第 27 卷 第 1 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 1
2004 年 1 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Jan., 2004

二维三温热传导方程组的分数步隐式差分格式 *

谢树森　　李弓春　　薛　恒

(中国海洋大学数学系，青岛 266071)

摘　要　本文给出一个解二维三温热传导方程组的分数步隐式有限差分格式. 利用离散变分形式及能量方法，给出差分格式的最优阶离散 H^1 范数先验误差及稳定性估计.

关键词　三温热传导方程组，分数步差分格式，收敛性，稳定性

1　引言

在惯性约束聚变 (ICF) 的二维数值模拟中，常常要耦合求解包括电子热传导，离子热传导和光子热传导方程的辐射流体力学方程组 [1], 其中带有不同能量之间交换的三温热传导方程组的求解占有重要的位置. 符尚武等 [2,3] 提出了能适应各种二维拉格朗日网格的九点差分格式. 本文利用分数步技术 [4−6], 建立一个解二维三温热传导方程组的分数步有限差分格式. 并从理论上分析了差分格式的收敛性和稳定性，得到最优阶的离散 H^1 范数误差估计式及稳定性. 利用分数步方法，可以把二维问题化为一维问题求解，易于实现并行计算，提高计算效率.

问题的数学模型是下述耦合非线性偏微分方程组的初边值问题

$$C_{ve}\frac{\partial T_e}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,(K(\rho,T_e)\ \mathrm{grad}\,T_e)+\omega_{ei}(T_i-T_e)+\omega_{er}(T_r-T_e), \tag{1.1}$$

$$C_{vi}\frac{\partial T_i}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,(K(\rho,T_i)\ \mathrm{grad}\,T_i)-\omega_{ei}(T_i-T_e), \tag{1.2}$$

$$C_{vr}\frac{\partial T_r}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,(K(\rho,T_r)\ \mathrm{grad}\,T_r)-\omega_{er}(T_r-T_e), \tag{1.3}$$

初始条件为

$$T_\alpha(x,y,0)=T_\alpha^0(x,y),\qquad \alpha=e,i,r, \tag{1.4}$$

其中 T_e,T_i,T_r 是未知函数，分别表示电子温度，离子温度和光子温度；ω_{ei} 和 ω_{er} 分别表示电子与离子，电子与光子的能量交换系数；ρ 为介质的密度.

本文 2001 年 6 月 4 日收到. 2003 年 5 月 14 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (19871043 号) 和山东省青年自然科学基金 (Q98A07115) 资助项目.

为方便起见，设求解区域为 $\Omega=\Omega_{xy}\times[0,T]$，$\Omega_{xy}=\big\{(x,y)\mid 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\big\}$，$T$ 为正常数．本文仅考虑第一类齐次边界条件的情况，即

$$T_\alpha=0,\qquad \alpha=e,i,r,\qquad (x,y,t)\in\partial\Omega_{xy}\times[0,T]. \tag{1.5}$$

作如下基本假设

$$0<C_*\le C_{v\alpha}\le C^*,\qquad 0<K_*\le K(\rho,T_\alpha)\le K^*, \tag{1.6}$$

$$\Big|\frac{\partial K}{\partial T_\alpha}(\rho,T_\alpha)\Big|\le D^*,\qquad \alpha=e,i,r. \tag{1.7}$$

此处 C^*,C_*,K^*,K_*,D^* 均为正常数. 并假设问题的解及方程的系数具有适当的光滑性.

2 分数步差分格式

令 $h=\frac{1}{N}$，$x_i=ih$，$y_j=jh$；$\Delta t=\frac{T}{L}$，$t^n=n\Delta t$，$W_{ij}^n=W(x_i,y_j,t^n)$. 用 α 表示 e,i,r 中的任意一个，用 $T_{\alpha h}$ 表示 T_α 的差分近似，并记

$$k^n_{\alpha,i+\frac12,j}=\big[K(\rho,T^n_{\alpha h,i+1,j})+K(\rho,T^n_{\alpha h,ij})\big]/2,$$
$$K^n_{\alpha,i+\frac12,j}=\big[K(\rho,T^n_{\alpha,i+1,j})+K(\rho,T^n_{\alpha,ij})\big]/2,$$

