关于一类广义 Tikhonov 正则化方法的饱和效应分析*

李洪芳　傅初黎[†]　熊向团

(兰州大学数学与统计学院, 兰州 730000)

(E-mail: fuchuli@lzu.edu.cn)

摘　要

Tikhonov 正则化方法是研究不适定问题最重要的正则化方法之一, 但由于这种方法的饱和效应出现的太早, 使得无法随着对解的光滑性假设的提高而提高正则逼近解的收敛率, 也即对高的光滑性假设, 正则解与准确解的误差估计不可能达到阶数最优. Schröter T 和 Tautenhahn U 给出了一类广义 Tikhonov 正则化方法并重点讨论了它的最优误差估计, 但却未能对该方法的饱和效应进行研究. 本文对此进行了仔细分析, 并发现此方法可以防止饱和效应, 而且数值试验结果表明此方法计算效果良好.

关键词　不适定问题;　Tikhonov 正则化;　饱和效应;　广义 Tikhonov 正则化

MR(2000) 主题分类　65J20; 65J22

中图分类　O241.1; O242.2

1　引言

考虑不适定问题的算子方程

$$Kx = y, \tag{1.1}$$

这里 K 是无穷维 Hilbert 空间 X 到 Y 的线性紧算子, 不失一般性我们假设 K 是一对一的, 并具有奇异系统 $\{\mu_j, x_j, y_j\}$, $j = 1, 2, \cdots$. 令 x 表示方程 (1.1) 对应于精确数据 $y \in Y$ 的精确解. 令 $y^\delta \in Y$ 表示扰动数据且满足

$$\|y - y^\delta\| \le \delta. \tag{1.2}$$

引入集合

$$X_{r,E} := \left\{x \in X \mid x = (K^*K)^r z,\ \|z\| \le E,\ r > 0\right\}, \tag{1.3}$$

并容易验证

$$\|x\|_r := \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{-4r} \left|(x, x_j)\right|^2} \tag{1.4}$$

本文 2003 年 8 月 5 日收到.

* 国家自然科学基金 (No. 10271050) 和甘肃省自然科学基金 (No. ZS021-A25-001-Z) 资助项目.

[†]通讯联系人

是 $X_{r,E}$ 的一个范数.

我们称含有参数 $\alpha>0$ 的一族有界线性算子 $R_\alpha: Y\to X$ 是方程 (1.1) 的一个正则化方法 (或称 R_α 为正则化算子), 如果

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0} R_\alpha Kx = x$, $\forall x\in X$, 即算子 $R_\alpha K$ 逐点收敛于恒等算子;

(2) 可以选取 $\alpha=\alpha(\delta)$ 使得 $\lim\limits_{\delta\to 0}\alpha(\delta)=0$;

(3) $\lim\limits_{\delta\to 0}\|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - x\| = \lim\limits_{\delta\to 0}\|x_\alpha^\delta - x\| = 0$, 并称 $x_\alpha^\delta = R_{\alpha(\delta)}y^\delta$ 为方程 (1.1) 的对应于扰动数据 y^δ 的正则逼近解或简称正则解.

Vainikko G 在 [1] 中证明了当 x 满足光滑性假设 (1.3) 时, 无论对任何正则化方法, 方程 (1.1) 不可能存在当 $\delta\to 0$ 时比

$$\|x_\alpha^\delta - x\| \le C\delta^{\frac{2r}{2r+1}}E^{\frac{1}{2r+1}}, \qquad C\ge 1 \tag{1.5}$$

更高的收敛率, 并称当 $C=1$ 时的正则化方法是最优的, 而当 $C>1$ 时的正则化方法是阶数最优的. 但对某些正则化方法, (1.5) 式并不是对所有 $r>0$ 成立, 而只是对某些 $0<r\le r_0$ 成立. 我们把这种现象称为饱和效应 (Saturation effect)[2-3], 而把 r_0 称为对应于此方法的限定条件 (qualification)[3]. 一个正则化方法如果具有饱和效应, 就意味着对应的正则解与精确解之间的误差估计的阶数不可能随着解的光滑性假设的提高而无限制提高. Kirch A 和 Engl H W 等分别在 [2,3] 中证明了对应于经典的 Tikhonov 正则化方法

$$(\alpha I + K^*K)x_\alpha^\delta = K^*y^\delta \tag{1.6}$$

的限制条件是 $r_0=1$, 即正则逼近解的收敛阶数不会超过 $O(\delta^{\frac{2}{3}})$.

