系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
13 (1) (1993), 53—61

拟线性椭圆组弱解的正则性和 Pohozaev 恒等式*

沈 尧 天
(华南理工大学应用数学系，广州 510641)

王 天 威
(华南师范大学数学系，广州 510631)

自 1965 年文[1]证明了一个积分等式(现称为 Pohozaev 恒等式)以来，发现该等式有多种用途，主要作用之一是证明解的不存在性．近年来，关于这个等式有不少发展．首先是 1985 年，沈尧天和邓耀华等人合作的工作[2,3]，最早对重调和和多重调和方程的解建立了这一类积分等式． 在 1986 年 P. Pucci 和 J. Serrin[4] 对一般方程组和高阶方程建立了这一类等式． 互相独立的，徐海祥[5]在 1987 年也对一般方程组建立了这种等式． 但上述工作都是对光滑解建立的，对二阶方程而言，这就是要求解属于 $C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$．但是对于方程组而言，往往只能知道解属于 $C^{0,\alpha}(\Omega\backslash\Omega_0)$，其中 Ω_0 是零测集．所以此时用 Pohozaev 恒等式推出二阶方程组不存在光滑解就没有意义，因光滑解原来就不存在，存在的只是弱解．我们想对于弱解是否也能建立 Pohozaev 恒等式呢？ 这尤其对方程组而言是很有意义的． 沈尧天等人的工作[6]，在 $W^{2,p_1}(\Omega)$ 中对无界区域上一般二阶 Euler 方程建立了这种式子，当然对有界区域也对． 本文对二阶拟线性椭圆组在 $W^{1,p}\cap L_q$ 中弱解建立 Pohozaev 恒等式．这椭圆组中高阶项关于 $|Du|$ 的增长是 $p-1$ 次，低阶项关于 $|u|$ 的增长是 $q-1$ 次．当 $q=\frac{np}{n-p}$ 和 $q>\frac{np}{n-p}$ 时，分别称为临界指数和超临界指数．$W^{k,p}(\Omega,R^N)$ 表示 Sobolev 空间，$k=1,2$，$p\geqslant 1$．

本文的第一部分先讨论临界和超临界指数时方程组弱解的正则性，证明了当弱解 $u(x)\in L_{q_0}$，q_0 见(1.8)，(1.9)和(1.12)，则 $W^{1,p}\cap L_q$ 中弱解必属于 $W^{2,2}$ 且

$$\int_\Omega (1+|Du|^2)^{\frac{p-2}{2}}|D^2u|^2dx<+\infty.$$

此时，我们是在通常的差商方法[7,8]基础上，对于临界和超临界项进行细致的估计而得到了正则性．在超临界指数情况的正则性过去未见讨论．对于 $p=2$ 而言，当 $q=\frac{2n}{n-2}$（临界指数），上述 $q_0=\frac{2n}{n-2}$． 从而 $W^{1,2}$ 中弱解自然就属于 $W^{2,2}$． 当 $p>2$，$q>\frac{np}{n-p}$ 时，还需要条件 $u\in L_{q_0}$，此时 $q_0>q$．但是，有例子表明，这条件是必须的，且在

---

* 国家自然科学基金和广东省科学基金资助课题．
1990 年 2 月 27 日收到．1990 年 12 月 4 日收到修改、压缩稿．

某些情况下该条件已是最弱的.

最后,利用前面证明的正则性建立了方程组弱解的 Pohozaev 恒等式.

一、内 正 则 性

设 $A_i^\alpha(x,u,r)$ 和 $B_i(x,u,r)$ 满足下列条件:

(i) $A_i^\alpha(x,u,r)$ 和 $B_i(x,u,r)$ 关于 x,u,r 一阶连续可微. 这里

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ u=(u_1,u_2,\cdots,u_N),\ r=(r_i^\alpha),$$
$$i=1,2,\cdots,N,\ \alpha=1,2,\cdots,n.$$