记号 $k^n_{\alpha,i,j+\frac12},K^n_{\alpha,i,j+\frac12}$ 类似定义．设

$$\delta_{\overline{x}}(k^n_\alpha\delta_xT^{n+1}_{\alpha h})_{ij}=h^{-2}\big[k^n_{\alpha,i+\frac12,j}(T^{n+1}_{\alpha h,i+1,j}-T^{n+1}_{\alpha h,ij})-k^n_{\alpha,i-\frac12,j}(T^{n+1}_{\alpha h,ij}-T^{n+1}_{\alpha h,i-1,j})\big], \tag{2.1}$$

$$\delta_{\overline{y}}(k^n_\alpha\delta_yT^{n+1}_{\alpha h})_{ij}=h^{-2}\big[k^n_{\alpha,i,j+\frac12}(T^{n+1}_{\alpha h,i,j+1}-T^{n+1}_{\alpha h,ij})-k^n_{\alpha,i,j-\frac12}(T^{n+1}_{\alpha h,ij}-T^{n+1}_{\alpha h,i,j-1})\big], \tag{2.2}$$

$$\nabla_h\cdot(k^n_\alpha\nabla_hT^{n+1}_{\alpha h})_{ij}=\delta_{\overline{x}}(k^n_\alpha\delta_xT^{n+1}_{\alpha h})_{ij}+\delta_{\overline{y}}(k^n_\alpha\delta_yT^{n+1}_{\alpha h})_{ij}. \tag{2.3}$$

电子热传导方程 (1.1) 的分数步隐式差分格式为

$$C^{n+1}_{ve,ij}\frac{T^{n+\frac12}_{eh,ij}-T^n_{eh,ij}}{\Delta t}=\frac{1}{\rho}\delta_{\overline{x}}(k^n_e\delta_xT^{n+\frac12}_{eh})_{ij}+\frac{1}{\rho}\delta_{\overline{y}}(k^n_e\delta_yT^n_{eh})_{ij}$$
$$+\omega^{n+1}_{ei,ij}(T^n_{ih}-T^n_{eh})_{ij}+\omega^{n+1}_{er,ij}(T^n_{rh}-T^n_{eh})_{ij},\qquad 1\le i\le N-1, \tag{2.4a}$$

$$C^{n+1}_{ve,ij}\frac{T^{n+1}_{eh,ij}-T^{n+\frac12}_{eh,ij}}{\Delta t}=\frac{1}{\rho}\,\delta_{\overline{y}}(k^n_e\delta_y(T^{n+1}_{eh}-T^n_{eh}))_{ij},\qquad 1\le j\le N-1. \tag{2.4b}$$

离子热传导方程 (1.2) 的分数步隐式差分格式为

$$C^{n+1}_{vi,ij}\frac{T^{n+\frac12}_{ih,ij}-T^n_{ih,ij}}{\Delta t}=\frac{1}{\rho}\delta_{\overline{x}}(k^n_i\delta_xT^{n+\frac12}_{ih})_{ij}$$
$$+\frac{1}{\rho}\delta_{\overline{y}}(k^n_i\delta_yT^n_{ih})_{ij}-\omega^{n+1}_{ei,ij}(T^n_{ih}-T^n_{eh})_{ij},\qquad 1\le i\le N-1, \tag{2.5a}$$

$$C^{n+1}_{vi,ij}\frac{T^{n+1}_{ih,ij}-T^{n+\frac12}_{ih,ij}}{\Delta t}=\frac{1}{\rho}\delta_{\overline{y}}(k^n_i\delta_y(T^{n+1}_{ih}-T^n_{ih}))_{ij},\qquad 1\le j\le N-1. \tag{2.5b}$$

