第 22 卷 第 4 期 应用数学学报 Vol. 22 No. 4
1999 年 10 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Oct., 1999

Klein-Gordon 方程初边值问题的一个新的守恒差分格式*

张鲁明† 常谦顺

(中国科学院应用数学研究所, 北京 100080)

摘 要 本文对非线性 Klein-Gordon(NKG) 方程的初边值问题提出了一种新的差分格式, 它保持了 NKG 方程初边值问题的能量守恒. 证明了该格式的收敛性和稳定性. 特别地, 由于该格式是完全隐式的, 故对求长时解有着重要的作用. 数值计算结果表明该方法计算速度快, 精度好.

关键词 NKG 方程; 能量守恒; 差分格式; 收敛性; 稳定性

1 引言

NKG 方程的求解在研究旋转波、非线性光学和其它一些数学物理问题中有着许多重要的应用. 已有许多文献对该方程进行了研究 (见 [1,2]). [3] 考虑了 NKG 方程的初边值问题

$$u_{tt} - u_{xx} + f(u) = 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(L,t), \tag{3}$$

其中 $f(p)$ 为已知实函数, 证明了它的经典解的存在唯一性, 并提出了一种能量守恒的全隐式有限差分格式, 它对求解 NKG 方程的初边值问题, 特别求长时解有着重要的应用.

问题 (1)-(3) 具有如下能量守恒性质

$$E = \int_0^L \left[\frac{1}{2}u_t + \frac{1}{2}u_x + F(u)\right] \mathrm{d}x = \text{const.},$$

其中 $F(p)$ 是 $f(p)$ 的一个原函数.

本文对问题 (1)-(3) 提出了一种新的能量守恒的全隐式差分格式, 并通过算例与 [3] 中的格式进行了比较, 表明这种方法在时间步长较小时与 [3] 中的方法在计算精度和速度上基本是相同的, 但随着时间步长的增加, 本文方法比 [3] 中的方法要好, 这说明对计算长时解, 本文方法更好.

本文 1998 年 1 月 8 日收到. 1999 年 3 月 17 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目.

† 作者现在地址: 石油大学 (华东) 数学系.

以下用到的 c_j 和 k_j 均为已知常数.

2 初边值问题解的基本估计

引理 1[3] 对任何的 h, 存在一算子 $I_h: L_2^h \to L_2(R)$, 使当 $u \in L_2^h$ 和 $U = I_h u$ 时有 $U(x_j) = u(x_j)$, 且 $U(x)$ 是完全解析的. I_h 与位移算子和差分算子可交换, 并且 $\|U\|_{L_2} = \|u\|$, $\frac{2}{\pi}\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{L_2} \le \|u_x\| \le \left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{L_2}$, 其中 $L_2^h = \{u_j : \|u\| \le \infty, \forall j\}$.

引理 2[3] 设 $v(x) \in H^2[0,l]$, 则对 $\varepsilon > 0$ 和 $0 < \delta < 2$ 有

$$\int_0^l |v(x)|^{2-\delta}\,\mathrm{d}x \le c_0 + \varepsilon\|v_x\|_{L_2}^2, \tag{4}$$

其中 c_0 依赖于 ε 和 δ.

定理 1 设

i) $f(p) \in C^1(-\infty,\infty)$;

ii) $F(p)$ 为 $f(p)$ 的一个原函数, 且 $F(0) = 0$;

iii) $F(p) \ge 0$ 或 $|f(p)| \le k_1 + k_2|p|^{1-\delta}$, 其中 δ 是常数且 $0 < \delta < 1$;

iv) $\varphi(x) \in H^1[0,L]$, $\psi(x) \in H^1[0,L]$;

v) $\int_0^L |f[\varphi(x)]|\,\mathrm{d}x \le \infty$.

则问题 (1)-(3) 的解在 $0 \le t \le T$ 内是 x 的连续函数且存在 k_0, 使

$$\max_{0\le x\le L,\ 0\le t\le T} |u(x,t)| \le k_0. \tag{5}$$

证 将 (1) 式乘以 $2u_t$ 并在 $[0,L]$ 上积分, 再利用 (3) 式及定理假设得

$$\int_0^L \left[u_t^2 + u_x^2 + 2F(u)\right]\mathrm{d}x = c_1, \tag{6}$$

对任何的 $t \ge 0$ 成立. 因此我们说问题 (1)-(3) 是能量守恒的.

