第 28 卷 第 2 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 28 No. 2
2005 年 4 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Apr., 2005

利用样本分位数的Logistic总体分布参数的近似最佳线性无偏估计

陈 冬
(北京联合大学基础部，北京 100101)
(E-mail: ldtchendong@buu.com.cn)

程维虎
(北京工业大学应用数理学院，北京 100022)
(E-mail: chengweihu@bjut.edu.cn)

摘　要　Harter H.L., Balakrishnan N. 等先后讨论了 Logistic 总体分布参数的极大似然估计，近似极大似然估计；其后 Ogawa J., Lloyd E.H., Kulldorff G., Gupta S.S. 及 Chan L.K. 等又先后讨论了 Logistic 分布参数的最佳线性无偏估计及估计的相对效率等问题. 令人遗憾的是：在大样本情形下，上述估计均难以求得. 为缓解这一困难，本文讨论利用样本分位数的 Logistic 总体的近似最佳线性无偏估计，给出估计量的大样本性质，以及样本分位数不超过 10 情形下，估计量有渐近最大相对估计效率时样本分位数的选取方案等.

关键词　Logistic 总体；样本分位数；最佳线性无偏估计；近似最佳线性无偏估计；相对估计效率

MR(2000) 主题分类　62F07; 62F12

中图分类　O213.2

1　问题提出

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{1+\exp[-(x-\mu)/\sigma]},\qquad -\infty<x<\infty, \tag{1}$$

其中 $-\infty<\mu<\infty$，$\sigma>0$ 为未知参数，则称 X 为服从参数 μ 和 σ 的 Logistic 分布，记作 $X\sim L(\mu,\sigma)$. μ 和 σ 分别称分布的位置参数和尺度参数.

设 $x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)}$ 为抽自 Logistic 总体 $L(\mu,\sigma)$ 的简单样本的次序统计量，以下简称为简单次序样本. 记

$\boldsymbol{y}=(x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)})^T$，$\mathbf{1}=(1,1,\cdots,1)^T$，$\boldsymbol{A}=(\alpha_{1;n},\alpha_{2;n},\cdots,\alpha_{n;n})^T$，$\boldsymbol{V}=(\beta_{i,j;n})_{n\times n}$，

本文 2003 年 12 月 10 日收到. 2004 年 12 月 18 日收到修改稿.

其中 $\alpha_{i;n},\beta_{i,j;n}$ 由下式给出:

$$\alpha_{i;n}=\psi(i)-\psi(n+1-i)=\begin{cases}-\sum\limits_{r=i}^{n-i}\dfrac{1}{r}, & i=1,\cdots,[n/2],\\ \sum\limits_{r=n+1-i}^{i}\dfrac{1}{r}, & i=[n/2]+1,\cdots,n;\end{cases}$$

$$\beta_{i,i;n}=\psi'(i)+\psi'(n+1-i)=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{3}-\sum\limits_{r=1}^{n-1}\dfrac{1}{r^2}, & i=1,n,\\ \dfrac{\pi^2}{3}-\sum\limits_{r=1}^{n-i}\dfrac{1}{r^2}-\sum\limits_{r=1}^{i-1}\dfrac{1}{r^2}, & i=2,\cdots,n-1;\end{cases} \tag{2}$$

$$\beta_{i,j,n}=\psi'(j)+\frac{n!}{(i-1)!}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r+i-1)!}{r(r+n)!}\big[\psi(j+r)-\psi(n+1-j)\big],\qquad 1\le i<j\le n.$$

$\psi(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\Gamma(t)=\Gamma'(t)/\Gamma(t)\ (t>0)$ 为特殊函数, $\Gamma(t)\ (t>0)$ 为 Gamma 函数, 且有

$$\alpha_{i;n}=-\alpha_{n+1-i;n}\ (1\le i\le n),\ \beta_{i,j;n}=\beta_{n+1-j,n+1-i,n}\ (1\le i\le j\le n). \tag{3}$$

建立一元线性模型

$$\boldsymbol{y}=(\mathbf{1}\ \boldsymbol{A})\begin{pmatrix}\mu\\ \sigma\end{pmatrix}+\boldsymbol{\varepsilon},\qquad \boldsymbol{\varepsilon}\ (\mathbf{0},\ \sigma^2\boldsymbol{V}). \tag{4}$$