光子热传导方程 (1.3) 的分数步隐式差分格式为

$$C_{vr,ij}^{n+1}\frac{T_{rh,ij}^{n+\frac{1}{2}}-T_{rh,ij}^{n}}{\Delta t}=\frac{1}{\rho}\delta_{\overline{x}}(k_r^n\delta_x T_{rh}^{n+\frac{1}{2}})_{ij}$$
$$+\frac{1}{\rho}\delta_{\overline{y}}(k_r^n\delta_y T_{rh}^n)_{ij}-\omega_{er,ij}^{n+1}(T_{rh}^n-T_{eh}^n)_{ij},\qquad 1\le i\le N-1, \tag{2.6a}$$

$$C_{vr,ij}^{n+1}\frac{T_{rh,ij}^{n+1}-T_{rh,ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}=\frac{1}{\rho}\delta_{\overline{y}}(k_r^n\delta_y(T_{rh}^{n+1}-T_{rh}^n))_{ij},\qquad 1\le j\le N-1. \tag{2.6b}$$

初始逼近为

$$T_{eh}^0=T_e^0(x,y),\qquad T_{ih}^0=T_i^0(x,y),\qquad T_{rh}^0=T_r^0(x,y). \tag{2.7}$$

分数步差分格式的计算程序是：当 $\{T_{eh,ij}^n,T_{ih,ij}^n,T_{rh,ij}^n\}$ 已知时，首先由 (2.4a), (2.5a) 和 (2.6a) 沿 x 方向用追赶法并行计算出过度值 $\{T_{eh,ij}^{n+\frac{1}{2}},T_{ih,ij}^{n+\frac{1}{2}},T_{rh,ij}^{n+\frac{1}{2}}\}$, 再由 (2.4b), (2.5b) 和 (2.6b) 沿 y 方向用追赶法求并行计算出 $\{T_{eh,ij}^{n+1},T_{ih,ij}^{n+1},T_{rh,ij}^{n+1}\}$. 由正定性条件 (1.6) 式可知，差分格式 (2.4)–2.6 的解唯一.

3 收敛性和稳定性分析

对任意网格函数 $v=\{v_{ij}\}$, $w=\{w_{ij}\}$, 定义离散 L^2 内积和范数分别为

$$\langle v,w\rangle=\sum_{i,j=1}^{N-1}v_{ij}w_{ij}h^2,\qquad \|v\|_h=\langle v,v\rangle^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1}$$

记

$$\langle a\ \delta_x v,\delta_x w\rangle=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}a_{i+\frac{1}{2},j}\delta_x v_{ij}\delta_x w_{ij}h^2,\qquad \langle a\ \delta_y v,\delta_y w\rangle=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}a_{i,j+\frac{1}{2}}\delta_y v_{ij}\delta_y w_{ij}h^2,$$
$$\langle a\nabla_h v,\ \nabla_h w\rangle=\langle a\ \delta_x v,\delta_x w\rangle+\langle a\ \delta_y v,\delta_y w\rangle, \tag{3.2}$$
$$\langle\nabla_h v,\ \nabla_h w\rangle=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}\delta_x v_{ij}\delta_x w_{ij}h^2+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\delta_y v_{ij}\delta_y w_{ij}h^2. \tag{3.3}$$

定义离散 H^1 半范数、范数分别为

$$|v|_1^2=\langle\nabla_h v,\ \nabla_h v\rangle,\qquad \|v\|_1=\left(\|v\|_h^2+|v|_1^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4}$$

定义最大值范数、半范数分别为

$$\|v\|_{0,\infty}=\max_{0\le i,j\le N}|v_{ij}|,\qquad |v|_{1,\infty}=\max_{0\le i,j\le N}|\nabla_h v_{ij}|.$$

并记 $\|v\|_{1,\infty}=\max\left\{\|v\|_{0,\infty},\ |v|_{1,\infty}\right\}$.

对光滑函数 $u(x,y,t)$ 定义范数

$$\|u\|_{m,c}=\max_{0\le\alpha\le m}\sup_{(x,y,t)\in\Omega}\left|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}\right|, \tag{3.5}$$

此处 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1\geq 0,\ \alpha_2\geq 0$. 当 $m=0$ 时，记 $\|u\|_{0,c}$ 为 $\|u\|_c$.