当 $F(p) \ge 0$ 时显然有 $\|u_t\|_{L_2}^2 + \|u_x\|_{L_2}^2 \le c_1$.

当 $|f(p)| \le k_1 + k_2|p|^{1-\delta}$ 时,

$$\int_0^L F(u)\,\mathrm{d}x \le \int_0^L |F(u) - F(0)|\,\mathrm{d}x = \int_0^L |f(\xi)|\,|u|\,\mathrm{d}x,$$

其中, $0 \le \xi \le |u|$. 由引理 2 得

$$\int_0^L F(u)\,\mathrm{d}x \le \int_0^L (k_1|u| + k_2|u|^{2-\delta})\,\mathrm{d}x \le c_2 + \varepsilon\|u_x\|_{L_2}^2,$$

故由 (6) 式

$$\|u_t\|_{L_2}^2 + \|u_x\|_{L_2}^2 \le c - 2\int_0^L F(u)\,\mathrm{d}x \le c_3 + \varepsilon\|u_x\|_{L_2}^2.$$

总之, 不论 $F(p) \ge 0$, 还是 $|f(p)| \le k_1 + k_2|p|^{1-\delta}$, 均存在常数 c_4, 使得取 $0 \le \varepsilon \le 1$ 时成立

$$\|u_t\|_{L_2}^2 + (1-\varepsilon)\,\|u_x\|_{L_2}^2 \le c_4.$$

因此

$$\|u_t\|_{L_2} \le c_5, \qquad \|u_x\|_{L_2} \le c_5.$$

又

$$\|u\|_{L_2}^2 = \int_0^L u^2\,\mathrm{d}x = xu^2|_0^L - \int_0^L 2xuu_x\,\mathrm{d}x \le 2L\int_0^L |u|\,|u_x|\,\mathrm{d}x \le 2l\|u\|_{L_2}\|u_x\|_{L_2},$$

所以

$$\|u\|_{L_2} \le 2L\|u_x\|_{L_2} \le 2Lc_5.$$

由 Sobolev 不等式 [4] 知，对任何 $0 \le t \le T$ 成立 $\|u\|_{L_\infty} \le k_0$.

3　差分格式的收敛性与稳定性

首先我们作如下记号

$$(u_j^n)_x = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}, \qquad (u_j^n)_{\bar{x}} = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h},$$
$$(u_j^n)_t = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}, \qquad (u_j^n)_{\bar{t}} = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau},$$
$$(u^n, v^n) = h\sum_{j=0}^{J-1} u_j^n v_j^n, \qquad \|u^n\|^2 = (u^n, v^n), \qquad \|u^n\|_\infty = \sup_{0\le j\le J-1} |u_j^n|,$$

其中，$h = L/J$ 为空间步长，τ 为时间步长. 现在我们对问题 (1)-(3) 作如下差分近似

$$(u_j^n)_{t\bar{t}} - \frac{1}{4}\left[(u_j^{n+1})_{x\bar{x}} + 2(u_j^n)_{x\bar{x}} + (u_j^{n-1})_{x\bar{x}}\right] = G(u_j^n), \tag{7}$$
$$u_j^0 = \varphi(x_j) = \varphi_j, \qquad u_j^1 - u_j^0 = \tau\psi(x_j) = \tau\psi_j, \tag{8}$$
$$u_0^n = u_j^n = 0, \tag{9}$$

其中，

$$G(u_j^n) = -\frac{F(u_j^{n+1}) - F(u_j^{n-1})}{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}.$$

引理 3

$$(u_{t\bar{t}}^n,\, u_t^n + u_t^{n-1}) = \left(\|u_t^n)\|^2\right)_{\bar{t}};$$
$$-(u_{x\bar{x}}^n,\, u_t^n + u_t^{n-1}) = \frac{1}{2\tau}\left(\|u_x^{n+1}\|^2 - \|u_x^{n-1}\|^2\right) - \frac{\tau}{2}\left(\|u_{tx}^n\|^2 - \|u_{tx}^{n-1}\|^2\right);$$
$$-(u_{x\bar{x}}^{n+1} + u_{x\bar{x}}^{n-1},\, u_t^n + u_t^{n-1}) = \frac{1}{\tau}\left(\|u_x^{n+1}\|^2 - \|u_x^{n-1}\|^2\right).$$

直接计算便可证明.

