系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
25(2) (2005, 4), 160–169

分数次多线性交换子在 Herz 空间上的有界性*

周 伟 军 马 柏 林
(湖南大学数学与计量经济学院, 长沙 410082)
徐 景 实
(湖南大学数学与计量经济学院, 长沙 410082; 湖南师范大学数学系, 长沙 410081)

摘要 本文先建立了一个向量值多线性交换子的有界性, 并由它证明了分数次极大多线性交换子在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(p>1)$ 及 Herz 空间上的有界性, 借助于后者, 我们证明了一类多线性交换子在 Herz 空间上的有界性.

关键词 分数次积分算子, 多线性交换子, Herz 空间, $A(p,q)$ 权, $BMO(\mathbb{R}^n)$, 向量值函数.

MR(2000) 主题分类号 42B35, 42B15, 42B25

1 引言及主要结果

交换子的研究由来已久, Coifman, Rochberg 和 Weiss 在 [1] 中引入了交换子 $T_bf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}(b(x)-b(y))K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$, 这里 K 是满足标准 Calderon-Zygmund 估计的核, $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$. [1] 中主要结果是证明了 T_b 是 $L^p(\mathbb{R}^n)(1<p<\infty)$ 有界的. 交换子的一个自然推广便是高阶交换子 [2], $T_b^m=\int_{\mathbb{R}^n}(b(x)-b(y))^mK(x,y)f(y)\mathrm{d}y$. Perez 在 [2] 中证明了对任意的 $0<p<\infty,\omega\in A_\infty$, 存在一个常数 C, 使得 $\int_{\mathbb{R}^n}|T_b^mf(x)|^p\omega(x)\mathrm{d}x\le C\|b\|_{BMO}^{mp}\int_{\mathbb{R}^n}(M^{m+1}f(x))^p\omega(x)\mathrm{d}x$. 2002 年, Perez 和 Trujillo-Gonealee 在 [3] 中引入了一类包含高阶交换子的多线性交换子. 设 $\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$ 定义多线性交换子 $T_{\vec{b}}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\prod\limits_{j=1}^{m}(b_j(x)-b_j(y))K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$. 如果 $b_i\in BMO(\mathbb{R}^n)$, $i=1,2,\cdots,m$. Perez 和 Trujillo-Gonealee 在 [3] 中证明了 $T_{\vec{b}}$ 也是 $L^p(\mathbb{R}^n)(1<p<\infty)$ 有界的.

受 [3] 的影响, 本文的作者在 [4] 中引入了分数次多线性交换子. 设 $I_lf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-l}}\mathrm{d}y$ 是标准的分数次积分算子, 其中 $0<l<n$, 设 $\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$, 定义由 $\vec{b}$ 和 I_l 生成的多线性交换子 $[\vec{b},I_l]f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}(b_j(x)-b_j(y))f(y)}{|x-y|^{n-l}}\mathrm{d}y$. 本文的作者在 [4] 中证明了若 $b_i\in BMO(\mathbb{R}^n), i=1,2,\cdots,m$. 则 $[\vec{b},I_l]$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 有界的, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{l}{n},1<p<\frac{l}{n}$. 一个自然的问题就

* 湖南省教育厅资助科研项目 (02C067) 资助课题.
收稿日期: 2003-04-15.

是上面的结论是否在 Herz 空间上成立．答案是肯定的．事实上，对一类包含 $[\vec{b}, I_l]$ 的多线性交换子，我们证明了上述结论是成立的． Herz 空间的研究由来已久 [5], 近些年来吸引了一些人的研究；可见 [6–9] 等等 (仅列出与本文有关的文献).

本文利用 [9,10] 的方法，先证明了一个向量值多线性交换子的结果，并由它证明了分数次极大多线性交换子在 L^p 和 Herz 空间上的有界性，再由后者证明了分数次多线性交换子在 Herz 空间上的有界性．在叙述我们的结果之前，我们先复述一些定义．

设 $B_k=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\le 2^k\}, A_k=B_k\backslash B_{k-1}, k\in Z, \chi_k=\chi_{A_k}, k\in Z$, 其中 χ_E 是集合 E 的特征函数．

定义 1 设 $\alpha\in R, 0<p<\infty, 0<q<\infty$, 定义齐次 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ 为

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}=\Big\{f\in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}):\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}}=\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p}\|f\chi_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p\Big\}^{\frac{1}{p}}<\infty\Big\}.$$

显然， $\dot{K}_p^{0,p}(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$ 对任意的 $0<p<\infty$.

定义 2 我们称实数 $\mathbb{R}$ 上的一个偏序 Banach 空间 F 是一个 Banach 格，如果

(i) $x\le y\Rightarrow x+z\le y+z, \forall x,y,z\in F$,

(ii) $ax\ge 0$,对每个$x\ge 0$, $x\in F$ 和 $a\ge 0$, $a\in R$,

(iii) 对每一个$x,y\in F$,存在最小上界 (l.u.b.) 和最大下界 (g.l.b.).

定义 $|x|=\text{l.u.b.}\{x,-x\}$, 如果 $|x|\le|y|$, 则 $\|x\|\le\|y\|$.