Schröter T 和 Tautenhahn U 在 [4] 中给出了一种广义 Tikhonov 正则化方法

$$[\alpha I + (K^*K)^{s+1}]x_\alpha^\delta = (K^*K)^s K^*y^\delta, \qquad s\ge -\frac{1}{2}. \tag{1.7}$$

当 $s=0$ 时, 这种正则化方法就是经典 Tikhonov 正则化方法 (1.6). 但这篇文章的重点是导出和证明这种方法的最优误差估计, 而研究这种方法的饱和效应却是要建立在阶数最优的误差估计之上, 因此该文未能深入涉及. 本文将采用完全不同于 [4] 中的初等方法, 建立广义 Tikhonov 正则化方法 (1.7) 的阶数最优误差估计, 证明当 $r\in(0,s+1]$ 时正则解与精确解之间的误差估计是阶数最优的, 同时给出 (1.5) 式中系数 C 的具体表达式. 我们还要证明如果存在方程 (1.7) 的正则解满足

$$\lim_{\delta\to 0}\|x_\alpha^\delta - x\|\delta^{-\frac{2(s+1)}{2(s+1)+1}} = 0,$$

则 $x=0$. 从而不可能存在收敛率超过 $O(\delta^{\frac{2(s+1)}{2(s+1)+1}})$ 的正则逼近解, 也就是对应于此正则化方法的限定条件是 $r_0=s+1$. 另外, 如果已知光滑性假设 (1.3), 我们总可以通过选取 $s=r-1$ 而使这种正则化方法产生的误差估计总是阶数最优的, 从而完全防止了饱和效应的出现.

为了后面证明方便, 我们将令 (1.3) 式中的 $r=\nu(s+1)$, $\nu>0$. 这时 (1.4) 式就等价于

$$\|x\|_r = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^{-4\nu(s+1)}|(x,x_j)|^2} := |||x|||_\nu. \tag{1.8}$$

2 广义 Tikhonov 正则化方法及其误差估计

我们首先建立如下引理:

引理 2.1 设 X,Y 为无穷维 Hilbert 空间, $K:X\to Y$ 是一对一的线性紧算子且有奇异系统 $\{\mu_j,x_j,y_j\}$, $j=1,2,\cdots$. 函数 $g_\alpha:\left(0,\|K\|^{2(s+1)}\right]\to\mathbb{R}$ 满足性质:

i) 对 $\alpha>0$, $t\in\left(0,\|K\|^{2(s+1)}\right]$ 有

$$\left|tg_\alpha(t)\right|\le 1\qquad 且\qquad \lim_{\alpha\to 0^+}tg_\alpha(t)=1.$$

ii) 对 $\alpha>0$, $\exists c(\alpha)$, 使得对 $t\in\left(0,\|K\|^{2(s+1)}\right]$ 成立

$$\left|t^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}g_\alpha(t)\right|\le c(\alpha). \tag{2.1}$$

若还能选取 $\alpha=\alpha(\delta)$ 使得 $\lim\limits_{\delta\to 0}\alpha(\delta)=0$, $\lim\limits_{\delta\to 0}c(\alpha)\delta=0$, 则算子

$$R_\alpha=g_\alpha((K^*K)^{s+1})(K^*K)^sK^*$$

是一个正则化方法且满足

$$\|R_\alpha\|\le c(\alpha),$$

进而, 若 $g_\alpha(t)$ 还满足

iii) 对 $x\in X_{r,E}$, 存在 $C_1>0$, 使得对 $\alpha>0$, $t\in\left(0,\|K\|^{2(s+1)}\right]$ 成立

$$t^\nu\left|1-tg_\alpha(t)\right|\le C_1\alpha^\nu, \tag{2.2}$$

那么还成立估计

$$\|R_\alpha Kx-x\|\le C_1\alpha^\nu\|x\|_r=C_1\alpha^\nu|||x|||_\nu. \tag{2.3}$$

证 注意到 $x=\sum\limits_{j=1}^{\infty}(x,x_j)x_j$, 我们有

$$R_\alpha Kx=g_\alpha((K^*K)^{s+1})(K^*K)^{s+1}x=\sum_{j=1}^{\infty}g_\alpha(\mu_j^{2(s+1)})\mu_j^{2(s+1)}(x,x_j)x_j,$$