将 $\tau(u_t^n + u_t^{n-1})$ 与 (7) 式作内积，再根据引理 3 得

$$\|u_t^n\|^2 - \|u_t^{n-1}\|^2 + \frac{1}{2}\left[\|u_x^{n+1}\|^2 - \|u_x^{n-1}\|^2\right] - \frac{\tau^2}{4}\left[\|u_{tx}^n\|^2 - \|u_{tx}^{n-1}\|^2\right]$$
$$+ h\sum_{j=0}^{J-1}\left[F(u_j^{n+1}) - F(u_j^{n-1})\right] = 0, \tag{10}$$

令

$$E^n = \|u_t^n\|^2 + \frac{1}{2}\left[\|u_x^{n+1}\|^2 + \|u_x^n\|^2\right] - \frac{\tau^2}{4}\|u_{tx}^n\|^2 + h\sum_{j=0}^{J-1}\left[F(u_j^{n+1}) + F(u_j^n)\right]. \tag{11}$$

为 Klein-Gordon 方程的离散能，则从 (10) 式递推可得：

$$E^n = E^{n-1} = \cdots = E^0. \tag{12}$$

因此，我们称格式 (7)-(9) 为能量守恒的差分格，因其用到三个时刻的九个点，故又称为三层九点格式. 下面我们对差分解来作先验估计.

定理 2 在定理 1 的条件下，差分格式 (7)-(9) 的解对所有的 $n\,(0 \le n\tau \le T)$ 是有界的.

证 当 $F(p) \ge 0$ 时，由 (11), (12) 式得

$$\|u_t^n\|^2 + \frac{1}{2}\left[\|u_x^{n+1}\|^2 + \|u_x^n\|^2\right] \le E_0 + \frac{\tau^2}{4}\|u_{tx}^n\|^2. \tag{13}$$

而当 $|f(p)| \le K_1 + K_2|p|^{1-\delta}$ 时，利用引理 1 和引理 2 得 [3]

$$h\sum_{j=0}^{J-1} F(u_j^n) \le c_6 + \varepsilon\|u_x^n\|^2.$$

因此在以上两种情况下均可得到

$$\|u_t^n\|^2 + \frac{1-4\varepsilon}{2}\left[\|u_x^{n+1}\|^2 + \|u_x^n\|^2\right] \le \frac{\tau^2}{4}\|u_{tx}^n\|^2 + c_7. \tag{14}$$

然而，

$$\begin{aligned}\|u_{tx}^n\|^2 =& h\sum_{j=0}^{J-1}\frac{1}{h^2}\left[(u_{j+1}^n)_t - (u_j^n)_t\right]^2 = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{J-1}\left[(u_{j+1}^n)_t^2 + (u_j^n)_t^2 - 2(u_j^n)_t(u_{j+1}^n)_t\right]\\ =& -2\sum_{j=0}^{J-1}(u_j^n)_t(u_j^n)_{tx} \le \frac{2}{h}\|u_t^n\|\,\|u_{tx}\|,\end{aligned}$$

所以

$$\|u_{tx}^n\|^2 \le \frac{4}{h^2}\|u_t^n\|^2. \tag{15}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\|u_{tx}^n\|^2 =& h\sum_{j=0}^{J-1}\frac{1}{\tau^2}\left[(u_j^{n+1})_x - (u_j^n)_x\right]^2\\ =& \frac{h}{\tau^2}\sum_{j=0}^{J-1}\left[(u_j^{n+1})_x^2 + (u_j^n)_x^2 - 2(u_j^n)_x(u_j^{n+1})_x\right]\\ =& \frac{1}{\tau^2}\left[\|u_x^{n+1}\|^2 + \|u_x^n\|^2 - 2(u_x^n, u_x^{n+1})\right] \le \frac{2}{\tau^2}\left[\|u_x^{n+1}\|^2 + \|u_x^n\|^2\right].\end{aligned} \tag{16}$$

因此由 (15) 和 (16) 式可得

$$\frac{\tau^2}{4}\|u_{tx}^n\|^2=\frac{\tau^2}{4}\theta\|u_{tx}^n\|^2+\frac{\tau^2}{4}(1-\theta)\|u_{tx}^n\|^2\le\theta\lambda^2\|u_t^n\|^2+\frac{1}{2}(1-\theta)\left[\|u_x^{n+1}\|^2+\|u_x^n\|^2\right],\quad(17)$$