定义 3 设 ν 是一个非负函数，称函数 $b\in BMO(\nu)$ 如果对任意方体 Q, $\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^n}|b(y)-b_Q|\mathrm{d}y<C\int_Q\nu(x)\mathrm{d}x$, 这里 $b_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q b(y)\mathrm{d}y$ 为 b 在 Q 上的平均. 特别, 若 $\nu\equiv 1$, 则 $BMO(\nu)$ 为 $BMO(\mathbb{R}^n)$, 即有界平均振荡函数空间.

定义 4 设 $\alpha(x)$ 是一个非负函数，我们称 $\alpha\in A(p,q), 1\le p\le\infty, 1\le q\le\infty$, 如果

$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q\alpha(x)^{-p'}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q\alpha(x)^q\Big)^{\frac{1}{q}}\le C<\infty.$$

对任意方体 Q 成立，其中 C 不依赖 Q.

我们还需要一些经典的极大算子 (见文献 [3,8]), 记 M 为 Hardy-Littlewood 极大函数，对 $\delta>0$, 我们记

$$M_\delta f(x)=(M(|f|^\delta)(x))^{\frac{1}{\delta}}=(\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|^\delta\mathrm{d}y)^{\frac{1}{\delta}},$$

$$f^{\#}(x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)-f_Q|\mathrm{d}y$$

为尖锐极大算子，这里 $f_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\mathrm{d}x$ 为 f 在 Q 上的平均．

定义极大函数 $f_{\alpha,r}^*(x)=\sup\limits_{x\in Q}(\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha r}{n}}}\int_Q|f(y)|^r\mathrm{d}y)^{\frac{1}{r}}=\sup\limits_{x\in Q}|Q|^{\frac{\alpha}{n}}(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|^r\mathrm{d}y)^{\frac{1}{r}}$.

对任意正整数 m, 当 $1\le j\le m$, 我们记， $C_j^m=\{\sigma:\sigma=\{\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(j)\}$ 为 $\{1,2,\cdots,m\}$ 中含 j 个不同元素的集合$\}$. 对 $\sigma\in C_j^m$, 我们记 $\sigma'=\{1,2,\cdots,m\}\backslash\sigma$. 对 $1\le j\le m$ 和 $\sigma=\{\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(j)\}\in C_j^m$, 我们记 $\vec{b}_\sigma=(b_{\sigma(1)},b_{\sigma(2)},\cdots,b_{\sigma(j)})$, $b_\sigma=b_{\sigma(1)}b_{\sigma(2)}\cdots b_{\sigma(j)}$. 记

$$\|\vec{b}_\sigma\|_{BMO}=\|b_{\sigma(1)}\|_{BMO}\cdots\|b_{\sigma(j)}\|_{BMO}.$$

在本文中字母 C 表示正常数，但在不同的地方它可能是不同的．本文中，我们可设 $\|b_i\|_{BMO}=1, i=1.2,\cdots,m$. p' 表示 p 的共轭指标，即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, 下面是我们的主要结果．

定理 1 设 F 是一个 Banach 格， $W(f)$ 是 L^p 到 L^q_F 有界的线性算子， $1<p<\lambda=\frac{n}{l}$, $0<l<n$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{p}-\frac{l}{n}$, $1\le r<p<\lambda$, 假设存在一个 F 值核 $w(x,y)$ 满足

(i) 对每一个 $f\in C_0^\infty$, $W(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}w(x,y)f(y)\mathrm{d}y$ 成立；

(ii) 对任意的 $x,y\in\mathbb{R}^n$, $w(x,y)\ge 0$;

(iii) $(\int_{R<|y-y_0|<2R}\|w(x,y)-w(z,y)\|^{r'}\mathrm{d}y)^{\frac{1}{r'}}\le CR^{-\frac{n}{r(\frac{\lambda}{r})'}}\frac{|x-z|}{R}$; 设 $b_i\in BMO(\mathbb{R}^n)$, $i=1,2,\cdots,m$. 对 $f\in C_0^\infty$, 定义多线性交换子

$$W_{\vec{b}}(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}w(x,y)|\prod_{j=1}^m(b_j(x)-b_j(y))||f(y)|\mathrm{d}y,$$

则 $W_{\vec{b}}$ 是从 L^p 到 L^q_F 有界.

定理 2 设 $\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$, $b_i\in BMO(\mathbb{R}^n), i=1,2,\cdots,m$. 定义

$$M_{\vec{b}}f(x)=\sup_{x\in Q}|Q|^{-\frac{1}{\lambda'}}\int_Q\prod_{j=1}^m|b_j(x)-b_j(y)||f(y)|\mathrm{d}y,$$

其中 $1<p<\lambda=\frac{n}{l}$, $0<l<n$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{p}-\frac{l}{n}$, 则 $M_{\vec{b}}$ 是从 L^p 到 L^q 有界.