从而

$$\|R_\alpha Kx-x\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\mu_j^{2(s+1)}g_\alpha(\mu_j^{2(s+1)})-1\right]^2|(x,x_j)|^2.$$

当 $x=0$ 时, 显然 $\|R_\alpha Kx-x\|=0$, 以下设 $x\in X$, $x\ne 0$ 为固定. 于是对任意给 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\boldsymbol{N}$ 使得

$$\sum_{j=N+1}^{\infty}\left|(x,x_j)\right|^2<\frac{\varepsilon^2}{8}.$$

由性质 i), $\lim\limits_{\alpha\to 0}tg_\alpha(t)=1$ 知存在 $\alpha_0>0$, 当 $0<\alpha\le\alpha_0$ 时成立

$$\left|\mu_j^{2(s+1)}g_\alpha(\mu_j^{2(s+1)})-1\right|^2<\frac{\varepsilon^2}{2\|x\|^2},\qquad j=1,2,\cdots,N.$$

再注意到性质 i) 中 $|tg_\alpha(t)|\le 1$, 故

$$
\begin{aligned}
\|R_\alpha Kx-x\|^2 =&\sum_{j=1}^{N}\left[\mu_j^{2(s+1)}g_\alpha(\mu_j^{2(s+1)})-1\right]^2\left|(x,x_j)\right|^2\\
&+\sum_{j=N+1}^{\infty}\left[\mu_j^{2(s+1)}g_\alpha(\mu_j^{2(s+1)})-1\right]^2\left|(x,x_j)\right|^2\\
&<\frac{\varepsilon^2}{2\|x\|^2}\sum_{j=1}^{N}\left|(x,x_j)\right|^2+4\sum_{j=N+1}^{\infty}\left|(x,x_j)\right|^2\\
\le&\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}=\varepsilon^2,
\end{aligned}
$$

即

$$
\lim_{\alpha\to 0}\|R_\alpha Kx-x\|=0,\qquad \forall\, x\in X. \tag{2.4}
$$

再由性质 ii), 记 $t=\lambda^{s+1}$, 其中 λ 为算子 K^*K 的特征值, 则 (2.1) 式等价于

$$
\left|\lambda^{s+\frac{1}{2}}g_\alpha(\lambda^{s+1})\right|\le c(\alpha).
$$

再由奇异系统性质知

$$
\begin{aligned}
\|R_\alpha y\|^2 =&\left\|g_\alpha((K^*K)^{s+1})(K^*K)^sK^*y\right\|^2\\
=&\left\|\sum_{j=1}^{\infty}g_\alpha(\mu_j^{2(s+1)})\mu_j^{2s}(K^*y,x_j)x_j\right\|^2\\
=&\left\|\sum_{j=1}^{\infty}g_\alpha(\mu_j^{2(s+1)})\mu_j^{2s+1}(y,y_j)x_j\right\|^2\\
=&\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^{2(2s+1)}g_\alpha^2(\mu_j^{2(s+1)})\left|(y,y_j)\right|^2\\
\le& c^2(\alpha)\|y\|^2,
\end{aligned}
$$

即

$$
\|R_\alpha\|\le c(\alpha). \tag{2.5}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\|x_\alpha^\delta-x\| =&\|R_\alpha y^\delta-x\|=\|R_\alpha y^\delta-R_\alpha y+R_\alpha Kx-x\|\\
\le&\left\|R_\alpha(y^\delta-y)\right\|+\|R_\alpha Kx-x\|\le c(\alpha)\delta+\|R_\alpha Kx-x\|.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

由 (2.5), (2.6) 式知, 若能选取 $\alpha=\alpha(\delta)$ 使得 $\lim\limits_{\delta\to 0}\alpha(\delta)=0$, $\lim\limits_{\delta\to 0}c(\alpha)\delta=0$, 则 $\lim\limits_{\delta\to 0}\|x_\alpha^\delta-x\|=0$, 从而 R_α 确为正则化方法.

