第 23 卷 第 2 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 23 No. 2
2000 年 4 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Apr., 2000

关于单调的变分不等式问题的收敛性方法

张立平　　赖炎连
(中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所，北京 100080)

1 引言

变分不等式的性质及解法的研究是优化领域的重要课题. 所谓变分不等式问题就是：寻找一个点 $x^* \in X$, 使得

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \qquad \forall x \in X, \tag{1.1}$$

其中 X 是 R^n 中的非空闭凸集， F 是 R^n 中的映射， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 R^n 中的内积. 求解问题 (1.1) 有多种思路 [1,4,5] 其中之一就是将 (1.1) 转化为它的某种等价问题，再进行求解. 在 [1] 中 Masao Fukushima 给出了 (1.1) 的如下的等价问题

$$\min_{x \in X} \widehat{f}(x), \tag{1.2}$$

其中

$$\widehat{f}(x) = \langle F(x), \widehat{H}(x) - x \rangle + \frac{1}{2} \langle \widehat{H}(x) - x, G(\widehat{H}(x) - x) \rangle, \tag{1.3}$$

$$\widehat{H}(x) = \arg\min \left\{ \langle F(x), y - x \rangle + \frac{1}{2} \langle y - x, G(y - x) \rangle \,|\, y \in X \right\}, \tag{1.4}$$

G 是对称正定矩阵. [1] 提出了求解 (1.2) 的带精确搜索和 Armijo 搜索的两种收敛性算法. 本文建立了 “D-function” 的概念，利用 “D-function” 给出了 (1.1) 的等价问题的一般模型，从而根据 $F(x)$ 的不同性态可以选择 (1.1) 的恰当的等价问题. [1] 中 (1.2) 只是此模型的一种特殊情况. 进而在比 [1] 中更弱的条件下 (去掉了 X 是紧凸集及 ∇F 是 Lipschitz 连续的假设), 给出了求解 (1.1) 的一般等价问题模型的方法并证明了其收敛性.

2 等价问题及其性质

在这节中我们提出了 (1.1) 的一般等价问题模型并给出了它的一些性质. 设 $F: R^n \to R^n$, 称 F 在 X 上关于 $\mu > 0$ 一致单调，若

$$\langle F(x) - F(x'), x - x' \rangle \geq \mu \|x - x'\|^2, \qquad \forall x, x' \in X, \tag{2.1}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 R^n 中的欧氏模. 设 F 连续可微，则 F 在 X 上关于 $\mu > 0$ 一致单调的充要条件是 [2]

$$\langle d, \nabla F(x) d \rangle \geq \mu \|d\|^2, \qquad \forall x \in X, \;\; d \in R^n. \tag{2.2}$$

本文 1998 年 11 月 2 日收到. 1999 年 10 月 21 日收到修改稿.

下面建立 "D-function" 的定义并给出 (1.1) 的一般等价问题模型.

定义 2.1 设 $h: X \to R$ 满足下列条件:

(a) h 在 X 上连续可微且 ∇h 是 Lipschitz 连续的, 即存在 $L > 0$ 使得

$$\|\nabla h(x) - \nabla h(x')\| \le L\|x - x'\|, \qquad \forall\, x, x' \in X. \tag{2.3}$$

(b) h 在 X 上一致凸, 即存在 $\beta > 0$ 使得

$$h(x) - h(x') \ge \big\langle \nabla h(x'), x - x' \big\rangle + \beta\|x - x'\|^2, \qquad \forall\, x, x' \in X, \tag{2.4}$$

则称 h 是 X 上的 "D-function".

令

$$D_h(x, y) = h(x) - h(y) - \big\langle \nabla h(y), x - y \big\rangle, \tag{2.5}$$

则显然有 $D_h(x, y) \ge 0$, $\forall\, x, y \in X$, 且 $D_h(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

假设 A1 F 在 X 上关于 $\mu > 0$ 一致单调, 且 F 在 X 上是 Lipschitz 连续的, 即存在 $m > 0$ 使得

$$\|F(x) - F(x')\| \le m\|x - x'\|, \qquad \forall\, x, x' \in X. \tag{2.6}$$

假设 A2 $h: X \to R$ 是二次可微的 "D-function".

令 $x \in R^n$ 暂时固定, 考虑问题

$$\min_{y \in X} \big\langle F(x), y - x \big\rangle + D_h(y, x). \tag{2.7}$$

对任意固定的 $x \in R^n$, (2.7) 的解唯一确定 [3], 记为 $H(x)$.

引理 2.1 对任意的 $x \in X$, 有 $\langle F(x) + (\nabla h(H(x)) - \nabla h(x)), y - H(x) \rangle \ge 0$, $\forall\, y \in X$.

引理 2.2 x 是 (1.1) 的解当且仅当 $x = H(x)$.

令

$$f(x) = -\big\langle F(x), H(x) - x \big\rangle - D_h(H(x), x), \tag{2.9}$$

则问题

$$\min_{x \in X} f(x) \tag{2.10}$$

就是 (1.1) 的一般等价问题模型.