(ii) 增长性条件

$$|\partial_j A_i^\alpha|,\ |\partial_{r_j^\beta} A_i^\alpha|,\ |\partial_{r_j^\beta} B_i|\leqslant cV^{p-2}, \tag{1.1}$$

$$|\partial_\lambda A_i^\alpha|\leqslant cV^{p-1}, \tag{1.2}$$

$$|\partial_\alpha B_i|\leqslant\begin{cases}cV^{p-1}+c|u|^{q-1},\ n>p,\ q\geqslant\dfrac{np}{n-p},\\ cV^{p-1}+c|u|^{q_1-1},\ n=p,\ p<q_1<+\infty,\end{cases} \tag{1.3}$$

$$|\partial_i B_i|\leqslant\begin{cases}cV^{p-2}+c|u|^{q-2},\ n>p,\ q\geqslant\dfrac{np}{n-p},\\ cV^{p-2}+c|u|^{q_2-2},\ n=p,\ p<q_2<+\infty.\end{cases} \tag{1.4}$$

其中,

$$\partial_i=\frac{\partial}{\partial u_i},\ \partial_\lambda=\frac{\partial}{\partial x_\lambda},\ \partial_{r_j^\beta}=\frac{\partial}{\partial r_j^\beta},\ V=(1+a|u|^2+|r|^2)^{\frac{1}{2}},\ a\geqslant 0.$$

(iii) 椭圆条件

$$\lambda_1 V^{p-2}|\pi|^2\leqslant\partial_{r_j^\beta}A_i^\alpha(x,u,r)\pi_i^\alpha\pi_j^\beta. \tag{1.5}$$

考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\partial_\alpha A_i^\alpha(x,u,Du)=B_i(x,u,Du),\ x\in\Omega,\ i=1,\cdots,N,\\ u=v,\ x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $v(x)\in L_q\cap W^{1,p}(\Omega,R^N)$. 问题(1.6)弱解的定义: 若 $u\in W^{1,p}(\Omega,R^N)\cap L_q$, $u-v\in W_0^{1,p}(\Omega,R^N)$ 且满足

$$\int_\Omega[A_i^\alpha(x,u,Du)\partial_\alpha\varphi_i+B_i(x,u,Du)\varphi_i]dx=0,$$
$$\forall\varphi\in W_0^{1,p}\cap L_q. \tag{1.7}$$

当 $n=p$ 或 $q=\dfrac{np}{n-p}$ 时, u,v 和 φ 都只要求属于 $W^{1,p}$ 和 $W_0^{1,p}$ 即可.

定理 1. 若 A_i^α 和 B_i 满足假设 (i), (ii), (iii), 且 (1.6) 的弱解 $u(x)$ 有: 当 $n>p$ 时

$$u(x)\in\begin{cases}L_{(q-1)\frac{p}{p-2}}(\Omega,R^N),\ p\geqslant\dfrac{2n}{n-2}, & (1.8)\\ L_{(q-2)\frac{m}{2}}(\Omega,R^N),\ m>n,\ 2\leqslant p<\dfrac{2n}{n-2}, & (1.9)\end{cases}$$

则对任意 $\Omega'\subset\subset\Omega$，有 $u\in W^{2,2}(\Omega',R^N)$ 且

$$\int_{\Omega'}(1+|Du|^2)^{\frac{p-1}{2}}|D^2u^2|dx\leqslant c\int_{\Omega}(1+|Du|^2)^{\frac{p}{2}}dx+c\int_{\Omega}|u|^q dx$$

$$+\begin{cases} c\left(\int_{\Omega}|u|^{\frac{(q-2)m}{2}}dx\right)^{\frac{2}{m-n}}\int_{\Omega}|Du|^2dx, & 2\leqslant p<\dfrac{2n}{n-2}, \quad (1.10)\\ c\int_{\Omega}|u|^{\frac{(q-2)p}{p-2}}dx, & \dfrac{2n}{n-2}\leqslant p. \quad (1.11)\end{cases}$$

此时，(1.9) 还可减弱为

$$u(x)\in L_{(q-2)\frac{n}{2}}(\Omega,R^N),\ 2\leqslant p<\frac{2n}{n-2}. \tag{1.12}$$