最后证明 (2.3) 式，由条件 iii)

$$\begin{aligned}\|R_\alpha Kx-x\|^2 =&\left\|g_\alpha((K^*K)^{s+1})(K^*K)^sK^*Kx-x\right\|^2\\ =&\left\|\sum_{j=1}^{\infty}(g_\alpha(\mu_j^{2(s+1)})\mu_j^{2(s+1)}-1)(x,x_j)x_j\right\|^2\\ =&\sum_{j=1}^{\infty}\left[\mu_j^{2(s+1)}g_\alpha(\mu_j^{2(s+1)})-1\right]^2|(x,x_j)|^2\\ =&\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^{4\nu(s+1)}\left[\mu_j^{2(s+1)}g_\alpha(\mu_j^{2(s+1)})-1\right]^2\mu_j^{-4\nu(s+1)}\left|(x,x_j)\right|^2\\ \le& C_1^2\alpha^{2\nu}|||x|||_\nu^2, \qquad \forall x\in X_{r,E},\end{aligned}$$

从而 (2.3) 式成立.

将 (1.7) 式改写为如下等价形式

$$x_\alpha^\delta=\left[\alpha I+(K^*K)^{s+1}\right]^{-1}(K^*K)^sK^*y^\delta, \tag{2.7}$$

并记对应的正则化算子为

$$R_\alpha:=g_\alpha((K^*K)^{s+1})(K^*K)^sK^*, \tag{2.8}$$

其中

$$g_\alpha(t)=\frac{1}{\alpha+t}, \qquad t\in\left(0,\|K\|^{2(s+1)}\right]. \tag{2.9}$$

那么我们有

引理 2.2 设 $g_\alpha(t)$ 由 (2.9) 式给出，则 $g_\alpha(t)$ 满足引理 1.1 中的条件 (i) 和 (ii). 同时条件 (iii) 也对 $\nu\le\nu_0=1$, 也即 $r\le r_0=s+1$ 成立.

证

(i) 显然对 $\alpha>0$, $t\in\left(0,\|K\|^{2(s+1)}\right]$ 成立

$$\left|tg_\alpha(t)\right|=\frac{t}{\alpha+t}<1,$$

且

$$\lim_{\alpha\to0^+}tg_\alpha(t)=\lim_{\alpha\to0^+}\frac{t}{\alpha+t}=1.$$

(ii) 由引理 2.1 证明过程知只需证明存在函数 $c(\alpha)$ 使得

$$\left|\lambda^{s+\frac12}g_\alpha(\lambda^{s+1})\right|\le c(\alpha),$$

其中 $\lambda\in\left(0,\|K\|^2\right]$ 是算子 K^*K 的特征值. 注意到

$$\lambda^{s+\frac12}g_\alpha(\lambda^{s+1})=\frac{\lambda^{s+\frac12}}{\alpha+\lambda^{s+1}},$$

并记 $f(\lambda)=\frac{\lambda^{s+\frac12}}{\alpha+\lambda^{s+1}}$, 易知 $\lambda=\lambda_0=[(2s+1)\alpha]^{\frac{1}{s+1}}$ 是 $f(\lambda)$ 的最大值点，且

$$\max f(\lambda)=f(\lambda_0)=\frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{2(s+1)}\alpha^{-\frac{1}{2(s+1)}}.$$

因此取

$$c(\alpha) := \frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{2(s+1)}\alpha^{-\frac{1}{2(s+1)}}, \tag{2.10}$$

则引理 2.1 中 (2.1) 式成立.

(iii) 记

$$h_\nu(t) = t^\nu\big|1 + tg_\alpha(t)\big| = \frac{\alpha t^\nu}{\alpha + t},$$

则

$$\frac{d}{dt}h_\nu(t) = \frac{\alpha t^{\nu-1}}{(\alpha+t)^2}\big[\nu\alpha - (1-\nu)t\big].$$

当 $0<\nu<1$ 时，易知 $t_0 = \frac{\nu\alpha}{1-\nu}$ 是 $h_\nu(t)$ 的极大值点，且

$$\max_{0<\nu<1} h_\nu(t) = h_\nu(t_0) = (1-\nu)^{1-\nu}\nu^\nu\alpha^\nu.$$

当 $\nu = 1$ 时， $h_\nu(t) = \frac{\alpha t}{\alpha+t} \le \alpha$. 因此对 $\nu \le 1$, (2.2) 式中常数 C_1 可取为

$$C_1 = \begin{cases} (1-\nu)^{1-\nu}\nu^\nu, & \nu < 1, \\ 1, & \nu = 1. \end{cases} \tag{2.11}$$

而当 $\nu > 1$ 时， $\frac{d}{dt}h_\nu(t) > 0$. 从而函数 $h_\nu(t)$ 在 $\big(0, \|K\|^{2(s+1)}\big]$ 上单增,

$$\begin{aligned}\max h_\nu(t) =& h_\nu\big(\|K\|^{2(s+1)}\big) = \|K\|^{2\nu(s+1)}\frac{\alpha}{\alpha + \|K\|^{2(s+1)}} \\ \le& \|K\|^{2(s+1)(\nu-1)}\alpha.\end{aligned}$$

这时 (2.2) 将不再成立.