容易验证如下分部求和公式成立.

引理 1 若网格函数 $\{v_{ij}\},\{w_{i,j}\}$ 在边界节点上为零，则

$$-\langle\delta_{\overline{x}}(a\delta_x)v,\ w\rangle=\langle a\delta_x v,\ \delta_x w\rangle,\qquad -\langle\delta_{\overline{y}}(a\delta_y)v,\ w\rangle=\langle a\delta_y v,\ \delta_y w\rangle,$$

即

$$-\langle\nabla_h\cdot(a\nabla_h v),\ w\rangle=\langle a\nabla_h v,\ \nabla_h w\rangle.$$

在以后的讨论中，记号 $M(\cdot,\cdots,\cdot)$ 表示与括号中的量有关的正常数， M_j^* $(j=1,2,\cdots)$, ε 分别表示与 $\Delta t, h$ 无关的正常数和小的正常数.

首先研究电子热传导方程. 由 (2.4a) 和 (2.4b) 式消去 $T_{eh}^{n+\frac{1}{2}}$ 可得等价的差分方程

$$\begin{aligned}&C_{ve,ij}^{n+1}d_tT_{eh,ij}^n-\frac{1}{\rho}\nabla_h\cdot(k_e^n\nabla_hT_{eh}^{n+1})_{ij}+\frac{(\Delta t)^2}{\rho^2}\delta_{\overline{x}}\big(k_e^n\delta_x\big(B_e^{n+1}(\delta_{\overline{y}}(k_e^n\delta_yd_tT_e^n))\big)\big)_{ij}\\&=\omega_{ei,ij}^{n+1}(T_{ih}^n-T_{eh}^n)_{ij}+\omega_{er,ij}^{n+1}(T_{rh}^n-T_{eh}^n)_{ij},\end{aligned}\tag{3.6}$$

式中 $d_tT_{eh,ij}^n=\frac{1}{\Delta t}(T_{eh,ij}^{n+1}-T_{eh,ij}^n)$, $B_e^{n+1}=(C_{ve}^{n+1})^{-1}$.

记 $\pi_\alpha=T_\alpha-T_{\alpha h},\ \alpha=e,i,r$. 在 (1.1) 式中取 $t=t^{n+1}$, 与 (3.6) 式相减可得误差方程

$$\begin{aligned}&C_{ve,ij}^{n+1}d_t\pi_{e,ij}^n-\frac{1}{\rho}\nabla_h\cdot(k_e^n\nabla_h\pi_e^{n+1})_{ij}+\frac{(\Delta t)^2}{\rho^2}\delta_{\overline{x}}\big(k_e^n\delta_x\big(B_e^{n+1}(\delta_{\overline{y}}(k_e^n\delta_yd_t\pi_e^n))\big)\big)_{ij}\\&=C_{ve,ij}^{n+1}\Big[d_tT_{e,ij}^n-\frac{\partial T_{e,ij}}{\partial t}\Big|_{t=t^{n+1}}\Big]+\frac{1}{\rho}\nabla_h\cdot\big((K_e^n-k_e^n)\nabla_hT_e^{n+1}\big)_{ij}\\&\quad+\frac{1}{\rho}\big[\nabla\cdot(K_e^n\nabla T_e^{n+1})_{ij}-\nabla_h\cdot(K_e^n\nabla_hT_e^{n+1})_{ij}\big]+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot((K_e^{n+1}-K_e^n)\nabla T_e^{n+1})_{ij}\\&\quad+\big[\omega_{ei,ij}^{n+1}(d_tT_{i,ij}^n-d_tT_{e,ij}^n)\Delta t+\omega_{er,ij}^{n+1}(d_tT_{r,ij}^n-d_tT_{r,ij}^n)\Delta t\big]\\&\quad+\big[\omega_{ei,ij}^{n+1}(\pi_i^n-\pi_e^n)+\omega_{er,ij}^{n+1}(\pi_r^n-\pi_e^n)\big]+\frac{(\Delta t)^2}{\rho^2}\delta_{\overline{x}}\big(k_e^n\delta_x\big(B_e^{n+1}(\delta_{\overline{y}}(k_e^n\delta_yd_tT_e^n))\big)\big)_{ij}\\&\equiv G_{1,ij}^n+G_{2,ij}^n+G_{3,ij}^n+G_{4,ij}^n+G_{5,ij}^n+G_{6,ij}^n+G_{7,ij}^n.\end{aligned}\tag{3.7}$$