同样有 $u\in W^{2,2}(\Omega',R^N)$ 且

$$\int_{\Omega'}(1+|Du|^2)^{\frac{p-1}{2}}|D^2u|^2dx<+\infty. \tag{1.13}$$

当 $n=p$ 时，无需 (1.8) 或 (1.9) 即可得出 (1.10) 和 (1.11)。

证. 对某个 λ，定义

$$\Delta^h u_i=\Delta_\lambda^h u_i=\frac{u_i(x+he_\lambda)-u_i(x)}{h}=\frac{\Delta u_i}{h},$$

其中 $\lambda=1,2,\cdots,n,e_\lambda$ 是 x_λ 方向上单位向量，我们设 $\varphi\in L_q\cap W_0^{1,p}(\Omega,R^N)$，且 $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi_i,\ \partial\Omega)>0$，$2h<\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi_i,\ \partial\Omega)$。显然 $\operatorname{supp}\Delta^{-h}\varphi_i\subset\Omega$，用 $\Delta^{-h}\varphi_i$ 代替 (1.7) 中 φ_i，则有

$$\int_{\Omega}[(\Delta^h A_i^\alpha)\partial_\alpha\varphi_i+(\Delta^h B_i)\varphi_i]dx=0. \tag{1.14}$$

设 $2a\equiv\operatorname{dist}(\Omega';\partial\Omega)>0$，作 $\eta\in C^1(\Omega,R^N)$，且满足 $\eta=1$，当 $x\in\Omega'$；$\eta=0$，当 $x\in\Omega\backslash\Omega_a(\Omega_a=\{x\in\Omega\,|\,\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)>a\})$；其余地方 η 在 0 与 1 之间，且 $|D\eta|\leqslant\frac{c}{a}$. 取 $\varphi_i=\eta^2\Delta^h u_i$，其中 $h<a$，经过计算知

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\Big\{\Big[\int_0^1\partial_{r_j^\beta}A_i^\alpha dt\,\Delta^h(\partial_\beta u_j)+\int_0^1\partial_j A_i^\alpha dt\,\Delta^h u_j+\int_0^1\partial_\lambda A_i^\alpha dt\Big]\\ \cdot(\eta^2\Delta^h(\partial_\alpha u_i)+2\eta\,\partial_\alpha\eta\Delta^h u_i)\\ +\Big[\int_0^1\partial_{r_j^\alpha}B_i dt\,\Delta^h(\partial_\alpha u_j)\\ +\int_0^1\partial_j B_i dt\,\Delta^h u_j+\int_0^1\partial_\lambda B_i dt\Big]\eta^2\Delta^h u_i\Big\}dt=0.\end{aligned} \tag{1.15}$$

(1.15) 式中含 A_i^α 的项的估计是标准的，现只估计含 B_i 的项。先讨论 $p\geqslant\frac{2n}{n-2}$ 时，因 η 在 $\Omega\backslash\Omega_a$ 中为 0，故

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Omega}\left(\int_0^1\partial_j B_i dt\right)\eta^2(\Delta^h u_i)\Delta^h u_j dx\right|\\ &\quad=\left|\int_{\Omega_a}\left(\int_0^1\partial_j B_i dt\right)\cdot\eta^2(\Delta^h u_i)\Delta^h u_j dx\right|.\end{aligned}$$

利用(1.4)和 Hölder 不等式知,上式右端

$$\leqslant c\int_\Omega \eta^2 A_h|\Delta^h u|^2 dx + 2^q c\left(\int_\Omega |u|^{\frac{(q-2)p}{p-2}}dx\right)^{\frac{p-2}{p}}\cdot\left(\int_\Omega \eta^p|\Delta^h u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}. \tag{1.16}$$

类似地,有

$$\left|\int_\Omega\int_0^1 \partial_\lambda B_i dt\,\eta^2\Delta^h u dx\right| \leqslant c\int_\Omega A_h|\eta\Delta^h u|^2 dx + c\int_\Omega B_h dx$$
$$+ c\cdot 2^{q-1}\int_\Omega |u|^{q-2}|\eta\Delta^h u|^2 dx + c\cdot 2^{q-1}\int_\Omega |u|^q dx. \tag{1.17}$$