并记 $(\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})$ 为 (μ,σ) 的最佳线性无偏估计. 利用线性模型理论及 (3) 式, 知 $\widetilde{\mu}$ 与 $\widetilde{\sigma}$ 可表示成

$$\widetilde{\mu}=\frac{\mathbf{1}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{y}}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{1}},\qquad \widetilde{\sigma}=\frac{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}}. \tag{5}$$

且有

$$\mathrm{Var}\,(\widetilde{\mu})=\frac{\sigma^2}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{1}},\qquad \mathrm{Var}\,(\widetilde{\sigma})=\frac{\sigma^2}{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}},\qquad \mathrm{Cov}\,(\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})=0. \tag{6}$$

若 $x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)}$ 为 Logistic 总体 $L(\mu,\sigma)$ 的简单次序样本, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 为取定的一组正数, 满足 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<1$. 对 $i=1,2,\cdots,k$, 令 $n_i=[n\lambda_i]+1$, 其中 $[n\lambda_i]$ 表示不超过 $n\lambda_i$ 的最大整数. 记

$$\mathbf{1}_k=(1,1,\cdots,1)^T,\qquad \boldsymbol{y}_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k,n}=(x_{(n_1)},x_{(n_2)},\cdots,x_{(n_k)})^T,$$
$$\boldsymbol{A}_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k;n}=(\alpha_{n_1;n},\alpha_{n_2;n},\cdots,\alpha_{n_k;n})^T,\qquad \boldsymbol{V}_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k;n}=(\beta_{n_i,n_j;n})_{k\times k},$$

其中 $\alpha_{n_i;n}\ (1\le i\le k)$, $\beta_{n_i,n_j;n}\ (1\le i\le j\le k)$ 由 (2) 式给出, 在不致引起混淆情况下, 分别将 $\boldsymbol{y}_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k;n},\mathbf{1}_k,\boldsymbol{A}_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k;n}$ 与 $\boldsymbol{V}_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k;n}$ 简记成 $\boldsymbol{y}_k,\mathbf{1},\boldsymbol{A}_k$ 与 $\boldsymbol{V}_k$. 利用 Logistic 总体 $L(\mu,\sigma)$ 简单样本 k 个分位数 $x_{(n_1)},x_{(n_2)},\cdots,x_{(n_k)}$ 的, 总体分布参数 μ 和 σ 的最佳线性无偏估计可表示成

$$\begin{cases}\widetilde{\mu}_k=\dfrac{1}{\Delta_k}\big[(\boldsymbol{A}_k^T\boldsymbol{V}_k^{-1}\boldsymbol{A}_k)\mathbf{1}^T\boldsymbol{V}_k^{-1}-(\mathbf{1}^T\boldsymbol{V}_k^{-1}\boldsymbol{A}_k)\boldsymbol{A}_k^T\boldsymbol{V}_k^{-1}\big]\boldsymbol{y}_k=\sum\limits_{i=1}^{k}c_ix_{(n_i)},\\ \widetilde{\sigma}_k=\dfrac{1}{\Delta_k}\big[(\mathbf{1}^T\boldsymbol{V}_k^{-1}\mathbf{1})\boldsymbol{A}_k^T\boldsymbol{V}_k^{-1}-(\mathbf{1}^T\boldsymbol{V}_k^{-1}\boldsymbol{A}_k)\mathbf{1}^T\boldsymbol{V}_k^{-1}\big]\boldsymbol{y}_k=\sum\limits_{i=1}^{k}d_ix_{(n_i)}.\end{cases} \tag{7}$$

估计方差、协方差与 σ^2 之比

$$\frac{\mathrm{Var}\,(\widetilde{\mu}_k)}{\sigma^2}=\frac{\boldsymbol{A}_k^T\boldsymbol{V}_k^{-1}\boldsymbol{A}_k}{\Delta_k},\quad \frac{\mathrm{Var}\,(\widetilde{\sigma}_k)}{\sigma^2}=\frac{\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{V}_k^{-1}\boldsymbol{1}}{\Delta_k},\quad \frac{\mathrm{Cov}\,(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)}{\sigma^2}=-\frac{\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{V}_k^{-1}\boldsymbol{A}_k}{\Delta_k}. \tag{8}$$