定理 3 设 $\vec{b}$, $M_{\vec{b}}$ 与定理 2 中的相同， $1<q_1<\lambda=\frac{n}{l}$, $0<l<n$, $\frac{1}{q_2}=\frac{1}{q_1}-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{q_1}-\frac{l}{n}, -\frac{n}{q_1}+\frac{n}{\lambda}<\alpha<n(1-\frac{1}{q_1})$, $0<p_1\le p_2\le\infty$, 则 $M_{\vec{b}}$ 是从 $\dot{K}^{\alpha,p_1}_{q_1}$ 到 $\dot{K}^{\alpha,p_2}_{q_2}$ 有界.

定理 4 设 $b_i\in BMO(\mathbb{R}^n)$, $i=1,2,\cdots,m$. 假设线性算子 T_l 满足

(i) $|T_lf(x)|\le C|x|^{-(n-l)}\|f\|_{L^1}$, 当 $f\in L^1, \mathrm{supp}\ f\subset A_k$, 及 $|x|\ge 2^{k+1}$, $k\in\mathbb{Z}$.

(ii) $|T_lf(x)|\le C2^{-k(n-l)}\|f\|_{L^1}$, 当 $f\in L^1, \mathrm{supp}\ f\subset A_k$ 及 $|x|\le 2^{k-2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

$1<q_1<\lambda=\frac{n}{l}$, $0<l<n$, $\frac{1}{q_2}=\frac{1}{q_1}-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{q_1}-\frac{l}{n}, -\frac{n}{q_1}+\frac{n}{\lambda}<\alpha<n(1-\frac{1}{q_1})$, $0<p_1\le p_2\le\infty$, 定义多线性交换子 $T_{l\vec{b}}(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\prod\limits_{j=1}^m(b_j(x)-b_j(y))k(x,y)f(y)\mathrm{d}y$, 其中 $k(x,y)$ 是 T_l 的积分核. 若 $T_{l,\vec{b}}$ 是从 L^{q_1} 到 L^{q_2} 有界，则 $T_{l,\vec{b}}$ 是从 $\dot{K}^{\alpha,p_1}_{q_1}$ 到 $\dot{K}^{\alpha,p_2}_{q_2}$ 有界.

本文将在第 2 节证明定理 1, 定理 2, 第 3 节证明定理 3, 定理 4.

2 定理 1, 定理 2 的证明

为证明定理 1, 我们先给出几个引理．下面的引理 2.1, 2.2 来自 [10].

引理 2.1(外插定理) 设 T 是一个次线性算子， $1\le v<\infty$, $1<r<\infty$, $r<p<\lambda\le\infty$, $v<\frac{(\frac{q}{r})}{(\frac{\lambda}{r})'}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda}$, 设 $\nu(x)\ge 0$, 并且假设对任意的 $\omega,\nu\omega\in A(((\frac{\lambda}{r})'v)',\infty)$, 均有 $\|\omega Tf\|_\infty\le C_\omega\|\omega f\|_\lambda$. 则如果 $\omega^r,(\nu\omega)^r\in A(((\frac{p}{r})'t)',\frac{q}{r})$, 这里 t 满足 $(\frac{q}{r})^{-1}=(v(\frac{\lambda}{r})')^{-1}-(t(\frac{p}{r})')^{-1}$, 有 $\|\omega Tf\|_q\le C_\omega\|\omega\|_p$.

引理 2.2 设 $w(x,y)$ 与定理 1 中的相同， Q 是一个方体， $\mathrm{supp}f\subset\mathbb{R}^n\backslash 4Q$, 设 $\alpha^r,\beta^r\in A(\frac{\lambda}{r},\infty)$, $a\in BMO(\nu)$, $\alpha\beta^{-1}=\nu^m$, $1\le r<\lambda<\infty$, 若 $x,z\in Q$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\|w(x,y)-w(z,y)\||a(y)-a_Q|^m|f(y)|\mathrm{d}y\le C\inf_Q\beta^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^\lambda\alpha^\lambda\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

引理 2.3[9] 设 $r<p<\frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$, 则 $\|f^*_{\alpha,r}\|_q\le C\|f\|_p$.

定理 1 的证明 我们的证明将分三步.

(i) 设 $x_0\in Q$, $f\ge 0$, 估计 $W_{\vec{b}}f^{\#}(x_0)$,

$$\begin{aligned}
W_{\vec{b}}f(x)&=\int_{\mathbb{R}^n}w(x,y)\Big|\prod_{j=1}^m(b_j(x)-\lambda_j+\lambda_j-b_j(y))\Big|f(y)\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}w(x,y)\Big|\sum_{j=0}^m\sum_{\sigma\in C_j^m}(-1)^{m-j}(b(x)-\vec{\lambda})_\sigma(b(y)-\vec{\lambda})_{\sigma'}\Big|f(y)\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}w(x,y)\Big|\prod_{j=1}^m(b_j(x)-\lambda_j)+(-1)^m\prod_{j=1}^m(b_j(y)-\lambda_j)\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}C_{m,j}(b(x)-\vec{\lambda})_\sigma(b(y)-\vec{\lambda})_{\sigma'}\Big|f(y)\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q\|W_{\vec{b}}f(x)-C_Q\|\mathrm{d}x&\le C\frac{1}{|Q|}\int_Q\Big|\prod_{j=1}^m(b_j(x)-\lambda_j)\Big|\|Wf(x)\|\mathrm{d}x\\
&\quad+C\frac{1}{|Q|}\int_Q\Big\|W\prod_{j=1}^m(b_j(x)-\lambda_j)f(x)-C_Q\Big\|\mathrm{d}x\\
&\quad+C\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\frac{1}{|Q|}\int_Q|(b(x)-\vec{\lambda})_\sigma|\|W_{\vec{b}_{\sigma'}}f(x)\|\mathrm{d}x\\
&=I+II+III.
\end{aligned}$$