定理 2.1 设 K 为如前所述线性紧算子,

(a) 设 $R_\alpha : Y \to X$ 是由 (2.8), (2.9) 式所给有界线性算子，则

$$\|R_\alpha\| \le c(\alpha),$$

其中 $c(\alpha)$ 由 (2.10) 给出，且当 $\alpha = \alpha(\delta)$ 选取满足 $\lim\limits_{\delta\to0}\alpha(\delta) = 0$, $\lim\limits_{\delta\to0}c(\alpha)\delta = 0$ 时 R_α 为正则化算子.

(b) 设 $x \in X_{r,E}$, $0 < r \le s+1$. 若正则化参数 α 选取满足

$$\alpha(\delta) = C_2\Big(\frac{\delta}{E}\Big)^{\frac{2(s+1)}{2r+1}} \tag{2.12}$$

时，成立如下 Hölder 型稳定性估计

$$\|x_\alpha^\delta - x\| \le C\delta^{\frac{2r}{2r+1}}E^{\frac{1}{2r+1}}, \qquad 0 < r \le s+1, \tag{2.13}$$

即当 $0 < r \le s+1$ 时，此估计是阶数最优的，这里常数

$$C_2 = \Big[\frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{4C_1 r(s+1)}\Big]^{\frac{2(s+1)}{2r+1}}, \tag{2.14}$$

$$C = C_1^{\frac{1}{2r+1}}\Big[\frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{2(s+1)}\Big]^{\frac{2r}{2r+1}}\Big[(2r)^{\frac{1}{2r+1}} + (2r)^{-\frac{2r}{2r+1}}\Big], \tag{2.15}$$

C_1 由 (2.11) 式给出.

证 (a) 由引理 2.1 及引理 2.2 知 $\|R_\alpha\| \le c(\alpha)$, $c(\alpha)$ 由 (2.10) 式给出, 且由正则化算子定义知在所述条件下 R_α 确为正则化算子.

(b) 由 (2.6)(2.3) 式和引理 2.2 知对 $x \in X_{r,E}$, $0<\nu\le s+1$, 也即对 $0<\nu\le 1$ 成立

$$\begin{aligned}\|x_\alpha^\delta - x\| &\le \delta c(\alpha) + C_1\alpha^\nu |\|x\||_\nu \\ &\le \delta\frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{2(s+1)}\alpha^{-\frac{1}{2(s+1)}} + C_1\alpha^\nu E.\end{aligned} \tag{2.16}$$

下面我们通过极小化 (2.16) 式右端来确定正则化参数 α. 为此令

$$f(\alpha) = \delta\frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{2(s+1)}\alpha^{-\frac{1}{2(s+1)}} + C_1\alpha^\nu E,$$

则

$$f'(\alpha) = C_1\nu E\alpha^{-\frac{1}{2(s+1)}-1}\Big[-\frac{\delta}{E}\frac{1}{C_1\nu}\frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{4(s+1)^2} + \alpha^{\nu+\frac{1}{2(s+1)}}\Big].$$

令 $f'(\alpha)=0$ 可得

$$\begin{aligned}\alpha(\delta) &= \Big(\frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{4C_1\nu(s+1)^2}\frac{\delta}{E}\Big)^{\frac{2(s+1)}{2\nu(s+1)+1}} \\ &= \Big(\frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{4C_1 r(s+1)}\Big)^{\frac{2s+1}{2r+1}}\Big(\frac{\delta}{E}\Big)^{\frac{2s+1}{2r+1}} := C_2\Big(\frac{\delta}{E}\Big)^{\frac{2(s+1)}{2r+1}},\end{aligned}$$