如果称 $\widetilde{\mu}$ 与 $\widetilde{\sigma}$ 方差、协方差阵行列式为 $\widetilde{\mu}$ 与 $\widetilde{\sigma}$ 的广义方差, 记其为 G. Var $(\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})$; $\widetilde{\mu}_k$ 与 $\widetilde{\sigma}_k$ 方差、协方差阵行列式为 $\widetilde{\mu}_k$ 与 $\widetilde{\sigma}_k$ 的广义方差, 记成 $G.Var(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)$, 有

$$\mathrm{G.Var}\,(\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})=\begin{vmatrix}\mathrm{Var}\,(\widetilde{\mu}) & \mathrm{Cov}\,(\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})\\ \mathrm{Cov}\,(\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma}) & \mathrm{Var}\,(\widetilde{\sigma})\end{vmatrix}=\frac{\sigma^4}{\Delta}, \tag{9}$$

$$\mathrm{G.Var}\,(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)=\begin{vmatrix}\mathrm{Var}\,(\widetilde{\mu}_k) & \mathrm{Cov}\,(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)\\ \mathrm{Cov}\,(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k) & \mathrm{Var}\,(\widetilde{\sigma}_k)\end{vmatrix}=\frac{\sigma^4}{\Delta_k}. \tag{10}$$

定义广义方差比 G.Var $(\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})$/G.Var $(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)$ 为 $(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)$ 对 $(\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})$ 的联合相对估计效率, 记成 R.E. $(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)$, 有

$$\mathrm{R.E.}\,(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)=\frac{\mathrm{G.Var}\,(\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma})}{\mathrm{G.Var}\,(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)}=\frac{\Delta_k}{\Delta}, \tag{11}$$

其中

$$\Delta_k=(\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{V}_k^{-1}\boldsymbol{1})(\boldsymbol{A}_k^T\boldsymbol{V}_k^{-1}\boldsymbol{A}_k)-(\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{V}_k^{-1}\boldsymbol{A}_k)^2,\qquad \Delta=(\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{1})(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}). \tag{12}$$

然而, 利用 (5) 式计算 $\widetilde{\mu}$ 与 $\widetilde{\sigma}$, 利用 (7) 式计算 $\widetilde{\mu}_k$ 与 $\widetilde{\sigma}_k$ 等并非易事, 其原因是: 抽自 Logistic 总体 $L(\mu,\sigma)$ 的简单次序样本 $x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)}$ 的协方差阵 $\boldsymbol{V}$ 与样本 k 个分位数 $x_{(n_1)},x_{(n_2)},\cdots,x_{(n_k)}$ 的协方差阵 $\boldsymbol{V}_k$ 均不易计算. 为缓解这一困难, 我们引入利用 Logistic 总体 $L(\mu,\sigma)$ 简单样本 k 个分位数的总体分布参数的近似最佳线性无偏估计, 并讨论其大样本性质.

2　基本引理

为讨论利用 Logistic 总体 $L(\mu,\sigma)$ 简单样本 k 个分位数 $x_{(n_1)},x_{(n_2)},\cdots,x_{(n_k)}$ 的总体分布参数的近似最佳线性无偏估计, 先给出两个重要引理 (引理 2.1 与 2.2).

引理 2.1　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 为取定的一组正数, 满足 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<1$. 记 $\boldsymbol{W}=(w_{ij})_{k\times k}$, $w_{ij}=w_{ji}=\left[\lambda_j(1-\lambda_i)\right]^{-1}$, $1\le i\le j\le k$, 则 $\boldsymbol{W}$ 可逆. 进一步, 记 $\boldsymbol{W}^{-1}=(w^{ij})_{k\times k}$, $\lambda_0=0$, $\lambda_{k+1}=1$. 有

$$w^{ij}=\begin{cases} u_i=\dfrac{(\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1})(1-\lambda_i)^2\lambda_i^2}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})}, & j=i,\quad i=1,2,\cdots,k;\\ v_i=\dfrac{\lambda_i\lambda_{i+1}(1-\lambda_i)(1-\lambda_{i+1})}{\lambda_i-\lambda_{i+1}}, & j=i+1,\ i=1,\cdots,k-1;\\ v_j=\dfrac{\lambda_j\lambda_{j+1}(1-\lambda_j)(1-\lambda_{j+1})}{\lambda_j-\lambda_{j+1}}, & j=i-1,\ i=2,\cdots,k;\\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{13}$$

注 1　引理 2.1 证明不难. 记 $\boldsymbol{B}=(w^{ij})_{k\times k}$, w^{ij} 由 (13) 式给出, $i,j=1,2,\cdots,k$. 只需验证 $\boldsymbol{BW}$ 为 k 阶单位阵即可.