因而,有

$$\frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega A_h\eta^2|\nabla(\Delta^h u)|^2 dx \leqslant c\int_\Omega A_h\eta^2|\Delta^h u|^2 dx + c\int_\Omega B_h dx$$
$$+ c\int_\Omega A_h|\nabla\eta|^2|\Delta^h u|^2 dx + c\cdot 2^{q+1}\left(\int_\Omega |u|^{\frac{(q-2)p}{p-2}}dx\right)^{\frac{p-2}{p}}$$
$$\cdot\left(\int_\Omega \eta^p|\Delta^h u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} + c\int_\Omega |u|^q dx.$$

令 $h\to 0$, 有

$$\frac{\lambda_1}{2}\int_{\Omega'}(1+|Du|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla(\partial_\lambda u)|^2 dx$$
$$\leqslant c\int_\Omega (1+|Du|^2)^{\frac{p}{2}}dx + c\int_\Omega |u|^q dx$$
$$+ c\int_\Omega |u|^{\frac{(q-2)p}{p-2}}dx.$$

上式对 $\lambda=1,2,\cdots,n$ 都成立,故(1.11)式成立。

下面考虑 $2\leqslant p<\dfrac{2n}{n-2}$, 此时对(1.16)最后一式重新估计得

$$\left|\int_\Omega\int_0^1 \partial_j B_i dt\,\eta^2(\Delta^h u_i)(\Delta^h u_j)dx\right| \leqslant c\int_\Omega A_h\eta^2|\Delta^h u|^2 dx$$
$$+ 2^q c\left(\int_\Omega |u|^{(q-2)\frac{m}{2}}dx\right)^{\frac{2}{m}}\left(\int_\Omega |\eta^2\Delta^h u|^{\frac{2m}{m-2}}dx\right)^{\frac{m-2}{m}}. \tag{1.18}$$

其中 $m>n$. 再令 $w=\eta\Delta^h u$, 则知 $w\in W_0^{1,2}$, 由乘积不等式(也叫 Gagliardo-Nirenberg 不等式)

$$\|w\|_{L_{2m/m-2}} \leqslant c_0\|\nabla w\|_{L_2}^{n/m}\|w\|_{L_2}^{(m-n)/m},$$

再利用内插不等式

$$ab\leqslant \varepsilon a^q + c(\varepsilon)b^{q'},\quad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,$$

有

$$\|w\|^2_{L_{\frac{2m}{m-2}}} \leqslant \varepsilon\|\nabla w\|^2_{L_2} + c(\varepsilon)\|w\|^2_{L_2}. \tag{1.19}$$

取 $\varepsilon\cdot c\cdot 2^q\left(\int_\Omega |u|^{(q-2)\frac{m}{2}}dx\right)^{\frac{2}{m}} = \frac{1}{4}\lambda_1$, 则上式

$$c(\varepsilon)=c\left(\int_{\Omega}|u|^{(q-2)\frac{m}{2}}dx\right)^{2n/m(m-n)}.$$

那么由 (1.18), (1.19) 得出

$$\left|\int_{\Omega}\left(\int_0^1 \partial_j B_i dt\right)\eta^2(\Delta^h u_j)(\Delta^h u_i)dx\right|$$

$$\leqslant c\int_{\Omega}A_h\eta^2|\Delta^h u|^2dx+\frac{\lambda_1}{4}\int_{\Omega}|\nabla(\eta\Delta^h u)|^2dx$$

$$+c\left(\int_{\Omega}|u|^{(q-2)\frac{m}{2}}dx\right)^{\frac{2}{m-2}}\left(\int_{\Omega}|\eta\Delta^h u|^2dx\right).$$

这样与前面同样可知 (1.10) 成立

当 $n=p$ 时，可与上面类似地进行估计，但是由于 $u\in W^{1,p}$ 即可推出 $u\in L_q$, $q<+\infty$，故不必加类似于 (1.8) 或 (1.9) 的条件.