这里 C_2 由 (2.14) 式给出, 且易知 $\alpha=\alpha(\delta)$ 是 $f(\alpha)$ 的极小值点. 显然此 $\alpha=\alpha(\delta)$ 满足

$$\lim_{\delta\to 0}\alpha(\delta)=0, \qquad \lim_{\delta\to 0}c(\alpha)\delta = 0.$$

再由 (2.16), (2.10) 式知

$$\begin{aligned}&\|x_\alpha^\delta - x\| \le \delta\frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{2(s+1)}\Big(C_2\Big(\frac{\delta}{E}\Big)^{\frac{2(s+1)}{2r+1}}\Big)^{-\frac{1}{2(s+1)}} + C_1\Big(C_2\Big(\frac{\delta}{E}\Big)^{\frac{2(s+1)}{2r+1}}\Big)^\nu E \\ &=\Big(\frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{2(s+1)}C_2^{-\frac{1}{2(s+1)}} + C_1 C_2^{\frac{r}{s+1}}\Big)\delta^{\frac{2r}{2r+1}}E^{\frac{1}{2r+1}} \\ &=\Big[\frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{2(s+1)}\Big(\frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{4C_1 r(s+1)}\Big)^{-\frac{1}{2r+1}} + C_1\Big(\frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{4C_1 r(s+1)}\Big)^{\frac{2r}{2r+1}}\Big]\delta^{\frac{2r}{2r+1}}E^{\frac{1}{2r+1}} \\ &=C_1^{\frac{1}{2r+1}}\Big(\frac{(2s+1)^{\frac{2s+1}{2(s+1)}}}{2(s+1)}\Big)^{\frac{2r}{2r+1}}\Big((2r)^{\frac{1}{2r+1}} + (2r)^{-\frac{2r}{2r+1}}\Big)\delta^{\frac{2r}{2r+1}}E^{\frac{1}{2r+1}} \\ &:=C\delta^{\frac{2r}{2r+1}}E^{\frac{1}{2r+1}}, \qquad 0<r\le s+1,\end{aligned}$$

这里 C 由 (2.15) 式给出. 特别当 $r=s+1$ 时

$$C = \Big(\frac{(2r-1)^{\frac{2r-1}{2r}}}{2r}\Big)^{\frac{2r}{2r+1}}\big((2r)^{\frac{1}{2r+1}} + (2r)^{-\frac{2r}{2r+1}}\big).$$

3　广义 Tikhonov 正则化方法的饱和效应分析

由定理 2.1 可知本文所讨论的广义 Tikhonov 正则化方法可以具有收敛率

$$\|x_\alpha^\delta - x\| = O(\delta^{\frac{2r}{2r+1}}), \qquad x \in X_{r,E},\ 0 < r \le s+1.$$

那么它是否会有更高的收敛率呢？实际上我们有

定理 3.1　设 $K: X \to Y$ 是一对一的线性紧算子，且值域 $K(X)$ 是无穷维的. 令 $x \in X$ 并假设存在连续函数 $\alpha = \alpha(\delta): [0,\infty) \to [0,\infty)$ 满足 $\alpha(0)=0$, 使得对满足 (1.2) 式的 $y^\delta \in Y$ 成立

$$\lim_{\delta\to 0} \|x_{\alpha(\delta)}^\delta - x\| \delta^{-\frac{2(s+1)}{2(s+1)+1}} = 0, \tag{3.1}$$

这里 $x_{\alpha(\delta)}^\delta$ 为方程 (1.7) 的解，则 $x = 0$.

证　我们用反证法.

(1)　设 $x \ne 0$ 且 $y = Kx$. 注意到

$$\left[\alpha(\delta)I + (K^*K)^{s+1}\right](x_{\alpha(\delta)}^\delta - x) = (K^*K)^s K^*(y^\delta - y) - \alpha(\delta)x,$$

我们有

$$\alpha(\delta)x = (K^*K)^s K^*(y^\delta - y) - \left[\alpha(\delta)I + (K^*K)^{s+1}\right](x_{\alpha(\delta)}^\delta - x).$$

于是

$$\alpha(\delta)\|x\| \le \|K\|^{2s+1}\delta + \left(\alpha(\delta) + \|K\|^{2(s+1)}\right)\|x_{\alpha(\delta)}^\delta - x\|.$$