容易验证

$$|G_{1,ij}^n|\leq M\Big(\|C_{ve}\|_c,\Big\|\frac{\partial^2T_e}{\partial t^2}\Big\|_c\Big)\cdot\Delta t,\tag{3.8}$$

$$|G_{3,ij}^n|\leq M\big(\|K\|_{3,c},\|T_e\|_{4,c}\big)\cdot h^2,\tag{3.9}$$

$$|G_{4,ij}^n|\leq M\Big(\|K\|_{1,c},\Big\|\frac{\partial T_e}{\partial t}\Big\|_{1,c}+\|T_e\|_{2,c}\Big)\cdot\Delta t,\tag{3.10}$$

$$|G_{5,ij}^n|\leq M\Big(\|w_{ei}\|_c,\|w_{er}\|_c,\Big\|\frac{\partial T_e}{\partial t}\Big\|_c,\Big\|\frac{\partial T_i}{\partial t}\Big\|_c,\Big\|\frac{\partial T_r}{\partial t}\Big\|_c\Big)\cdot\Delta t,\tag{3.11}$$

$$|G_{6,ij}^n|\leq M\big(\|w_{ei}\|_c,\|w_{er}\|_c\big)\cdot\big[|\pi_{e,ij}^n|+|\pi_{i,ij}^n|+|\pi_{r,ij}^n|\big].\tag{3.12}$$

(3.7) 式两边与 $\pi_e^{n+1}-\pi_e^n=d_t\pi_e^n\Delta t$ 作离散 L^2 内积，对左端第二项利用分部求和公式

并把估计式 (3.8)–(3.12) 代入可得

$$\begin{aligned}&\langle C_{ve}^{n+1}\ d_t\pi_e^n, d_t\pi_e^n\rangle\Delta t+\frac{1}{\rho}\langle k_e^n\nabla_h\pi_e^{n+1},\ \nabla_h(\pi_e^{n+1}-\pi_e^n)\rangle\\&+\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\langle\delta_{\overline{x}}\big(k_e^n\delta_x\big(B_e^{n+1}(\delta_{\overline{y}}(k_e^n\delta_y d_t\pi_e^n))\big)\big), d_t\pi_e^n\rangle\\\leq&\langle G_2^n, d_t\pi_e^n\rangle\Delta t+\langle G_7^n, d_t\pi_e^n\rangle\Delta t+M_1^*\big\langle|\pi_e^n|+|\pi_i^n|+|\pi_r^n|+\Delta t+h^2, d_t\pi_e^n\big\rangle\Delta t.\end{aligned}\tag{3.13}$$

由 (1.6) 式可知

$$\langle C_{ve}^{n+1}d_t\pi_e^n, d_t\pi_e^n\rangle\Delta t\geq C_*\|d_t\pi_e^n\|_h^2\Delta t.\tag{3.14}$$