下面讨论当满足条件 (1.12) 时的情况. 选 R_1 充分小，使对任 $x_0\in\Omega$，当

$$B_{2R_1}(x_0)\subset\Omega,$$

有

$$c\cdot c_1\cdot 2^q\int_{B_{2R_1}(x_0)}|u|^{(q-2)\frac{n}{2}}dx\leqslant\frac{\lambda_1}{4},$$

其中，c 是 (1.4) 中的常数，c_1 是嵌入常数，即

$$\|w\|^2_{L_{\frac{2n}{n-2}}}\leqslant c_1\|\nabla w\|^2_{L_2},$$

其中 c_1 与 Ω 无关.

现在在 Ω 中任意取定一点 x_0，选 R 适当小，使 $B_{2R}(x_0)\subset\Omega$，且 $R\leqslant R_1$，取 $R<a$，把 $B_R(x_0)$ 作为 Ω'，而把 $B_{2R}(x_0)$ 当作前面讨论中的 Ω，选 η，使 η 在 $B_R(x_0)$ 中为 1，其余与前面同. 这样，把 (1.18) 中 m 换为 n，有

$$\int_{B_{2R}(x_0)}\left(\int_0^1 \partial_j B_i dt\right)\eta^2(\Delta^h u_j)(\Delta^h u_i)dx$$

$$\leqslant c\int_{B_{2R}(x_0)}A_h\eta^2|\Delta^h u|^2dx$$

$$+2^q\cdot c\left(\int_{B_{2R}(x_0)}|u|^{(q-2)\frac{n}{2}}dx\right)^{\frac{2}{n}}\left(\int_{\Omega}|w|^{\frac{2n}{n-2}}dx\right)^{\frac{n-2}{n}}$$

$$\leqslant c\int_{\Omega}A_h\eta^2|\Delta^h u|^2dx+\frac{\lambda_1}{4}\int_{B_{2R}(x_0)}|\nabla w|^2dx.$$

其余讨论类似. 于是有

$$\int_{B_R(x_0)}(1+|Du|^2)^{\frac{p-2}{2}}|D^2u|^2dx<+\infty.$$

由于 x_0 的任意性，即可得 (1.13).

注 1. 当 $p=2$, $q=\dfrac{2n}{n-2}$ 时，由于 $(q-2)\dfrac{n}{2}=\dfrac{2n}{n-2}$，故条件(1.12)，即 $u\in L_{(q-2)\frac{n}{2}}$ 已被 $u\in W^{1,2}$ 所蕴涵. 这样就无须条件 (1.12)，自然就有 $u\in W^{1,2}$.

例. 设 $N=1$, $n=3$ 时方程

$$-\Delta u = c' u^{q-1},\ x \in \Omega,\ \Omega \in R^3.$$

其中 $c' = \dfrac{2(q-4)}{(q-2)^2}$，此时，$p=2, q>6$(6 是临界指数)，我们知方程有解 $u = r^{-2/(q-2)}$，可以验证 $u \in W^{1,2} \cap L_q(\Omega)$，但 $u \bar{\in} W^{2,2}(\Omega)$。为了排除这个解，条件 $u \in L_{n(q-2)/2}$ 是最弱的。因上述解 $r^{-2/(q-2)} \in L_s(\Omega)$，$s < \dfrac{n(q-2)}{2}$，但 $r^{-2/(q-2)} \bar{\in} L_{n(q-2)/2}$。

二、边界正则性

本节设 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 属于 O^2 类，即 Ω 是严格 Lipschitz 区域，且曲面 $\partial\Omega$ 的方程局部可用坐标 $y_n = \omega(y')$，$y' = (y_1, \cdots, y_{n-1})$，$|y'| < R$，$\omega$ 的一阶导数是李普希兹连续的。

设 S 是 $\partial\Omega$ 中任一部分，经坐标变换可使 S 的方程变为 $y_n = 0$。记以 S 为部分边界且在 Ω 中的小邻域为 Ω_1，记 Ω' 为 Ω_1 内以 S 为部分边界的子区域，且 dist $(\Omega_1 \backslash S, \Omega' \backslash S) > 0$。下面只要证明在 Ω' 内有 $u \in W^{2,2}(\Omega')$，且