取 $\lambda_i=(b_i)_Q, i=1,2,\cdots,m$, 选取 $1<r_1<q$, 则

$$\begin{aligned}
I&\le C\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q\Big|\prod_{j=1}^m(b_j(x)-\lambda_j)\Big|^{r_1'}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{r_1'}}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|Wf(x)\|^{r_1}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{r_1}}\\
&\le C\prod_{j=1}^m\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q|(b_j(x)-\lambda_j)|^{mr_1'}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{mr_1'}}M_{r_1}(\|Wf(x)\|)(x_0)\\
&\le CM_{r_1}(\|Wf(x)\|)(x_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
III&\le C\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q|(b(x)-\vec{\lambda})_\sigma|^{r_1'}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{r_1'}}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|W_{\vec{b}_{\sigma'}}f(x)\|^{r_1}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{r_1}}\\
&\le C\sum_{j=1}^m\sum_{\sigma\in C_j^m}M_{r_1}(\|W_{\vec{b}_{\sigma'}}f\|)(x_0),
\end{aligned}$$

对 II, 令 $f=f_1+f_2, f_1=f\chi_{4Q}$, 则

$$\begin{aligned}II&\le C\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q\Big\|W\prod_{j=1}^m(b_j(x)-\lambda_j)|f_1(x)\Big\|\mathrm{d}x\Big)\\&+C\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q\Big\|W\prod_{j=1}^m(b_j(x)-\lambda_j)f_2(x)-C_Q\Big\|\mathrm{d}x\Big)\\&=IV+V.\end{aligned}$$

对 IV, 选取 $p_1<p_2<p$, $\frac{1}{q_i}=\frac{1}{p_i}-\frac{l}{n}$, $i=1,2$, 则由 Hölder 不等式及 W 的有界性，有

$$\begin{aligned}IV&\le C\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q\Big\|W\prod_{j=1}^m(b_j(x)-\lambda_j)f_1(x)\Big\|^{q_1}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q_1}}\\&\le C|Q|^{-\frac{1}{q_1}}\Big(\int_{4Q}\Big|\prod_{j=1}^m(b_j(x)-\lambda_j)f_1(x)\Big|^{p_1}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p_1}}\\&\le C|Q|^{-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{p_1}}\Big(\frac{1}{|4Q|}\int_{4Q}\Big|\prod_{j=1}^m(b_j(x)-\lambda_j)f_1(x)\Big|^{p_1}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p_1}}\\&\le C|Q|^{\frac{l}{n}}\Big(\frac{1}{|4Q|}\int_{4Q}\Big|\prod_{j=1}^m(b_j(x)-\lambda_j)\Big|^{p_1(\frac{p_2}{p_1})'}\mathrm{d}x\Big)^{(1-\frac{p_1}{p_2})\frac{1}{p_1}}\Big(\frac{1}{|4Q|}\int_{4Q}|f(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p_2}}\\&\le C|Q|^{\frac{l}{n}}\Big(\frac{1}{|4Q|}\int_{4Q}f(x)^{p_2}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p_2}}\\&\le Cf^*_{\alpha,p_2}(x_0).\end{aligned}$$

综上估计，我们已经证明了存在 $1<r_1<q$, $1<p_2<p$, 使得

$$W_{\vec{b}}f^{\#}(x_0)\le C\sum_{j=1}^m\sum_{\sigma\in C_j^m}M_{r_1}(\|W_{\vec{b}_{\sigma'}}f\|)(x_0)+Cf^*_{\alpha,p_2}(x_0)+Tf(x_0).$$

其中 $Tf(x_0)=C\sup\limits_{x_0\in Q}(\frac{1}{|Q|}\int_Q\|W(\prod\limits_{j=1}^m(b_j-\lambda_j)f_2)(x)-C_Q\|\mathrm{d}x)$.