利用 Cauchy 不等式可得

$$\frac{1}{\rho}\langle k_e^n\nabla_h\pi_e^{n+1},\nabla_h(\pi_e^{n+1}-\pi_e^n)\rangle\geq\frac{1}{2\rho}\langle k_e^n\nabla_h\pi_e^{n+1},\nabla_h\pi_e^{n+1}\rangle-\frac{1}{2\rho}\langle k_e^n\nabla_h\pi_e^n,\nabla_h\pi_e^n\rangle.\tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}&\langle G_2^n, d_t\pi_e^n\rangle\Delta t\leq\frac{1}{\rho}M\big(\|T_e\|_{2,c},\|K\|_{1,c}\big)\cdot\big\{|\langle\pi_e^n, d_t\pi_e^n\rangle|\Delta t+|\langle\nabla_h\pi_e^n, d_t\pi_e^n\rangle|\Delta t\big\}\\\leq&M_2^*\|\pi_e^n\|_1^2\Delta t+\varepsilon\|d_t\pi_e^n\|_h^2\Delta t.\end{aligned}\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}&M_1^*\langle|\pi_e^n|+|\pi_i^n|+|\pi_r^n|+\Delta t+h^2,\ d_t\pi_e^n\rangle\Delta t\\\leq&M_3^*\ \big[\|\pi_e^n\|_h^2+\|\pi_i^n\|_h^2+\|\pi_r^n\|_h^2+(\Delta t)^2+h^4\big]\Delta t+\varepsilon\|d_t\pi_e^n\|_h^2\Delta t.\end{aligned}\tag{3.17}$$

为了估计 (3.13) 式左端第三项及 G_7^n, 假定时间和空间剖分参数满足限制性条件

$$\Delta t=O(h^2).\tag{3.18}$$

作归纳假定：当 $0\leq n\leq l$ 时，有

$$\max\big\{\|\pi_e^n\|_{1,\infty},\|\pi_i^n\|_{1,\infty},\|\pi_r^n\|_{1,\infty}\big\}\longrightarrow 0,\qquad h\to 0.\tag{3.19}$$

注意到 $\pi_\alpha^0=0,\ \ \alpha=e,i,r$, 显然 (3.19) 式对 $n=0$ 成立.

由归纳假定 (3.19) 可知，当 $n\leq l$ 时，对充分小的 Δt 和 h, 有

$$\|T_{\alpha h}^n\|_{1,\infty}\leq\|T_\alpha\|_{1,c}+1.$$

假定解 T_e 具有足够的光滑性. 当 $n\leq l$ 时，利用限制性条件 (3.18), 归纳假定 (3.19) 及逆估计

$$\|\delta_{\overline{x}}\delta_x T_{\alpha h}\|_{0,\infty}\leq M_4^*h^{-2}\|T_{\alpha h}\|_{0,\infty},\qquad\|\delta_{\overline{x}}T_{\alpha h}\|_{0,\infty}\leq M_4^*h^{-1}\|T_{\alpha h}\|_{0,\infty},$$

可得

$$\begin{aligned}|G_{7,ij}^n|=&\frac{(\Delta t)^2}{\rho^2}\big|\delta_{\overline{x}}\big(k_e^n\delta_x\big(B_e^{n+1}(\delta_{\overline{y}}(k_e^n\delta_y d_tT_e^n))\big)\big)_{ij}\big|\\\leq&\frac{(\Delta t)^2}{\rho^2}M\Big(\|K\|_{3,c},\|B_e\|_{2,c},\Big\|\frac{\partial T_e}{\partial t}\Big\|_{4,c},\|T_e\|_{1,c}\Big)\cdot h^{-2}\leq M_5^*\Delta t.\end{aligned}\tag{3.20}$$

因此

$$\langle G_7^n, d_t\pi_e^n\rangle\Delta t\leq\ M_6^*(\Delta t)^3+\varepsilon\|d_t\pi_e^n\|_h^2\Delta t.\tag{3.21}$$