$$\int_{\Omega'} (1 + |Du|^2)^{\frac{p-2}{2}} |D^2 u|^2 dx < +\infty.$$

由于 S 的任意性，即得边界正则性。

此时经过坐标变换，Ω_1 和 Ω' 分别被映为 y 空间上半空间 $y_n > 0$ 的部分边界 $y_n = 0$ 上的两个邻域 D_1 和 D'。作 $\eta(y)$，使 $\eta(y) = 1$，当 $y \in D'$，在 D_1 外 $\eta = 0$，其余地方 η 在 0 与 1 之间，且 $|\nabla\eta| \leqslant \dfrac{c}{a}$。其中 $a = \dfrac{1}{2}\operatorname{dist}(S_1, S') > 0$。取 $h < a$，记

$$\Delta^h \tilde{u}_i = \Delta^h_\lambda \tilde{u}_i = \frac{\tilde{u}_i(y + h e_\lambda) - \tilde{u}_i(y)}{h},$$

其中 $\lambda = 1, \cdots, n-1$，e_λ 为 y_λ 方向单位向量，$\tilde{u}_i(y) = u_i(x(y))$。此时边界条件为

$$\tilde{u}_i(y) = \tilde{v}_i(y),\ y \in \partial D_1 \cap \{y_n = 0\}.$$

类似于第一节中的讨论，知

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y} \in W^{1,2}(D')$$

且

$$\int_{D'} (1 + |Du|^2)^{\frac{p-2}{2}} \left| D \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_\lambda} \right|^2 dy < +\infty, \tag{2.1}$$

其中 $\lambda = 1, \cdots, n-1$。下面证明

$$\int_{D'} (1 + |Du|^2)^{\frac{p-2}{2}} \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_n^2} \right| dy < +\infty. \tag{2.2}$$

经坐标变换后，方程 $\partial_\alpha A_i^\alpha = B_i$ 变为

$$\partial_{r_j^\beta} A_i^\alpha \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_\lambda \partial y_\mu} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\alpha} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_\beta} = B_i - \frac{\partial^2 y_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y_\mu}$$
$$- \partial_j A_i^\alpha \partial_\alpha u_j - \partial_\lambda A_i^\alpha \equiv B_i + B_i'.$$

把上式左端中 $\lambda=\mu=n$ 的项保留，其余项记为 $-B_i''$，移到右端，得

$$\sum_{\alpha,\beta,j}\partial_{r_j^\beta}A_i^\alpha\frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial y_n}{\partial x_\beta}\frac{\partial^2\tilde{u}_j}{\partial y_n^2}=B_i+B_i'+B_i''.$$

上式两边乘以 $\frac{\partial^2\tilde{u}_i}{\partial y_n^2}$，再对 i 求和，并利用 (1.5) 得

$$\sum_{i,\alpha}\lambda_1(1+|Du|^2)^{\frac{p-2}{2}}\left|\frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha}\right|^2\left|\frac{\partial^2\tilde{u}_i}{\partial y_n^2}\right|^2$$
$$\leqslant(B_i+B_i'+B_i'')\left|\frac{\partial^2\tilde{u}_i}{\partial y_n^2}\right|.$$

对 $(B_i'+B_i'')\frac{\partial^2\tilde{u}_i}{\partial y_n^2}$ 可以利用增长性条件和内插不等式知

$$\int_{D_1}(B_i'+B_i'')\frac{\partial^2\tilde{u}_i}{\partial y_n^2}\eta^2dy\leqslant\varepsilon\int_{D_1}(1+|Du|^2)^{\frac{p-2}{2}}\left|\frac{\partial^2\tilde{u}_i}{\partial y_n^2}\right|^2dy+c.$$

下面估计

$$\int_{D_1}\eta^2B_i\frac{\partial^2\tilde{u}_i}{\partial y_n^2}dy=\int_{\partial D_1\cap(y_n=0)}\eta^2B_i\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial y_n}dy'$$
$$+\int_{D_1}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial y_n}\left(2\eta\frac{\partial\eta}{\partial y_n}B_i+\eta^2\frac{\partial B_i}{\partial y_n}\right)dy. \tag{2.3}$$