由定义 2.1, 引理 2.1 和引理 2.2, 我们立即可得下面的结果.

定理 2.1 设 $f(x)$ 是由 (2.9) 定义的函数, 则 $f(x) \ge 0$, 对任意的 $x \in X$, 且 $f(x) = 0$ 当且仅当 x 是 (1.1) 的解.

定理 2.2 设 A1 成立, 则 f 的水平集有界.

定理 2.3 假定 A2 成立, 并且 F 连续可微, $f(x)$ 由 (2.9) 定义, 则 f 是连续可微的, 且

$$\nabla f(x) = F(x) + \big[\nabla^2 h(x) - \nabla F(x)\big]\,(H(x) - x). \tag{2.11}$$

3　算法及收敛性定理

引理 3.1 设 F 连续可微且在 X 上关于 $\mu > 0$ 一致单调, 假设 A2 成立. 对每个 $x \in X$, 令 $d = H(x) - x$. 若

$$\|\nabla^2 h(x)\| < \mu, \tag{3.1}$$

则有 $\langle \nabla f(x), d \rangle \le -\omega\|d\|^2$, 其中 $\omega = \mu - \|\nabla^2 h(x)\| > 0$.

证明 因为 $h(x)$ 关于 $\beta>0$ 是一致凸的, 从而 $\nabla^2 h(x)$ 是一致正定的, 故有

$$\langle \nabla^2 h(x)d, d\rangle \le \|\nabla^2 h(x)\|\,\|d\|^2, \tag{3.2}$$

和

$$\langle \nabla h(H(x)) - \nabla h(x), d\rangle \ge \beta\|d\|^2, \tag{3.3}$$

成立. 由引理 2.1

$$\langle F(x) + \nabla h(H(x)) - \nabla h(x), x - H(x)\rangle \ge 0. \tag{3.4}$$

于是由 (2.11), (3.1)–(3.4) 和定义 2.1 可得引理成立.

例 选取 $h(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2{}_G$ (这里 G 是一对称正定阵), 这时 $\nabla^2 h(x)=G$, $\nabla h(x)=Gx$, 从而 (2.7) 也变为:

$$\min_{y\in X}\langle F(x), y-x\rangle + \frac{1}{2}\|y-x\|_G^2,$$

其唯一解恰是 (1.4) 所定义的, 用此解所表示的函数恰是 Fukushima 在 [1] 所讨论的 (1.1) 的等价效益函数 (1.3), 在这种情况下引理 3.1 的结论就变为: $\langle \nabla f(x), d\rangle \le -\mu\|d\|^2$. 这就是 [1] 中定理 2.1 的结果. 这说明 (1.2) 是 (2.10) 的特殊情况.

定理 3.1 假设 A1 和假设 A2 成立, 若 $\{x^k\}$ 是由 $x^{k+1}=x^k+t_kd^k$, $k=0,1,2,\cdots$ 产生的迭代序列, 其中 $d^k=H(x^k)-x^k$, $t^k\in[0,1]$ 是由

$$f(x^k+t_kd^k) = \min_{0\le t\le 1} f(x^k+td^k) \tag{3.6}$$

唯一确定的, 则若 (3.1) 成立, 对任意的初始点 $x^0\in X$, 算法产生的迭代序列 $\{x^k\}$ 收敛于 (1.1) 的解.

定理 3.2 在定理 3.1 的条件下, 若 $\{x^k\}$ 是由 $x^{k+1}=x^k+t_kd^k$, $k=0,1,2,\cdots$ 产生的迭代序列, 其中 $d^k=H(x^k)-x^k$, $t^k=\beta^{l_k}$, l_k 是满足

$$f(x^k+\beta^l d^k) \le f(x^k) + \alpha\beta^l\langle \nabla f(x^k), d^k\rangle \qquad (0<\alpha<1,\ \ 0<\beta<1) \tag{3.7}$$

的最小非负整数 l. 则当 (3.1) 成立时, 对任意的初始点 $x^0\in X$, $\{x^k\}$ 收敛于 (1.1) 的解.

参 考 文 献

1 Masao Fukushima. Equivalent Differentiable Optimization Problems and Descent Methods for Asymmetric Variational Inequality Problems. *Mathematical Programming*, 1992, 53: 99–110

2 Ortega J M, Rheinboldt W C. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. New York: Academic Press, 1970

3 Danskin J M. The Theory of Max-min with Applications. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1966, 14: 641–664

4 简金宝, 赖炎连. 变分不等式的几类求解方法. 高校应用数学学报 (A 辑), 1999, 14: 197–212 (Jian Jinbao, Lai Yanlian. Some Sorts of Methods for Solving Variational Inequalities. *Appl. Math. J. of Chinese University*, 1999, 14: 197-212)

5 Jia Hao Wu. Michael Florian and Patrice Marcotte, A General Descent Framework for the Monotone Variational Inequality Problem. *Mathematical Programming*, 1993, 61: 281–300