引理 2.2 若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是抽自总体分布函数 $F(x,\theta)$ 的简单样本, 总体有非负概率密度函数 $f(x,\theta)$, θ 为总体的分布参数. 任取 k 个常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, 满足 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < 1$. 记 $x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}$ 为次序样本, $n_i = [n\lambda_i] + 1$, $i = 1, 2, \cdots, k$, 其中 $[n\lambda_i]$ 表示不超过 $n\lambda_i$ 的最大整数, 则有

$$\sqrt{n}(x_{n_1} - \xi_1, x_{n_2} - \xi_2, \cdots, x_{n_k} - \xi_k)^T \xrightarrow{L} N_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{W}), \tag{14}$$

其中 ξ_i 为总体分布的 λ_i 分位点, 即 ξ_i 满足方程 $\lambda_i = F(\xi_i, \theta)$, $i = 1, 2, \cdots, k$; $\mathbf{0}$ 为 k 维零向量, $\boldsymbol{W} = (a_{ij})_{k \times k}$ 为 k 阶方阵, 满足

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{\lambda_i(1 - \lambda_j)}{[f(\xi_i, \theta) f(\xi_j, \theta)]}, \qquad 1 \le i \le j \le k.$$

注 2 引理 2.2 参见 [10, 定理 9.2].

引理 2.3 设 $\{Z_n\}$ 与 $\{U_n\}$ 分别为随机变量序列, Z 为随机变量, c 为常数, $Z_n \xrightarrow{L} Z$(依分布收敛), $U_n \xrightarrow{P} c$ (依概率收敛), 则有

$$Z_n + U_n \xrightarrow{L} Z + c; \ U_n Z_n \xrightarrow{L} cZ; \qquad Z_n / U_n \xrightarrow{L} Z/c, \qquad c \ne 0.$$

注 3 该引理为 Slutsty 定理, 参见 [11, 定理 1.5].

3 利用样本分位数的总体参数的近似最佳线性无偏估计

对 Logistic 总体 $L(\mu, \sigma)$, 记 $F(x;\mu,\sigma)$ 与 $f(x;\mu,\sigma)$ 分别为总体的分布函数与概率密度函数, ξ_i 为总体的 λ_i 分位点, 即 $\lambda_i = F(\xi_i;\mu,\sigma)$, $i = 1, 2, \cdots, k$. 由 (1) 式, 得

$$\xi_i = \mu + \sigma \ln\left[\lambda_i/(1 - \lambda_i)\right], \qquad f(\xi_i;\mu,\sigma) = \lambda_i(1-\lambda_i)/\sigma, \qquad i = 1, 2, \cdots, k.$$

由引理 2.2, 得

$$\sqrt{n}\big(x_{n_1} - \mu - \sigma \ln\left[\lambda_1/(1-\lambda_1)\right], \cdots, x_{n_k} - \mu - \sigma \ln\left[\lambda_k/(1-\lambda_k)\right]\big)^T \xrightarrow{L} N_k(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{W}), \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{W} = (w_{ij})_{k \times k}$, $w_{ij} = w_{ji} = \left[\lambda_j(1-\lambda_i)\right]^{-1}$, $1 \le i \le j \le k$.