(ii) 我们准备利用外插定理处理 $Tf(x_0)$, 为此，我们先设 $\alpha\beta^{-1}=\nu^m$, $b_i\in BMO(\nu)$, $i=1,2,\cdots,m$, $\alpha^r,\beta^r\in A(((\frac{\lambda}{r})'v)',\infty)$, $v>1$, 取 $C_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q(\int_{\mathbb{R}^n}w(z,y)\prod\limits_{j=1}^m(b_j-\lambda_j)|f_2(y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}z$. 由 Hölder 不等式及引理 2.2, 有

$$\begin{aligned}V&\le C\frac{1}{|Q|}\int_Q\Big[\frac{1}{|Q|}\int_Q\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\|w(x,y)-w(z,y)\|\prod_{j=1}^m(b_j(y)-\lambda_j)f_2(y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z\Big]\mathrm{d}x\\&\le C\frac{1}{|Q|}\int_Q\Big[\frac{1}{|Q|}\int_Q\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\|w(x,y)-w(z,y)\|\prod_{j=1}^m(b_j(y)-\lambda_j)f_2(y)\mathrm{d}y\Big)^m\mathrm{d}z\Big]^{\frac{1}{m}}\mathrm{d}x\\&\le C\frac{1}{|Q|}\int_Q[\frac{1}{|Q|}\int_Q\prod_{j=1}^m\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\|w(x,y)-w(z,y)\||(b_j(y)-\lambda_j)|^mf_2(y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z\Big]^{\frac{1}{m}}\mathrm{d}x\\&\le C\inf_Q\beta^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^\lambda\alpha(x)^\lambda\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{\lambda}}.\end{aligned}$$

因而有 $\|\beta T(f)\|_\infty \le C(\int_{\mathbb{R}^n} f^\lambda\alpha^\lambda \mathrm{d}x)^{\frac{1}{\lambda}}$. 令 $T_0(f)=T(f\nu^{-m})$, 则当 $\beta^r,(\nu^m\beta)^r\in A(((\frac{\lambda}{r})'v)',\infty)$, 便有

$$\|\beta T_0(f)\|_\infty=\|\beta T(f\nu^{-m})\|_\infty\le C\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f^\lambda\nu^{-m\lambda}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{\lambda}}\le C\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f^\lambda\beta^\lambda\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

由引理 2.1, 取 $\nu\equiv\alpha\equiv\beta\equiv 1$, 便有

$$\|T_0(f)\|_q=\|T(f)\|_q\le C\|f\|_p.$$

现用归纳法证明 $\|W_{\vec b}(f)^\#\|_q\le C\|f\|_p$. 对 $m=1$, 由 $W_{\vec b}(f)^\#$ 的估计，及 W 的有界性和引理 2.3, 有

$$\begin{aligned}\|W_{\vec b}(f)^\#\|_q&\le C\|f^*_{\alpha,p_2}\|_q+\|Tf\|_q+\|M_{r_1}(\|Wf\|)\|_q\\&\le C\|f\|_p+C\|Wf\|_q\le C\|f\|_p.\end{aligned}$$

假设我们要证的结论对 $m-1$ 成立，则由 $W_{\vec b}f^\#$ 的估计，有

$$\|W_{\vec b}(f)^\#\|_q\le C\|f\|_p+C\sum_{j=1}^m\sum_{\sigma\in C_j^m}\|M_{r_1}(\|W_{\vec b_{\sigma'}}f\|)\|_q\le C\|f\|_p.$$

(iii) 我们利用尖锐极大函数理论证明定理 1, 为此我们只需证明, 对 $f\in C_0^\infty$, $suppf\subset Q$, 存在一个充分小的正数 $\varepsilon>0$, 使得 $\int_Q\|W_{\vec b}f(x)\|^{1+\varepsilon}\mathrm{d}x<\infty$.

我们只证明 $m=1$ 时，上结论成立，对 $m>1$, 可用归纳法证得. 当 $m=1$ 时我们记 $\vec b=b$, 则

$$\|W_bf(x)\|\le C|b(x)-\lambda|\|Wf(x)\|+\|W((b-\lambda)f)(x)\|.$$

取 $\lambda=b_Q$, 则由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\int_Q\|W_bf(x)\|^{1+\varepsilon}\mathrm{d}x&\le C\Big(\int_Q|b(x)-\lambda|^{(1+\varepsilon)s}\mathrm{d}x\Big)^{\frac1s}\Big(\int_Q\|Wf(x)\|^{(1+\varepsilon)s'}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{s'}}\\&\quad+|Q|^{\frac1s}(\int_Q\|W(b-\lambda)f(x)\|^{(1+\varepsilon)s'}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{s'}}\\&=A_1+A_2.\end{aligned}$$

我们选取 ε,s, 使得 $\frac{1}{(1+\varepsilon)s'}=\frac{1}{1+\varepsilon}-\frac{l}{n}$, 则由 W 的有界性，有

$$A_1\le C|Q|^{\frac1s}\int_Q|f(x)|^{1+\varepsilon}\mathrm{d}x<\infty.$$

$$\begin{aligned}A_2&\le C|Q|^{\frac1s}\Big(\int_Q|(b(x)-\lambda)f(x)|^{(1+\varepsilon)}\mathrm{d}x\Big)\\&\le C|Q|^{\frac1s+1}\Big(\int_Q|(b(x)-\lambda)|^{(1+\varepsilon)s_1'}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{s_1'}}|Q|^{-\frac{1}{s_1}}\Big(\int_Q|f(x)|^{(1+\varepsilon)s_1}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{s_1}}.\end{aligned}$$

选取 s_1,ε, 使得 $(1+\varepsilon)s_1$ 充分靠近 1, 则 $A_2<\infty$, 由尖锐极大函数理论，我们有

$$\int_Q\|W_{\vec b}f(x)\|^q\mathrm{d}x\le C\int_Q\|W_{\vec b}f^\#(x)\|^q\mathrm{d}x\le C\int_{\mathbb{R}^n}\|W_{\vec b}f^\#(x)\|^q\mathrm{d}x\le C\|f\|_p^q.$$

令 $Q\to\mathbb{R}^n$, 便证明了定理 1.