其中，$\lambda=\tau/h$ 是网比，$0\le\theta\le1$. 将 (17) 式代入 (14) 式并整理得

$$(1-\lambda^2\theta)\|u_t^n\|^2+\frac{1}{2}(\theta-4\varepsilon)\left[\|u_x^{n+1}\|^2+\|u_x^n\|^2\right]\le c_8.$$

因此不论 λ 如何选取，总可取适当小的 ε 和 θ, 使得 $1-\lambda^2\theta>0$, $\frac{1}{2}(\theta-4\varepsilon)>0$, 于是有 $\|u_t^n\|\le c_9$, $\|u_x^n\|\le c_9$, 根据 Sobolev 不等式得 $\|u^n\|\le c_9$.

引理 4[1]　设 $w(n),\rho(n)$ 为非负网格函数，若 $c>0,\rho(n)$ 不减，且

$$w(n)\le\rho(n)+c\tau\sum_{l=0}^{n-1}w(l)$$

对所有的 $n\,(0\le n\le T)$ 成立，则对所有的 n 有 $w(n)\le\rho(n)e^{cn\tau}$.

据此我们来讨论有限差分格式 (7)-(9) 的稳定性和收敛性.

定理 3 在定理 1 的条件下，差分格式 (7)-(9) 关于初值和源项以范数 $\|\cdot\|_\infty$ 是稳定的.

证　设 $\{u_j^n\}$, $\{v_j^n\}$ 分别满足初边值问题 (7)-(9) 以及

$$\begin{aligned}&(v_j^n)_{t\bar t}-\frac{1}{4}\left[(v_j^{n+1})_{x\bar x}+2(v_j^n)_{x\bar x}+(v_j^{n-1})_{x\bar x}\right]=G(v_j^n)+\widetilde f_j^n,\\&v_j^0=\varphi_j+\widetilde\varphi_j,\qquad(v_j^0)_t=\psi_j+\widetilde\psi_j,\end{aligned}$$

其中，$\widetilde f_j^n$ 是源项的扰动，$\widetilde\varphi_j,\widetilde\psi_j$ 是初值的扰动.

令 $e_j^n=u_j^n-v_j^n$, 则 $\{e_j^n\}$ 满足

$$(e_j^n)_{t\bar t}-\frac{1}{4}\left[(e_j^{n+1})_{x\bar x}+2(e_j^n)_{x\bar x}+(e_j^{n-1})_{x\bar x}\right]=\widetilde G_j^n+\widetilde f_j^n,\quad(18)$$

$$e_j^0=\widetilde\varphi_j,\qquad(v_j^0)_t=\widetilde\psi_j,\quad(19)$$

其中 $\widetilde G_j^n=G(u_j^n)-G(v_j^n)$. (18) 式与 $e_t^n+e_t^{n-1}$ 作内积，再由引理 1 得

$$(\|e_t^n\|^2)_{\bar t}+\frac{1}{2}(\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2)_{\bar t}-\frac{\tau^2}{4}(\|e_{tx}^n\|^2)_{\bar t}=(\widetilde G^n+\widetilde f^n,e_t^n+e_t^{n-1}).\quad(20)$$

对 n 求和得

$$\begin{aligned}&\|e_t^n\|^2+\frac{1}{2}(\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2)-\frac{\tau^2}{4}\|e_{tx}^n\|^2-\|e_t^0\|^2-\frac{1}{2}(\|e_x^1\|^2+\|e_x^0\|^2)+\frac{\tau^2}{4}\|e_{tx}^0\|^2\\=&\tau\sum_{l=1}^{n}(\widetilde G^l+\widetilde f^l,e_t^l+e_t^{l-1}),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\|e_t^n\|^2+\frac{1}{2}\big(\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2\big)\\&\le\frac{\tau^2}{4}\|e_{tx}^n\|^2+\|\widetilde{\psi}\|^2+\frac{1}{2}\big(\|e_x^1\|^2+\|\widetilde{\varphi}_x\|^2\big)+\tau\sum_{l=1}^{n}(\widetilde{G}^l+\widetilde{f}^l,e_t^l+e_t^{l-1}),\end{aligned}\tag{21}$$

