)).$$

2°. P_ε 是闭集. 设序列 $\{p_n\} \subset P_\varepsilon$, 且 $p_n \to p \in P$. 设 $0 < \alpha < \beta < \varepsilon$. 因 $p_n \in P_\varepsilon$, $\forall n$, 存在 $q_n \in P$, 有 $h(p_n, q_n) < 1/n$, 且 $\delta(M(p_n), M(q_n)) \geqslant \beta$. 由于 M 是紧致集值且是上半连续的, 有

$$\delta(M(p_n), M(p)) \to 0.$$

这样,

$$\beta \leqslant \delta(M(p_n), M(q_n)) \leqslant \delta(M(p_n), M(p)) + \delta(M(p), M(q_n)).$$

因此, 对充分大的 n, 有 $\delta(M(p), M(q_n)) \geqslant \alpha$. 由 1°, 知 $p \in P_\varepsilon$, 即 P_ε 是闭集.

3°. P_ε 是无处稠密的. 如若不然, 设 P_ε 包含开集 G. 选择序列 $\{\alpha_i\}$, 使 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \varepsilon$. 我们逐次地构造序列 $\{p_n\}$. 设 $p_1 \in G$ 是任意的. 设 $p_n \in G$ 已选择. 因 M 是上半连续的及 $G \subset P_\varepsilon$, 存在 $p_{n+1} \in G$ 使得

$$\delta(M(p_{n+1}), M(p_n)) < \alpha_{n+1} - \alpha_n \text{ 且 } \delta(M(p_n), M(p_{n+1})) \geqslant \alpha_n.$$

这样, 得出 $\delta(M(p_n), M(p_j)) \geqslant \alpha_n$, $j > n$. 因为, 对于 $j = n+1$, 根据 p_{n+1} 的构造可得. 而对于 $j > n+1$, 如果 $\delta(M(p_n), M(p_j)) < \alpha_n$, 我们有

$$\delta(M(p_{j-1}), M(p_j)) \leqslant \sum_{k=n+1}^{j-1} \delta(M(p_k), M(p_{k-1})) + \delta(M(p_n), M(p_j))$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{j-1} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) + \alpha_n = \alpha_{j-1}.$$

这就导出矛盾. 这样对于 $n \neq j$, 有

$$\delta(M(p_n), M(p_j)) \geqslant \alpha_n \geqslant \alpha_1$$

或

$$\delta(M(p_j), M(p_n)) \geqslant \alpha_j > \alpha_1.$$

因此,

$$\mathscr{D}(M(p_n), M(p_j)) \geqslant \alpha_1 > 0, \ n \neq j. \tag{2}$$

因为X是全有界距离空间, 存在有限集$\{r_1, \cdots, r_l\} \subset X$, 使得$X$的每一点与某个 r_i 之距离小于 $\alpha_1/2$. 易证对于任意子集 $A \subset X$, 存在 $B \subset \{r_1, \cdots, r_l\}$, 使得 $\mathscr{D}(A, B) < \alpha_1/2$. 对于 $M(p_n)$, 我们指定一对应的 $B_n \subset \{r_1, \cdots, r_l\}$, 使得 $\mathscr{D}(M(p_n), B_n) < \alpha_1/2$. 由于 $\{r_1, \cdots, r_l\}$ 是有限集,则存在两个不同的下标 i, j, 使得 $B_i = B_j$. 因此

$$\mathscr{D}(M(p_i), M(p_j)) \leqslant \mathscr{D}(M(p_i), B_i) + \mathscr{D}(B_i, M(p_j)) < \alpha_1,$$

这与 (2) 矛盾. 因此 P_ε 是无处稠密的.