定理 2 的证明 设 $0\le\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n)$, 满足 $|\varphi(x-y)-\varphi(x)|\le\frac{C|y|}{|x|^{n+1}}$, 当 $|x|>2|y|$ 时, 令 $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-\frac{n}{\lambda}}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, 这里 $\lambda=\frac{n}{l}$. 则算子 $M_\varphi(f)(x)=(f*\varphi_\varepsilon(x))_{\varepsilon>0}$ 是 L^p 到 L^q 的有界线性算子 (见 [12]), 易证 $w(x,y)=\varphi_\varepsilon(|x-y|)$ 满足定理 1 的假设 [10], 则如果 $b_i\in BMO(\mathbb{R}^n)$, $i=1,2,\cdots,\ m$ 定义

$$M_{\varphi,\vec{b}}f(x)=\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m|b_j(x)-b_j(y)|\varphi_\varepsilon(|x-y|)f(y)\mathrm{d}y\Big)_{\varepsilon>0}.$$

则由定理 1, $M_{\varphi,\vec{b}}$ 是从 L^p 到 $L^q_{l^\infty}$ 有界, 也说明算子 $\sup\limits_{\varepsilon>0}\big(\int_{\mathbb{R}^n}\prod\limits_{j=1}^m|b_j(x)-b_j(y)|\varphi_\varepsilon(|x-y|)f(y)\mathrm{d}y\big)$ 是从 L^p 到 L^q 有界. 特别取 $\chi_{|x|\le1}\le\varphi$, 则我们有

$$M_{\vec{b}}f(x)<\sup_{\varepsilon>0}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m|b_j(x)-b_j(y)|\varphi_\varepsilon(|x-y|)f(y)\mathrm{d}y\Big).$$

因而有 $\|M_{\vec{b}}f\|_q\le C\|f\|_p$. 定理 2 证毕.

3 定理 3, 定理 4 的证明

定理 3 的证明 显然, 若 $p_1<p_2$, 则 $\dot{K}^{\alpha,p_1}_{q_2}\subset\dot{K}^{\alpha,p_2}_{q_2}$, 我们只需证明 $p_1=p_2$ 时的情形, 则写 $f=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}f\chi_j=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}f_j$, 我们有

$$\begin{aligned}\|M_{\vec{b}}f\|_{\dot{K}^{\alpha,p_1}_{q_2}}=&\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p_1}\|\chi_k(M_{\vec{b}}f)\|^{p_1}_{L^{q_2}}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}\\ \le&C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p_1}\Big\|\chi_kM_{\vec{b}}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-3}f_j\Big)\Big\|^{p_1}_{L^{q_2}}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}\\ &+C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p_1}\Big\|\chi_kM_{\vec{b}}\Big(\sum_{j=k-2}^{k+2}f_j\Big)\Big\|^{p_1}_{L^{q_2}}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}\\ &+C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p_1}\Big\|\chi_kM_{\vec{b}}\Big(\sum_{j=k+3}^{\infty}f_j\Big)\Big\|^{p_1}_{L^{q_2}}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}\\ =&E_1+E_2+E_3,\end{aligned}$$

对 E_2, 由定理 2, $M_{\vec{b}}$ 是从 L^{q_1} 到 L^{q_2} 有界. 我们有

$$E_2\le C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p_1}\sum_{j=k-2}^{k+2}\|f_j\|^{p_1}_{L^{q_1}}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}=C\|f\|_{\dot{K}^{\alpha,p_1}_{q_1}},$$

对 E_1, 令 $\lambda_i=(b_i)_{B_j}$, $i=1,2,\cdots,m$. 由于 $j\le k-3$, 有

$$\begin{aligned}
\|\chi_k M_{\vec{b}} f_j\| &\le C2^{-\frac{kn}{\lambda'}}\Big[\int_{A_k}\Big(\int_{A_j}\prod_{j=1}^m|b_j(x)-b_j(y)||f_j(y)|\mathrm{d}y\Big)^{q_2}\mathrm{d}x\Big]^{\frac{1}{q_2}}\\
&\le C2^{-\frac{kn}{\lambda'}}\sum_{i=0}^m\sum_{\sigma\in C_j^m}\Big(\int_{A_k}|(b(x)-\vec{\lambda})_\sigma|^{q_2}\Big)^{\frac{1}{q_2}}\Big(\int_{A_j}\prod_{j=1}^m|(b(y)-\vec{\lambda})_{\sigma'}||f_j(y)|\mathrm{d}y\Big)\\
&\le C2^{-\frac{kn}{\lambda'}}\sum_{i=0}^m\sum_{\sigma\in C_j^m}\|f_j\|_{q_1}\Big(\int_{A_k}|(b(x)-\vec{\lambda})_\sigma|^{q_2}\Big)^{\frac{1}{q_2}}\Big(\int_{A_j}\prod_{j=1}^m|(b(y)-\vec{\lambda})_{\sigma'}|^{q_1'}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q_1'}}\\
&\le C2^{-\frac{kn}{\lambda'}}|B_j|^{\frac{1}{q_1'}}|B_k|^{\frac{1}{q_2}}\|f_j\|_{q_1}(k-j)^m\\
&\le C(k-j)^m2^{(j-k)n(1-\frac{1}{q_1})}\|f_j\|_{q_1}.
\end{aligned}$$