我们知上式右端最后一项 $\int_{D_1}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial y_n}\eta^2\frac{\partial B_i}{\partial y_n}dy$ 中主要一项是 $\int_{D_1}\eta^2|\tilde{u}|^{q-2}\left|\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial y_n}\right|^2dy$，这一项已在前面估计过了，其余项利用内插不等式可以进行估计．而 (2.3) 式右端第一项有

$$\left|\int_{\partial D_1\cap(y_n=0)}\eta^2B_i\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial y_n}dy'\right|\leqslant c\int_{\partial D_1\cap(y_n=0)}[(1+|D\tilde{v}|^2)^{\frac{p}{2}}$$
$$+|D\tilde{v}||\tilde{v}|^{q-1}]dy'\leqslant c.$$

于是就得到了

定理 2. 若 A_i^α 和 B_i 以及问题 (1.6) 的弱解 u 满足定理 1 条件，且边界 $\partial\Omega\in O^2$，边值 $v(x)$ 也满足 (1.8) 或 (1.9)，$v\in W^{2,2}$，$(1+|Dv|^2)^{p/4}\in W^{1,2}(\Omega,R^N)$，且

$$v\in L_{(q-1)p(n-1)/((n-1)(p-1)+1)}(\partial\Omega,R^N),$$

则我们有 $u(x)\in W^{2,2}(\Omega,R^N)$，且

$$\int_\Omega(1+|Du|^2)^{\frac{p-2}{2}}|D^2u|^2dx<+\infty.$$

三、弱解的 Pohozaev 恒等式

本节讨论拟线性 Euler 方程组的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\partial_\alpha(F_{r_i^\alpha}(x,u,Du))=F_{u_i}(x,u,Du),x\in\Omega,i=1,\cdots,N,\\ u=0,\ x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{3.1}$$

设 $F(x,u,r)$ 满足下述条件

i) F 关于 x,u,r 二阶连续可微,且

$$|F_{u_iu_j}|\leqslant cV^{p-2}+c|u|^{q-2},$$

$$|F_{u_ix_j}|\leqslant cV^{p-1}+c|u|^{q-1},\begin{cases}\text{当 } n>p \text{ 时},\ q\geqslant\dfrac{np}{n-p},\\ \text{当 } n=p \text{ 时},\ p\leqslant q<+\infty,\end{cases}$$

$$|F_{r_i^\alpha r_j^\beta}|,|F_{r_i^\alpha u_j}|\leqslant cV^{p-2},|F_{r_i^\alpha x_h}|\leqslant cV^{p-1};$$

ii) 椭圆条件

$$\lambda_1V^{p-2}|\pi|^2\leqslant F_{r_i^\alpha r_j^\beta}(x,u,r)\pi_i^\alpha\pi_j^\beta,$$

上面 q,r,V 与第一节相同. 而

$$F_{u_i}=\frac{\partial F}{\partial u_i},\ F_{r_i^\alpha}=\frac{\partial F(x,u,r)}{\partial r_i^\alpha},\ F_{r_i^\alpha x_j}=\frac{\partial^2F(x,u,r)}{\partial r_i^\alpha\partial x_j}.$$

引理. 若 $u(x)$ 是问题(3.1)的弱解,且 $u(x)\in W^{2,2}(\Omega,R^N)$ 和

$$\int_\Omega(1+|Du|^2)^{\frac{p-2}{2}}|D^2u|^2dx<+\infty,$$

$F(x,u,r)$ 满足条件 i), 则下面积分恒等式成立:

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega}\langle x,\nu\rangle[F(x,0,Du)-F_{r_i^\alpha}(x,0,Du)\partial_\alpha u_i]ds\\&=\int_\Omega[nF(x,u,Du)-x_iF_{x_i}(x,u,Du)-(a+1)\partial_\alpha u_iF_{r_i^\alpha}(x,u,Du)\\&\quad-au_iF_{u_i}(x,u,Du)]dx,\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中 ν 是 $\partial\Omega$ 的外法方向.