以下估计 (21) 式右端最后一项. 首先,

$$(\widetilde{G}^l+\widetilde{f}^l,e_t^l+e_t^{l-1})\le\|\widetilde{G}^l\|^2+\|\widetilde{f}^l\|^2+\|e_t^l\|^2+\|e_t^{l-1}\|^2.\tag{22}$$

令一方面, 因为

$$\widetilde{G}^n=-f(\alpha_j^n)+f(\beta_j^n)=-f'(\gamma_j^n)(\alpha_j^n-\beta_j^n),$$

其中 α_j^n 位于 v_j^{n-1} 和 v_j^{n+1} 之间, β_j^n 位于 u_j^{n-1} 和 u_j^{n+1} 之间, 所以,

$$|\widetilde{G}^n|=\big|f'(\gamma_j^n)(\alpha_j^n-\beta_j^n)\big|\le M|\alpha_j^n-\beta_j^n|\le M\big(|u_j^{n+1}-v_j^{n+1}|+|u_j^n-v_j^n|\big)\le M\big(|e_j^{n+1}|+|e_j^n|\big),$$

其中 $M=\sup\limits_p\big|f'(p)\big|$. 所以

$$\|\widetilde{G}^l\|^2\le c_{10}\big(\|e^{l+1}\|^2+\|e^l\|^2\big),\tag{23}$$

又

$$\|e^{l+1}\|^2\le 2\|\widetilde{\phi}\|^2+2T\tau\sum_{i=0}^{l}\|e_t^i\|^2.\tag{24}$$

将 (24) 式代入 (23) 式得

$$\|\widetilde{G}^l\|^2\le c_{11}\|\widetilde{\phi}\|^2+c_{12}\tau\sum_{i=0}^{l}\|e_t^i\|^2.\tag{25}$$

由 (25) 和 (22) 式得

$$\begin{aligned}&\tau\sum_{l=0}^{n}(\widetilde{G}^l+\widetilde{f}^l,\,e_t^l+e_t^{l-1})\le\tau\sum_{l=1}^{n}\Big(c_{11}\|\widetilde{\varphi}\|^3+c_{12}\tau\sum_{i=0}^{l}\|e_t^i\|^2+\|\widetilde{f}^l\|^2+\|e_t^l\|^2+\|e_t^{l-1}\|^2\Big)\\&\le c_{11}\|\widetilde{\varphi}\|^2+c_{13}\tau\sum_{l=0}^{n}\|e_t^l\|^2+\tau\sum_{l=0}^{n}\|\widetilde{f}^l\|^2.\end{aligned}\tag{26}$$

如定理 1 的推导有

$$\frac{\tau^2}{4}\|e_{tx}^n\|^2\le\theta\lambda^2\|e_t^n\|^2+\frac{1}{2}(1-\theta)\big(\|e_x^n\|^2+\|e_x^{n-1}\|^2\big).\tag{27}$$

将 (26) 和 (27) 式代入 (21)

$$\begin{aligned}&(1-\theta\lambda^2)\|e_t^n\|^2+\frac{1}{2}\theta\big(\|e_x^n\|^2+\|e_x^{n-1}\|^2\big)\\&\le\|\widetilde{\psi}\|^2+\frac{1}{2}\big(\|e_x^1\|^2+\|\widetilde{\varphi}_x\|^2\big)+c_{11}\|\widetilde{\varphi}\|^2+c_{13}\tau\sum_{l=0}^{n}\|e_t^l\|^2+\tau\sum_{l=0}^{n}\|\widetilde{f}^l\|^2.\end{aligned}$$

可取 θ,τ 足够小，使得 $1-\theta\lambda^2-c_{13}\tau>0$, 故取

$$\rho(n)=\rho_0+\rho_n,\qquad w(n)=[1-\theta\lambda^2-c_{13}\tau]\,\|e_t^n\|^2+\frac{1}{2}\theta\big(\|e_x^n\|^2+\|e_v^{n-1}\|^2\big),$$

其中，

$$\rho_0=\|\widetilde{\psi}\|^2+\frac{1}{2}\big(\|e_x^1\|^2+\|\widetilde{\varphi}_x\|^2\big)+c_{11}\|\widetilde{\varphi}\|^2,\qquad \rho_n=\tau\sum_{l=0}^{n}\|\widetilde{f}^l\|^2,$$

这时有 $w(n)\le\rho(n)+c_{14}\tau\sum\limits_{l=1}^{n-1}w(l)$. 由引理 4 得

$$w(n)\le\rho(n)e^{c_{14}n\tau}\le c_{15}\rho(n).$$

由 Sobolev 不等式知 $\|e^n\|_\infty\le c_{15}\rho(n)$. 根据 $\rho(n)$ 的定义便得定理结论.