显然,对于 $\eta < \varepsilon$, 有 $P_\varepsilon \subset P_\eta$. 记 $I = \{\eta | \eta > 0$ 是有理数$\}$. 我们有

$$C = \bigcap_{\varepsilon > 0} C_M(\varepsilon) = \bigcap_{\varepsilon > 0} (P - P_\varepsilon) = \bigcap_{\eta > 0} (P - P_\eta).$$

由于 P 是完备的, P_η, $\eta \in I$ 是无处稠密的闭集, 由 Baire 定理[6], 知C在 P 上是处处稠密的.

定理 3. 向量极值问题 p 的弱有效解是唯一的,则此弱有效解是本质弱有效解.

证. 对于任意开集 G, $G \cap M(p) \neq \varnothing$, 由于 $M(p)$ 是单点集, 有 $M(p) \subset G$. 由 M 的上半连续性知, 存在邻域 $V(p)$, 使得 $M(p) \subset G$, $\forall q \in V(p)$. 由于 $M(q)$ 非空, 有 $M(q) \cap G \neq \varnothing$. 这就明 p 是 M 的连续点. 由定理 1 知此定理成立.

参 考 文 献

[1] Jiang Jiahe, Essential Fixed Points of the Multivalued Mapping, Scientia Sinica, **XI**:3 (1962), 293—298.

[2] P. L. Yu, Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjective, *Journal of Optimization Theory and Application*, **14**: 3 (1974), 319—377.

[3] P. H. Naccache, Stability of Multicriteria Optimization, *J. Math. Anal. Appl.*, **68**: 2 (1979), 441—453.

[4] Dirker, E., Topological Methods in Walrasian Economics, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 92, Berlin, Springer, 1974.

[5] C. Berge, Topological Spaces, The Macmillan Company, New York, 1963.

[6] J. L. Kelley, General Topology, Van Nostrand, 1955, 200—203.

[7] 陈光亚,多目标最优化问题有效解的性质及标量化,应用数学学报, **2**:3 (1979), 251—256.

[8] 陈光亚,数学规划相对最小解的稳定性,科学通报(数学,物理学,化学专辑), 1980,

[9] 陈光亚,关于多目标规划的逼近问题,自然杂志, **1**:6 (1978).

ESSENTIAL WEAK EFFICIENT SOLUTIONS FOR VECTOR MAXIMIZATION PROBLEMS

CHEN GUANGYA

ABSTRACT

This paper deals with a problem about the stability of the vector maximization. A topological structure is introduced to make the family of vector maximization problems a complete metric space. Then the essential weak efficient solution is defined and the vector maximization problems with all their weak efficient solutions being essential are proved to be everywhere dense in the space.

Let (X, d) be a totally bounded complete metric space, R^m an m-dimensional Euclidean space, and $S \subset R^m$ an open convex cone. We denote by $\mathscr{S}$ a complete metric space of all nonempty compact subsets of X with Hausdorff's metric function $\mathscr{D}$. We denote by p a vector maximization problem

$$\max_{x \in R} f(x),$$

where f is a bounded continuous function from X into R^m, $R \in \mathscr{S}$. We denote by P all p under the above conditions; then $P = C_m[X] \times \mathscr{S}$. We denote by $M(p)$ all weak efficient solutions of $p \in P$.

Definition. $x \in M(p)$ is an essential weak efficient solution of p, if corresponding to $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that $x \in V(\varepsilon, M(g))$ whenever $g \in P$ and $h(p, g) < \delta$.

The main results:

Lemma 3. *The multivalued mapping M is upper semicontinuous on P.*

Theorem 1. *All weak efficient solutions of $p \in P$ are essential weak efficient solutions if and only if p is a point of continuity of M.*

Theorem 2. *For every $p \in P$ and an arbitrary $\varepsilon > 0$, there exists $g \in P$ such that $h(p, g) < \varepsilon$ and that every weak efficient solution of g is an essential weak efficient solution. In other words, the set of all points of continuity of the mapping M is everywhere dense in P.*

Theorem 3. *If the vector maximization problem p has a single weak efficient solution, then this solution is an essential weak efficient solution.*