对 $i = 1, 2, \cdots, k$, 记 e_i 为 $x_{(n_i)}$ 与 $\mu + \sigma \ln\left[\lambda_i/(1-\lambda_i)\right]$ 之差. 有

$$x_{(n_i)} = \mu + \sigma \ln \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_i} + e_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, k \tag{16}$$

与

$$\sqrt{n}(e_1, e_2, \cdots, e_k)^T \xrightarrow{L} N_k(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{W}). \tag{17}$$

对线性模型 (16), 记 $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma)^T$, $\boldsymbol{y}_k = (x_{(n_1)}, x_{(n_2)}, \cdots, x_{(n_k)})^T$, $\boldsymbol{\varepsilon}_k = (e_1, e_2, \cdots, e_k)^T$,

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ln\left[\lambda_1/(1-\lambda_1)\right] & \ln\left[\lambda_2/(1-\lambda_2)\right] & \cdots & \ln\left[\lambda_k/(1-\lambda_k)\right] \end{pmatrix}^T.$$

将 (16) 与 (17) 改写成

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}_k, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_k \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{W}). \tag{18}$$

称线性模型 (18) 中 $\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma)^T$ 的广义最小二乘解 $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_k=(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)^T$ 为利用样本 k 个分位数的，Logistic 总体 $L(\mu,\sigma)$ 的，总体分布参数的近似最佳线性无偏估计. $\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k$ 可表示成

$$\widetilde{\mu}_k=\frac{K_2T_1-K_3T_2}{\Delta_k}=\sum_{i=1}^{k}c_ix_{(n_i)},\qquad \widetilde{\sigma}_k=\frac{K_1T_2-K_3T_1}{\Delta_k}=\sum_{i=1}^{k}d_ix_{(n_i)}. \tag{19}$$

其中

$$\begin{cases} K_1=\sum\limits_{i=1}^{k+1}(\lambda_i-\lambda_{i-1})(1-\lambda_i-\lambda_{i-1})^2,\\ K_2=\sum\limits_{i=1}^{k+1}\dfrac{(f_iz_i-f_{i-1}z_{i-1})^2}{\lambda_i-\lambda_{i-1}},\\ K_3=\sum\limits_{i=1}^{k+1}(1-\lambda_i-\lambda_{i-1})(f_iz_i-f_{i-1}z_{i-1}),\\ T_1=\sum\limits_{i=1}^{k+1}(1-\lambda_i-\lambda_{i-1})\big[f_ix_{(n_i)}-f_{i-1}x_{(n_{i-1})}\big],\\ T_2=\sum\limits_{i=1}^{k+1}\dfrac{f_iz_i-f_{i-1}z_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\big[f_ix_{(n_i)}-f_{i-1}x_{(n_{i-1})}\big],\\ \Delta_k=K_1K_2-K_3^2, \end{cases} \tag{20}$$

$$\lambda_0=0,\qquad \lambda_{k+1}=1,\qquad f_0=0,\qquad f_{k+1}=0;$$

$$\lambda_i=\frac{n_i}{n},\qquad f_i=\lambda_i(1-\lambda_i),\qquad z_i=\ln\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i},$$

$$u_i=\frac{f_i-f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}},\qquad v_i=\frac{f_iz_i-f_{i-1}z_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}},\qquad i=1,\cdots,k.$$

且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\mathrm{Var}\,(\widetilde{\mu}_k)}{\sigma^2}=\frac{K_2}{\Delta_k},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n\mathrm{Var}\,(\widetilde{\sigma}_k)}{\sigma^2}=\frac{K_1}{\Delta_k},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n\mathrm{Cov}\,(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)}{\sigma^2}=-\frac{K_3}{\Delta_k}. \tag{21}$$

证　对线性模型 (18), 模型参数的广义最小二乘解为

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_k=\left(\boldsymbol{X}^T(n^{-1}\sigma^2\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^T(n^{-1}\sigma^2\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{y}_k=(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{y}_k. \tag{22}$$

再由引理 2.1, 可推出

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}K_1 & K_3\\ K_3 & K_2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{y}_k=\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\end{pmatrix},$$

且 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X}$ 可逆. 从而，有

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_k=\frac{1}{K_1K_3-K_2^2}\begin{pmatrix}K_1 & -K_3\\ -K_3 & K_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta_k}\begin{pmatrix}K_2T_1-K_3T_2\\ K_1T_2-K_3T_1\end{pmatrix}$$

成立，其中 K_1,K_2,K_3,T_1,T_2 由 (20) 式给出. 从而，(19) 式成立.