现在我们来考虑问题 (7)–(9) 的收敛性. 令 Er_j^n 和 δ_j^n 分别是源项和解的局部截断误差，于是有

$$\begin{aligned}&(\delta_j^n)_{t\bar{t}}-\frac{1}{4}\big[(\delta_j^{n+1})_{x\bar{x}}+2(\delta_j^n)_{x\bar{x}}+(\delta_j^{n-1})_{x\bar{x}}\big]\\=&\frac{F[u(jh,(n+1)\tau)]-F(u_j^{n+1})}{u(jh,(n+1)\tau)-u_j^{n+1}}-\frac{F[u(jh,(n-1)\tau)]-F(u_j^{n-1})}{u(jh,(n-1)\tau)-u_j^{n-1}}+Er_j^n,\end{aligned}\tag{28}$$

$$\delta_j^0=0,\qquad (\delta_j^0)_t=Er_j^0.\tag{29}$$

类似于定理 3 可以证明

定理 4 在定理 1 的条件下，差分格式 (7)–(9) 的解依范数 $\|\cdot\|_\infty$ 收敛到定解问题 (1)–(3) 的解.

4 计算方法及算例

将差分格式 (3.4.1)–(3.4.3) 改写为如下便于计算的形式

$$A_ju_{j-1}^{n+1(s+1)}+B_ju_j^{n+1(s+1)}+C_ju_{j+1}^{n+1(s+1)}=D_j^{n+1(s)},\qquad 1\le j\le J-1,\quad 0<n<N,\tag{30}$$

$$u_j^n=\varphi_j,\qquad u_j^1=\varphi_j+\tau\psi_j,\tag{31}$$

$$u_0^{n+1(s+1)}=u_j^{n+1(s+1)}=0,\tag{32}$$

其中，

$$\begin{aligned}&A_j=C_j=-\lambda^2/4,\qquad B_j=1+\lambda^2/2,\\&D_j^{n+1(s)}=\frac{\lambda^2}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)+(2-\lambda^2)u_j^n+\frac{\lambda^2}{4}(u_{j+1}^{n-1}+u_{j-1}^{n-1})\\&\qquad-\Big(1+\frac{\lambda^2}{2}\Big)u_j^{n-1}-\tau^2\frac{F(u_j^{n+1(s)})-F(u_j^{n-1})}{u_j^{n+1(s)}-u_j^{n-1}}.\end{aligned}$$

定理 5 若定理 1 的条件满足，并且取迭代初值 $u_j^{n+1(0)}=u_j^n$, $1\le j\le J-1$, 以及取时间步长 $\tau\le k_3$, 则迭代方法 (30)–(32) 收敛.

证 令 $\varepsilon_j^{n+1(s)} = u_j^{n+1} - u_j^{n+1(s)}$, 则从 (30) 和 (32) 式可得

$$A_j\varepsilon_{j-1}^{n+1(s+1)} + B_j\varepsilon_j^{n+1(s+1)} + C_j\varepsilon_{j+1}^{n+1(s+1)} = H_j^{n+1(s)}, \qquad 1 \le j \le J-1,$$
$$\varepsilon_0^{n+1(s+1)} = \varepsilon_J^{n+1(s+1)} = 0,$$

其中,

$$H_j^{n+1(s)} = -\tau^2\left[\frac{F(u_j^{n+1}) - F(u_j^{n-1})}{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}} - \frac{F(u_j^{n+1(s)}) - F(u_j^{n-1})}{u_j^{n+1(s)} - u_j^{n-1}}\right].$$

注意到 $A_j = C_j < 0$, $B_j > |A_j| + |C_j| > 0$, 故完全重复 [5] 中关于迭代方法收敛性的证明，便可得上述结论.