则由于 $\alpha<n(1-\frac{1}{q_1})$, 有

$$\begin{aligned}
E_1 &\le C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-3}2^{j\alpha}\|f_j\|_{q_1}(k-j)^m2^{(j-k)n((1-\frac{1}{q_1}-\alpha))}\Big)^{p_1}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}\\
&\le C\Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|f_j\|_{q_1}^{p_1}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}=C\|f\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_1}}.
\end{aligned}$$

对 E_3, 由于 $j\ge k+3,\alpha>-\frac{n}{q_2}$, 类似与 E_1 的估计，有

$$\|\chi_k M_{\vec{b}} f_j\|_{q_2}\le C(j-k)^m2^{(k-j)\frac{n}{q_2}}\|f_j\|_{q_1}.$$

则

$$\begin{aligned}
E_3 &\le C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{j=k+3}^{\infty}2^{j\alpha}\|f_j\|_{q_1}(k-j)^m2^{(k-j)(\alpha+\frac{n}{q_2})}\Big)^{p_1}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}\\
&\le C\Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|f_j\|_{q_1}^{p_1}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}=C\|f\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_1}}.
\end{aligned}$$

定理 3 证毕.

为证明定理 4, 我们需要下面的引理.

引理 4.1[9] 设 $\alpha\in\mathbb{R}$, $1\le p$, $q<\infty$, 则 $f\in\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $|\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x|<\infty$, 对每一个 $g\in\dot{K}_{q'}^{-\alpha,p'}(\mathbb{R}^n)$, 并且 $\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}=\sup\{|\int f(x)g(x)\mathrm{d}x|:\|g\|_{\dot{K}_{q'}^{-\alpha,p'}(\mathbb{R}^n)}\le 1\}$.

定理 4 的证明 我们只需证明 $p_1=p_2$ 的情形. 则写 $f=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}f\chi_j=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}f_j$, 我们有

$$\begin{aligned}
\|T_{l,\vec{b}}f\|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p_1}} &=\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p_1}\|\chi_k(T_{l,\vec{b}}f)\|_{L^{q_2}}^{p_1}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}\\
&\le C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p_1}\Big\|\chi_kT_{l,\vec{b}}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-3}f_j\Big)\Big\|_{L^{q_2}}^{p_1}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p_1}\Big\|\chi_k T_{l,\vec{b}}\Big(\sum_{j=k-2}^{k+2}f_j\Big)\Big\|_{L^{q_2}}^{p_1}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}\\
&+C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p_1}\Big\|\chi_k T_{l,\vec{b}}\Big(\sum_{j=k+3}^{\infty}f_j\Big)\Big\|_{L^{q_2}}^{p_1}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}\\
=&G_1+G_2+G_3.
\end{aligned}
$$

对 G_2, 由 $T_{l,\vec{b}}$ 的有界性，便有 $G_2\le C\|f\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_1}}$ 对 G_1, 由于 $x\in A_k, y\in A_j, j\le k-3$, 则 $2|y|<|x|$, 由 T_l 的尺寸条件，我们有

$$
\Big\|T_{l,\vec{b}}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-3}f_j\Big)(x)\Big\|\le C|x|^{(n-l)}\int_{2|y|<|x|}\prod_{i=1}^{m}|b_i(x)-b_i(y)|\Big|\sum_{j=-\infty}^{k-3}f_j(y)\Big|\mathrm{d}y\le CM_{\vec{b}}f(x).
$$

由定理 3, 我们有 $G_1\le C\|M_{\vec{b}}f\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_1}}\le C\|f\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_1}}$. 对 G_3, 注意到当 $x\in A_k, y\in A_j, j\ge k+3$, 则 $|x|<2|y|$. 由 T_l 的尺寸条件，有

$$
\Big|T_{l,\vec{b}}\sum_{j=k+3}^{\infty}f_j(x)\Big|\le C\int\limits_{|x|<2|y|}\Big|\prod_{j=1}^{m}(b_j(x)-b_j(y))\Big|\ |y|^{-(n-l)}|f(y)|\mathrm{d}y=CA(|f|)(x).
$$

令 $1<p<\infty$, A^* 是 A 的共轭算子，则

$$
A^*g(x)=|x|^{-(n-l)}\int\limits_{|y|<\frac{|x|}{2}}\prod_{j=1}^{m}|b_j(x)-b_j(y))|g(y)\mathrm{d}y.
$$