进一步，由

$$\frac{n}{\sigma^2}\mathrm{Cov}\,(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_k)=\frac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix}\mathrm{Var}\,(\widetilde{\mu}_k) & \mathrm{Cov}\,(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)\\ \mathrm{Cov}\,(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k) & \mathrm{Var}\,(\widetilde{\sigma}_k)\end{pmatrix}$$
$$\to(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1},$$

可推出 (21) 式成立．证毕．

记 $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_k=(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)^T$ 为线性模型 (18) 中参数 $\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma)^T$ 的广义最小二乘解，即利用样本 k 个分位数的 Logistic 总体参数的近似最佳线性无偏估计，则 $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_k=(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)^T$ 相合于 $\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma)^T$, 且有渐近正态性．这一事实由下述定理 (定理 3.1) 给出．

定理 3.1　若 $x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)}$ 为 Logistic 总体 $L(\mu,\sigma)$ 的简单次序样本，任取 k 个常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$, 满足 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<1$. 对 $i=1,2,\cdots,k$, 令 $n_i=[n\lambda_i]+1$, 其中 $[n\lambda_i]$ 表示不超过 $n\lambda_i$ 的最大整数．记 $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_k=(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)^T$ 为线性模型 (18) 的广义最小二乘估计，则有

$$\sqrt{n}\,(\widetilde{\mu}_k-\mu,\widetilde{\sigma}_k-\sigma)^T\xrightarrow{L}N_2(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{C}).\tag{23}$$

其中

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}=\frac{1}{\Delta_k}\begin{pmatrix}K_1 & -K_3\\ -K_3 & K_2\end{pmatrix},$$

K_1,K_2,K_3 与 Δ_k 由 (20) 式给出．

注 4　定理 3.1 可由引理 2.2 与 2.3 得到，证明从略．

4　具有最大相对估计效率的样本分位数的选取

利用优化满足条件 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<1$ 的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$, 使相对联合估计效率达到最大 (即 Δ_k 达到最小) 的办法，可以得到最优 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 的取值，结果如下 (见表 1).

表 1　最优 λ_i 的选取与近似最佳线性无偏估计 $(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)$ 的组合系数 c_i,d_i 的取值

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_1	0.1873	0.1213	0.0752	0.0517	0.0363	0.0265	0.0199	0.0153	0.0120
λ_2		0.5000	0.3001	0.2086	0.1490	0.1112	0.0849	0.0663	0.0527
λ_3				0.5000	0.3554	0.2657	0.2042	0.1609	0.1292
λ_4						0.5000	0.3863	0.3050	0.2455
λ_5								0.5000	0.4060
c_1	0.5000	0.1801	0.0686	0.0326	0.0163	0.0089	0.0051	0.0031	0.0019
c_2		0.6398	0.4314	0.2355	0.1271	0.0734	0.0442	0.0277	0.0179
c_3				0.4638	0.3566	0.2357	0.1551	0.0989	0.0663
c_4						0 3640	0.2996	0.2207	0.1569
c_5								0.2992	0.2570
d_1	0.3407	0.2526	0.1424	0.0929	0.0619	0.0434	0.0318	0.0239	0.0184
d_2		0.0000	0.1686	0.1724	0.1370	0.1054	0.0809	0.0629	0.0496
d_3				0.0000	0.0977	0.1213	0.1551	0.0974	0.0816
d_4						0.0000	0.0639	0.0889	0.0915
d_5								0.0000	0.0451
	4.0414	3.3790	3.2877	3.1830	3.1405	3.1067	3.0858	3.0699	3.0584
	1.1736	1.0312	0.8876	0.8361	0.7988	0.7768	0.7609	0.7497	0.7413

注 5 表 1 中，当 $i > (k+1)/2$ 时，$\lambda_i = 1 - \lambda_{k+1-i}$，$c_i = c_{k+1-i}$，$d_i = -d_{k+1-i}$；倒数第二行为 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sigma^{-2}\mathrm{Var}(\widetilde{\mu}_k)$ 值，倒数第一行为 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sigma^{-2}\mathrm{Var}(\widetilde{\sigma}_k)$ 值.

5　对极大似然估计的渐近相对效率

记 $(\widehat{\mu},\widehat{\sigma})^T$ 为 $(\mu,\sigma)^T$ 的极大似然估计，由

$$\lim_{n\to\infty} n\sigma^{-2}\mathrm{Var}(\widehat{\mu}) = 3, \qquad \lim_{n\to\infty} n\sigma^{-2}\mathrm{Var}(\widehat{\sigma}) = \frac{9}{3+\pi^2} \approx 0.6993$$

及表 1 的最后两行，得 $(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)^T$ 对 $(\widehat{\mu},\widehat{\sigma})^T$ 的渐近相对估计效率，见表 2.