上述计算方法称为 "追赶迭代法", 大量计算表明，该方法收敛很快 [4]. 我们仍取 [3] 中的两个算例,

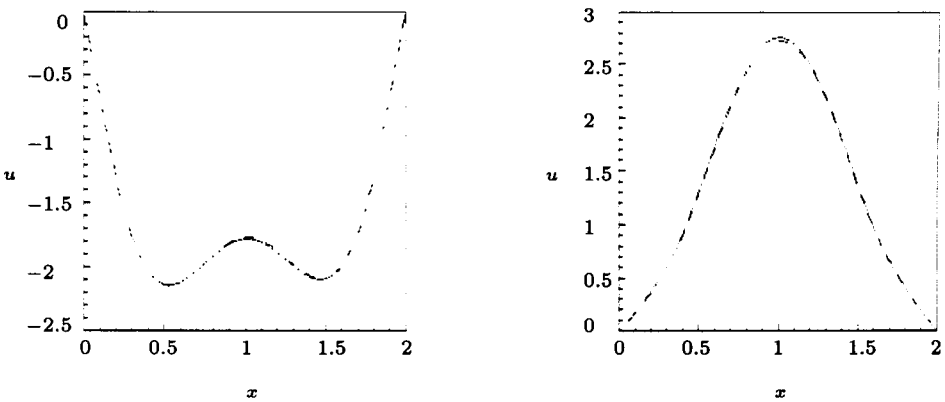
1) 令 $f(p) = p + p^3$, $\varphi(x) = 1.4(1 - \cos\pi x)$, $\psi(x) = 0$, $0 \le x \le 2$,

2) 令 $f(p) = p + p^5$, $\varphi(x) = 1 - \cos\pi x$, $\psi(x) = 0$, $0 \le x \le 2$.

通过计算可以看到每个时间层仅需迭代 3 或 4 次便可达到 10^{-5} 以上的精度. 为方便起见，称本文格式为格式 A, 将 [3] 中所用方法称为格式 B. 两种格式形式上是完全相同的，所不同的是迭代方程组的系数和右端项. 在格式 B 中,

$$A_j = C_j = -\frac{\lambda^2}{2}, \qquad B_j = 1 + \lambda^2,$$
$$D_j^{n+1(s)} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) - \tau^2\frac{F(u_j^{n+1(s)}) - F(u_j^{n-1})}{u_j^{n+1(s)} - u_j^{n-1}}.$$

首先我们计算例 1). 对格式 A, B, 我们固定 $h = 0.01$, 取 $\tau = 0.01$ 计算了 $T = 4, 8, 12$ 时的 u 值，二者之间的最大误差不超过 10^{-1}, 图 1(a),(b) 分别画出了 $T = 8, 12$ 时两种格式的计算结果，图中实线为格式 A 的计算结果，点线为格式 B 的计算结果.



(a) T=8 (a) T=12

图 1 数值解的比较

从图中可见，两条曲线几乎重合，因此我们把这时用格式 B 的计算结果作为问题 (1)–(3) 的解 (理由见 [3]). 然后我们逐步增大时间步长进行与上述相同的计算，并把这

些结果与前述所谓解进行了比较，按 $\|\cdot\|_\infty$ 标准计算了误差，结果列为表 1.

表 1 不同时间步长下两种格式的计算误差

	T=4		T=8		T=12	
τ	B	A	B	A	B	A
0.02	0.0155	0.0456	0.0529	0.0635	0.0532	0.0313
0.03	0.0934	0.0320	0.2255	0.1269	0.1130	0.0384
0.04	0.0866	0.0467	0.2014	0.0700	0.2975	0.0836
0.05	0.1435	0.0399	0.3250	0.1433	0.5715	0.1493
0.06	0.4265	0.2829	0.5509	0.3465	0.9807	0.3298
0.07	0.3464	0.1603	0.5879	0.4336	1.5029	0.7576
0.08	0.3987	0.1650	0.5415	0.4639	1.7817	0.8364