上式两边同乘以 $\delta^{-\frac{2(s+1)}{2(s+1)+1}}$ 并令 $\delta \to 0$, 由定理条件 (3.1) 知

$$\begin{aligned}\alpha(\delta)\delta^{-\frac{2(s+1)}{2(s+1)+1}}\|x\| \le &\|K\|^{2s+1}\delta^{\frac{1}{2(s+1)+1}} \\ &+ \left(\alpha(\delta) + \|K\|^{2(s+1)}\right)\|x_{\alpha(\delta)}^\delta - x\|\delta^{-\frac{2(s+1)}{2(s+1)+1}} \to 0,\end{aligned}$$

因此成立

$$\alpha(\delta)\delta^{-\frac{2(s+1)}{2(s+1)+1}} \to 0, \qquad \delta \to 0. \tag{3.2}$$

(2)　仍记 $\{\mu_j, x_j, y_j\}$, $j = 1,2,\cdots$ 为 K 的奇异系统. 并定义

$$\begin{aligned}&\delta_j := \mu_j^{2(s+1)+1}, \qquad &&y^{\delta_j} := y + \delta_j y_j,\\ &\alpha_j := \alpha(\delta_j), &&j = 1,2,\cdots\end{aligned}$$

且当 $j \to \infty$ 时 $\delta_j \to 0$, 那么 $y^{\delta_j} \in Y$ 且满足 (1.2) 式，记 x_{α_j} 为方程 (1.7) 当 $y^\delta = y$ 时的解，我们有

$$\begin{aligned}x_{\alpha_j}^{\delta_j} - x &= (x_{\alpha_j}^{\delta_j} - x_{\alpha_j}) + (x_{\alpha_j} - x)\\ &= [\alpha_j I + (K^*K)^{s+1}]^{-1}(K^*K)^s K^*(y^{\delta_j} - y) + (x_{\alpha_j} - x)\\ &= \frac{\mu_j^{2s+1}\delta_j}{\alpha_j + \mu_j^{2(s+1)}}x_j + (x_{\alpha_j} - x).\end{aligned}$$

由假设条件 (3.1) 知

$$\|x_{\alpha_j}^{\delta_j} - x\|\delta_j^{-\frac{2(s+1)}{2(s+1)+1}} \to 0, \qquad \delta_j \to 0,$$
$$\|x_{\alpha_j} - x\|\delta_j^{-\frac{2(s+1)}{2(s+1)+1}} \to 0, \qquad \delta_j \to 0,$$

故有

$$\frac{\mu_j^{2s+1}\delta_j}{\alpha_j + \mu_j^{2(s+1)}}\delta_j^{-\frac{2(s+1)}{2(s+1)+1}} = \frac{\mu_j^{2s+1}\delta_j^{\frac{1}{2(s+1)+1}}}{\alpha_j + \mu_j^{2(s+1)}}$$
$$= \frac{\mu_j^{2(s+1)}}{\alpha_j + \mu_j^{2(s+1)}} \longrightarrow 0, \qquad j \to \infty, \tag{3.3}$$

但注意到结论 (3.2), 我们有

$$\frac{\mu_j^{2(s+1)}}{\alpha_j + \mu_j^{2(s+1)}} = \frac{1}{\alpha_j\mu_j^{-2(s+1)} + 1} \longrightarrow 1, \qquad \delta_j \to 0, \text{ 即 } j \to \infty. \tag{3.4}$$

显然 (3.3) 与 (3.4) 式相矛盾，这就证明了 $x = 0$.

定理 2.1 说明对于广义 Tikhonov 正则化方法，不可能存在比 $O(\delta^{\frac{2(s+1)}{2(s+1)+1}})$ 更高的收敛率. 再结合定理 2.1 知这种正则化方法的最优收敛率就是 $O(\delta^{\frac{2(s+1)}{2(s+1)+1}})$. 因此对于任何解的光滑性假定 $x \in X_{r,E}$, $r > 0$, 我们只须选取 $s = r - 1$, 就恒可使正则逼近解与精确解的误差估计达到阶数最优. 从而这种正则化方法确实是经典 Tikhonov 正则化方法的推广和改进.

3 数值试验

考虑积分方程

$$\int_0^1 e^{ts}x(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \qquad 0 \le t \le 1. \tag{4.1}$$

这里 $y(t) = \frac{e^{t+1}-1}{t+1}$. 易知此方程有唯一解 $x(t) = e^t$. 若把方程 (4.1) 写成算子方程 $Kx = y$, 则显然 K 是 $L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ 的自共轭紧线性算子，从而 K^{-1} 必为无界算子 [5]. 因此方程 (4.1) 是一个不适定、主要是不稳定的问题. 我们可以采用广义 Tikhonov 正则化方法对此方程求解.