表 2　近似最佳线性无偏估计 $(\widetilde{\mu}_k,\widetilde{\sigma}_k)$ 对极大似然估计 $(\widehat{\mu},\widehat{\sigma})^T$ 的渐近相对估计效率

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{\mathrm{Var}(\widehat{\mu})}{\mathrm{Var}(\widetilde{\mu}_k)}$	0.7423	0.8878	0.9125	0.9425	0.9553	0.9657	0.9722	0.9772	0.9809
$\frac{\mathrm{Var}(\widehat{\sigma})}{\mathrm{Var}(\widetilde{\sigma}_k)}$	0.5959	0.6781	0.7879	0.8364	0.8754	0.9002	0.9190	0.9325	0.9433

参 考 文 献

[1] Harter H L, Moore A H. Maximum-likelihood Estimation from Censored Sample of the Parameters of a Logistic Distribution. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1967, 62: 675–684

[2] Balakrishnan N, Cohen A C. Order Statistics and Inference: Estimation Methods. Boston: Academic Press, 1990

[3] Ogawa J. Contributions to the Theory of Systematic Statistics. *I. Osaka Math. J.*, 1951, 3: 175–213

[4] Lloyd E H. Least-squares Estimation of Location and Scale Parameters Using order Statistics. *Biometrika*, 1952, 39: 88–95

[5] Kulldorff G. Optimum Spacing of Sample Quantiles from a Logistic Distribution and Best Linear Unbiased Estimates of Its Parameters, Technical Report. Sweden: University of Lund, 1964

[6] Gupta S S, Gnanadesikan M. Estimation of the Parameters of the Logistic Distribution. *Biometrika*, 1966, 53: 565–570

[7] Gupta S S, Qureishi A S, Shah B K. Bust Linear Unbiased Estimators of the Parameters of the Logistic Distribution Using order Statistics. *Technometrics*, 1967, 9: 43–56

[8] Chan L K, Cheng S W. Optimun Spacing for the Asymptotically Best Linear Estimate of the Location Parameter of the Logistic Distribution when Samples are Complete or Censored. *Statistische Hefte*, 1972, 13: 41–57

[9] Chan L K, Cheng S W. An Algorithm for Determining the Asymptotically Best Linear Estimate of the Mean from Multiply Censored Logistic Data. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1974, 69: 1027–1030

[10] David H A. Order Statistics. Sec. ed. New York: Wiley, 1981

[11] 茆诗松，王静龙，濮晓龙. 高等概率统计. 北京：高等教育出版社， 1999
(Mao S S, Wang J L, Pu X L. Advanced Mathematical Statistics. Beijing: China Higher Education Press, 1999)

AN ASYMPTOTICALLY BEST LINEAR UNBIASED ESTIMATOR FOR THE LOGISTIC POPULATION BASED ON THE SELECTED ORDER STATISTICS

CHEN DONG

(*Department of Basic Course, Beijing Union University, Beijing* 100101)

(*E-mail: ldtchendong@buu.com.cn*)

CHENG WEIHU

(*College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing* 100022)

(*E-mail: chengweihu@bjut.edu.cn*)

Abstract The maximum likelihood estimator and the approximate maximum likelihood estimator discussed by Harter H.L., Balakrishnan N. and others for the logistic population. After then, Ogawa J., Lloyd E.H., Kulldorff G., Gupta S.S., Chan L.K. and others discussed the best linear unbiased estimator for the logistic population. Unfortunately, it is very trouble to solve them. So, we discuss the asymptotically best linear unbiased estimator for the logistic population based on the selected order statistics, give the properties of the estimator, the variance and the covariance of the estimator in limit in this paper. And then, give the optimum chosen of spacings with the maximum asymptotic relative efficiency based on the order statistics when the selected order statistics number less than 10, and obtain its the maximum asymptotic relative efficiency.

Key words logistic population; order statistics; best linear unbiased estimator; asymptotically best linear unbiased estimator; relative estimation efficiency

MR(2000) Subject Classification 62F07; 62F12

Chinese Library Classification O213.2