证. 若 u 存在二阶广义导数,则由[4]知下式成立

$$\begin{aligned}&\partial_\alpha[x_\alpha F(x,u,Du)-(x_\beta\partial_\beta u_i+au_i)F_{r_i^\alpha}(x,u,Du)]\\&=nF(x,u,Du)+x_iF_{x_i}(x,u,Du)-(1+a)\partial_\alpha u^i\\&\quad\cdot F_{r_i^\alpha}(x,u,Du)-au_iF_{u_i}(x,u,Du).\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中 a 是任意常数, u 是(3.1)的弱解. 若(3.3)式两端都可积,则(3.2)成立. 而(3.3)右端可积性是容易验证的,为了证明(3.3)左端可积只要证明

$$[x_\alpha F(x,u,Du)-(x_\beta\partial_\beta u_i+au_i)F_{r_i^\alpha}(x,u,Du)]\in W^{1,1}(\Omega,R^N).$$

为此只要证明

$$\partial_\beta u_iF_{r_i^\alpha}(x,u,Du)\in W^{1,1}(\Omega,R^N).\tag{3.4}$$

其他几项容易看出是 $\in W^{1,1}$ 的. 为证(3.4)只要证

$$|D^2u||F_{r_i^\alpha}|\ \text{和}\ |Du|F_{r_i^\alpha r_j^\beta}||D^2u|\in L_1.\tag{3.5}$$

我们知

$$\begin{aligned}&F_{r_i^\alpha}(x,u,r)-F_{r_i^\alpha}(x,u,0)\\&=\int_0^1\frac{dF_{r_i^\alpha}(x,u,tr)}{dt}dt=\int_0^1F_{r_i^\alpha r_j^\beta}(x,u,tr)r_j^\beta dt.\end{aligned}$$

由条件 i) 和内插不等式知

$$|F_{r_i^\alpha}(x,u,r)|\leqslant c+c|u|^{p-1}+c|r|^{p-1},$$

由 Hölder 不等式知

$$\int_{\Omega}|Du|^{p-1}|D^2u|dx \leqslant \left(\int_{\Omega}|Du|^{p-2}|D^2u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|Du|^p dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

因此 (3.5) 成立. 因而得到了

定理 3. 若 Ω 的边界 $\partial\Omega\in C^2$, $F(x,u,r)$ 满足条件 i) 和 ii), 则 (3.1) 的弱解 $u(x)$ 对 (3.2) 式成立.

参　考　文　献

[1] Похожаеь, С. И., О Собственных функциях уравнения. $\Delta u+\lambda f(u)=0$. Д.А. Н. СССР, **165**: 1(1965), 33—36.

[2] 沈尧天、邓耀华, 高阶拟线性椭圆型方程的非平凡解, 系统科学与数学, **5**: 4(1985), 303—312.

[3] 邓耀华、沈尧天、张维强、顾永耕, 半线性高阶椭圆型方程非平凡解的存在性与不存在性, 系统科学与数学, **6**: 2(1986), 90—100.

[4] Pucci, P. & Serrin, J., A general variational identity, *Indiana University J.* **35** (1986) 681—702.

[5] 徐海祥, $W_0^{1,p}(\Omega,R^N)$ 中二阶拟线性椭圆型方程组非零解的存在性与不存在性(待发表).

[6] 沈尧天、马汝念, Non-existence results for quasi linear elliptic equations in unbounded domains, 数学进展, **18**(1989), 245—246.

[7] O. A. 拉迪任斯卡娅, H. H. 乌拉利采娃著, 严子谦等译, 线性和拟线性椭圆型方程, 科学出版社, 北京, 1987.

[8] Morrey, C. B., Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Spring-Verlag, Berlin, New-York.

REGULARITY AND THE POHOZAEV IDENTITY FOR THE WEAK SOLUTIONS OF QUASILINEAR ELLIPTIC SYTEMS

Shen Yao-Tian

(Department of Applied Mathematics South China University of Technology, Guangzhou 510461)

Wang Tian-Wei

(Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhon 510631)

ABSTRACT

First the regularity is proved for the $W^{1,p}\cap L_q$-weak solutions of the elliptic systems in divergence form with critical and super-critical Sobolev exponent, that is, the weak solution actually belongs to $W^{2,2}$, and $(1+|Du|^2)^{(p-1)/2}|D^2u|^2$ belongs to L_1. Then, the Pohozaev identity is obtained for the weak solutions of the elliptic Euler systems involving critical and super-critical Sobolev exponent.