由引理 4.1 及定理 3, 我们有

$$
\begin{aligned}
G_3\le C\|A(|f|)\|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p_1}}&=\sup_{\|g\|_{\dot{K}_{q_2'}^{-\alpha,p_1'}}\le 1}|(A(|f|),g)|=\sup_{\|g\|_{\dot{K}_{q_2'}^{-\alpha,p_1'}}\le 1}|(|f|,A^*g)|\\
&\le C\|f\|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p_1}}\sup_{\|g\|_{\dot{K}_{q_2'}^{-\alpha,p_1'}}\le 1}\|M_{\vec{b}}g\|_{\dot{K}_{q_2'}^{-\alpha,p_1'}}\le C\|f\|_{\dot{K}_{q_1'}^{-\alpha,p_1'}},
\end{aligned}
$$

对 $0<p_1\le 1$, 类似定理 3 中 E_3 的估计，我们有

$$
\|\chi_k T_{l,\vec{b}}f_j\|_{q_2}\le C(j-k)^m 2^{(k-j)\frac{n}{q_2}}\|f_j\|_{q_1}.
$$

由于 $\alpha>-\frac{n}{q_2}$, 则

$$
\begin{aligned}
G_3&\le C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{j=k+3}^{\infty}2^{j\alpha}\|f_j\|_{q_1}2^{-(j-k)(\alpha+\frac{n}{q_2})}(j-k)^m\Big)^{p_1}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}\\
&\le C\Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{j\alpha p_1}\|f_j\|_{q_1}^{p_1}\Big\}^{\frac{1}{p_1}}\le C\|f\|_{\dot{K}_{q_1'}^{-\alpha,p_1'}}.
\end{aligned}
$$

定理 4 证毕.

推论 3.1　设 $\vec{b}, l, q_1, q_2, \alpha, p_1, p_2$ 与定理 4 中相同，如果线性算子 T_l 满足 $|T_l f(x)| \leq C\int \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-l}}\mathrm{d}y$, 对任意的 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x\notin \mathrm{supp}f$, 若 $T_{l,\vec{b}}$ 是从 L^{q_1} 到 L^{q_2} 有界，则 $T_{l,\vec{b}}$ 是从 $\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p_1}$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{\alpha,p_2}$ 有界.

注 1　若 T_l 为标准的分数次积分算子，由推论 3.1, 我们便解决了引言中提出的问题.

注 2　若 $m=1$, 则我们的定理 2, 定理 3 恰好与 [9] 中相应结果一致.

参　考　文　献

[1] Coifman R R, Rochberg R, and Weiss G. Fractorization theorems for Hardy spaces in several variables. *Ann. of Math.*, 1976, **123**(2): 611–635.

[2] Perez C. Sharp estimates for commutators of singular integrals via iterations of Hardy-Littlewood maximal function. *Four.Anal.Appl.*, 1997, **3**: 743–756.

[3] Perez C, Trujillo-Gonealee R. Sharp weighted estimates for multilinear commutators. *J. London Math. Soc.*, 2002, **65**(2): 672–692.

[4] 周伟军，马柏林，徐景实. 分数次多线性交换子的有界性. 将发表于数学物理学报.

[5] Herz C. Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms. *J. Math. Mech.*, 1968, **18**: 283–324.

[6] Chen Y Z, Lau K s. Some new clases of Hardy spaces. *J. Funct. Anal.*, 1989, **84**: 255–278.

[7] Garcia-Cuerva J. Hardy spaces and Beurling algebras. *J. London Math. Soc.*, 1989, **39**(2): 499–513.

[8] Li X, Yang D. Boundedness of some sublinear operators on Herz spaces. *Illinois J.Math.*, 1996, **40**: 484–501.

[9] Lu S, Yang D. The continouity of commutators on Herz-type spaces. *Michigan math. J.*, 1997, **44**: 255–281.

[10] Segovia C, Torrea J. Higher order commutators for vector-valued Calderon-Zygmund operators. *Trans.Amer.Math.Soc.*, 1993, **36**(2): 537–556.

[11] Ruiz F J, Torrea J. Weighted and vector valued inequalities for potential operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1986, **295**: 213–232.

[12] Chanillo S. A note on commutators. *Indiana Univ. Math. J.*, 1982, **31**(2): 7–16.

BOUNDEDNESS OF FRACTIONAL MULTILINEAR COMMUTATORS ON HERZ SPACE

Zhou Weijun　Ma Bolin

(*College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha* 410082)

Xu Jingshi

(*College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha* 410082 *Department of Mathematics, Hunan Normal University, Changsha* 410076)

Abstract　In this paper, we first establish the boundedness of a vector-valued multilinear commutator, and then obtain the boundedness of the fractional maximal multilinear commutator on the $L^p(\mathbb{R}^n)(p>1)$ space and Herz space. Finally, by the obtained results we prove the boundedness of a class of multilinear commutators on the Herz space.

Key words　Fractional integral operator, multilinear commutator, Herz space, $A(p,q)$ weight, $BMO(\mathbb{R}^n)$, vector-valued funcftion.