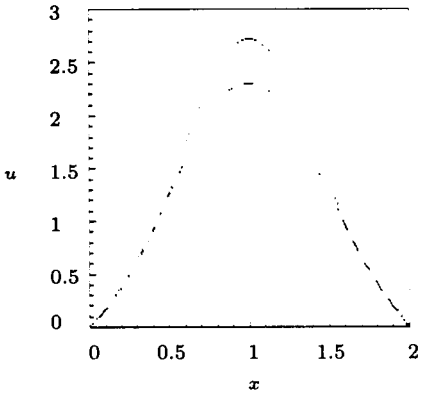


图 2 数值解的比较

图 2 画出了两种格式在 $T=12$, $\tau=0.05$ 时的 $x-u$ 曲线比较图，图中实线为 $\tau=0.01$ 时格式 B 的计算结果，虚线为 $\tau=0.05$ 时格式 A 的计算结果，点线为这时格式 B 的计算结果. 对 $\tau=0.01$, $T=12$ 时算例 1) 在 $x=0.8$ 的计算解曲线和 $T=12$ 时算例 2) 在 $x=1.5$ 的计算解曲线见图 3 和图 4.

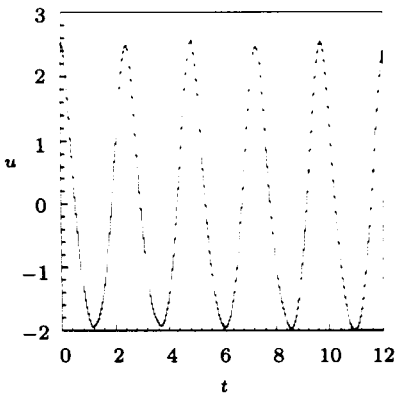


图 3 在 x=0.8 时例 1) 的数值解

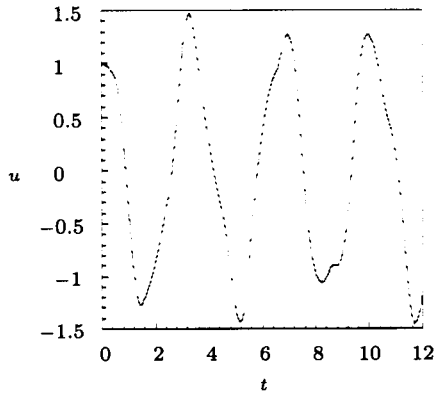


图 4 在 x=1.5 时例 2) 的数值解

从以上图表可见，当取适当的网比时，两种格式的计算结果是十分一致的，但随着

网比的增大 (文中固定空间步长，增大时间步长), 格式 A 的结果要比格式 B 好的多. 在计算速度上，由于格式 A 仅在 $D_j^{n+1(s)}$ 的计算上比格式 B 多两项，故在计算机的实现上没有多大差别.

5 结论

在本文中我们提出了 NKG 方程初边值问题求解的一种守恒的完全隐式差分格式，并在某些假设下证明了解的连续有界性，在此基础上证明了所提差分格式的收敛性与稳定性. 并用追赶迭代法求出了所提差分格式的解. 通过具体算例的计算可见该方法对于求 NKG 方程的长时解是十分有效的实用方法.

参 考 文 献

1 Strauss W, Vazquéz L. Numerical Solution of Nonlinear Klein-Gordon Equation. *J. Comput. Phys.*, 1978, 28: 271–278

2 Jimenez S, Vazquéz L. Analysis of Four Numerical Schemes for a Nonlinear Klein-Gordon Equation. *Appl. Math. Comput.* 1990, 35: 61–94

3 Wong Y S, Chang Q, Gong L. A Initial-boundary Value Problem of a Nonlinear Klein-Gondon Equation. *Appl. Math. Comput.*, 1997, 84: 77–93

4 常谦顺. 一类非线性 Schrödinger 方程的守恒差分格式. 科学通报, 1981, 26: 1094–1097

5 Brezis H. Periodic of Nonlinear Vibrating Strings and Duality Principle. *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.), 1983, 8: 409–425

A NEW CONSERVATIVE FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM OF A NONLINEAR KLEIN-GORDON EQUATION

ZHANG LUMING CHANG QIANSHUN

(*Institute of Applied Mathematis, the Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract In this paper, a new finite difference scheme is proposed for solving an initial-boundary value problem of a nonlinear Klein-Gordon equation. The scheme has an advantage of conservating discrete energy, just as the initial-boundary value problem conservate energy. And its convergence and stablity are proved. Because of the numerical scheme is fully implicit, it has particularly important function when long time solutions are sought. The result of numerical compution shows that the new scheme is very accurate and fast.

Key words NKG equation, energy conservation, difference scheme, convergence, stablity