首先利用辛浦生法则对此积分方程左端进行离散化. 对于 $t_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \cdots, n$, n 为偶数，用 $\sum\limits_{j=0}^{n} a_{ij}x(t_j)$ 代替 $Kx(t_i)$, 其中

$$a_{ij} = w_j e^{t_i t_j}, \qquad i, j = 0, 1, \cdots, n. \tag{4.2}$$

$$w_j = \begin{cases} \dfrac{1}{3n}, & j = 0, n; \\ \dfrac{4}{3n}, & j = 1, 3, \cdots, n-1; \\ \dfrac{2}{3n}, & j = 2, 4, \cdots, n-2. \end{cases} \tag{4.3}$$

利用广义 Tikhonov 正则化方法 (2.7) 可得到如下的离散方程

$$x_\alpha^\delta = (\alpha I + A^{2(s+1)})^{-1} A^{2s+1} y^\delta, \tag{4.4}$$

其中 $y^\delta := (y_i)^\delta$ 是离散右端项 $y_i = \frac{\exp\{\frac{i}{n}+1\}-1}{\frac{i}{n}+1}$ 的扰动且满足

$$\|y - y^\delta\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^\delta)^2} \leq \delta,$$

(4.4) 式中矩阵 $A = (a_{ij})$ 由 (4.2), (4.3) 给出， I 为单位矩阵. 图 1 和图 2 分别表示取 $s = 1$, $\alpha = 10^{-6}$ 和 $s = 0$, $\alpha = 10^{-3}$ (即经典 Tikhonov 正则化) 时实际计算结果与准确解图像的比较. 从中不难看出计算效果是满意的.

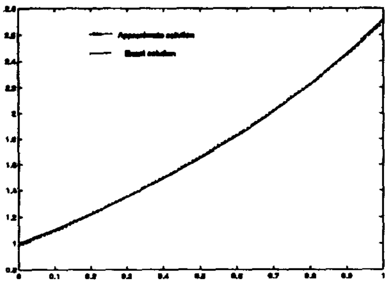

图 1　$s = 1$, $\alpha = 10^{-6}$

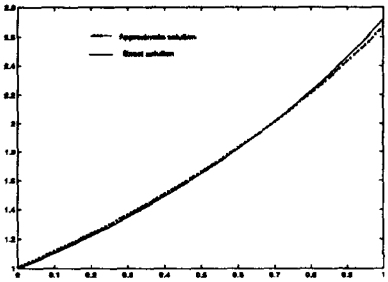

图 2　$s = 0$, $\alpha = 10^{-3}$

参　考　文　献

[1] Vainikko G. On the Optimality of Methods for Ill-posed Problems. Z. Anal. Anw., 1987, 6(4): 351–362

[2] Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. New York: Springer-Verlag, 1996

[3] Engl H W, Hanke M, Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. Dordrecht: Kluwer Acdemic Publishers, 1996

[4] Schröter T, Tautenhahn U. On the Optimality of Regularization Methods for Solving Linear Ill-posed Problems. *Z. Anal. Anw.*, 1994, 13(4): 697–710

[5] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operaors. New York: Springer-Verlag, 1966

THE ANALYSIS OF THE SATURATION EFFECT FOR A CLASS OF GENERAL TIKHONOV REGULARIZATION

LI HONGFANG　　FU CHULI　　XIONG XIANGTUAN

(*School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou* 730000)

(*E-mail: fuchuli@lzu.edu.cn*)

Abstract Tikhonov regularization is one of the most important regularization methods for the study of ill-posed problems. But because of the saturation effect of this method, it is impossible to improve the convergence rate of the approximate solution with increasing smoothness assumption of solutions, i.e., the error estimate between the exact and approximate solutions can not be order optimal for sharp smoothness assumption. A general Tikhonov regularization has been given by Schröter T and Tautenhahn U, and the optimal error estimates have been considered. In this paper the further research shows that this regularization method can prevent the saturation effect and the numerical experiment works well.

Key words ill-posed problem; Tikhonov regularization; saturation effect; general Tikhonov regularization

MR(2000) Subject Classification 65J20; 65J22

Chinese Library Classification O241.1; O242.2