利用 $\delta_x\delta_y=\delta_y\delta_x$, $\delta_x\delta_{\overline{y}}=\delta_{\overline{y}}\delta_x$, $\delta_{\overline{x}}\delta_y=\delta_y\delta_{\overline{x}}$, $\delta_{\overline{x}}\delta_{\overline{y}}=\delta_{\overline{y}}\delta_{\overline{x}}$, 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\langle\delta_{\overline{x}}\big(k_e^n\delta_x\big(B_e^{n+1}(\delta_{\overline{y}}(k_e^n\delta_yd_t\pi_e^n))\big)\big),d_t\pi_e^n\rangle\\
=&-\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\langle k_e^n\delta_x\big(B_e^{n+1}\big(\delta_{\overline{y}}(k_e^n\delta_yd_t\pi_e^n)\big)\big),\delta_xd_t\pi_e^n\rangle\\
=&-\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\langle B_e^{n+1}\delta_x\delta_{\overline{y}}(k_e^n\delta_yd_t\pi_e^n)+\delta_xB_e^{n+1}\cdot\delta_{\overline{y}}(k_e^n\delta_yd_t\pi_e^n),\ k_e^n\delta_xd_t\pi_e^n\rangle\\
=&-\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\big\{\langle\delta_{\overline{y}}\delta_x(k_e^n\delta_yd_t\pi_e^n),B_e^{n+1}k_e^n\delta_xd_t\pi_e^n\rangle+\langle\delta_{\overline{y}}(k_e^n\delta_yd_t\pi_e^n),\ \delta_xB_e^{n+1}\cdot k_e^n\delta_xd_t\pi_e^n\rangle\big\}\\
=&\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\big\{\langle\delta_x(k_e^n\delta_yd_t\pi_e^n),\delta_y(B_e^{n+1}k_e^n\delta_xd_t\pi_e^n)\rangle+\langle k_e^n\delta_yd_t\pi_e^n,\delta_y(\delta_xB_e^{n+1}\cdot k_e^n\delta_xd_t\pi_e^n)\rangle\big\}\\
=&\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\langle k_e^n\delta_x\delta_yd_t\pi_e^n+\delta_xk_e^n\cdot\delta_yd_t\pi_e^n,\ B_e^{n+1}k_e^n\delta_x\delta_yd_t\pi_e^n+\delta_y(B_e^{n+1}k_e^n)\cdot\delta_xd_t\pi_e^n\rangle\\
&+\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\langle k_e^n\delta_yd_t\pi_e^n,\delta_x\delta_yB_e^{n+1}\cdot k_e^n\delta_xd_t\pi_e^n\\
&+\delta_xB_e^{n+1}\cdot\delta_yk_e^n\cdot\delta_xd_t\pi_e^n+\delta_xB_e^{n+1}\cdot k_e^n\delta_x\delta_yd_t\pi_e^n\rangle\\
=&\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}k_{e,i,j+\frac12}^nk_{e,i+\frac12,j}^nB_{e,ij}^{n+1}[\delta_x\delta_yd_t\pi_{e,ij}^n]^2\cdot h^2\\
&+\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}k_{e,i,j+\frac12}^n\delta_y\Big(k_{e,i+\frac12,j}^nB_{e,ij}^{n+1}\Big)\cdot\delta_xd_t\pi_{e,ij}^n\cdot\delta_x\delta_yd_t\pi_{e,ij}^n\cdot h^2\\
&+\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}k_{e,i+\frac12,j}^nB_{e,ij}^{n+1}\delta_xk_{e,i,j+\frac12}^n\cdot\delta_yd_t\pi_{e,ij}^n\cdot\delta_x\delta_yd_t\pi_{e,ij}^n\cdot h^2\\
&+\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\Big[\delta_xk_{e,i,j+\frac12}^n\cdot\delta_y\Big(B_{e,ij}^{n+1}k_{e,i+\frac12,j}^n\Big)\Big]\cdot\delta_xd_t\pi_{e,ij}^n\cdot\delta_yd_t\pi_{e,ij}^n\cdot h^2\\
&+\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}k_{e,i,j+\frac12}^nk_{e,i+\frac12,j}^n\delta_xB_{e,ij}^{n+1}\cdot\delta_yd_t\pi_{e,ij}^n\cdot\delta_x\delta_yd_t\pi_{e,ij}^n\cdot h^2\\
&+\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\Big[k_{e,i,j+\frac12}^n\delta_yk_{e,i+\frac12,j}^n\cdot\delta_xB_{e,ij}^{n+1}\Big]\cdot\delta_xd_t\pi_{e,ij}^n\cdot\delta_yd_t\pi_{e,ij}^n\cdot h^2\\
&+\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\Big[k_{e,i,j+\frac12}^nk_{e,i+\frac12,j}^n\cdot\delta_x\delta_yB_{e,ij}^{n+1}\Big]\cdot\delta_xd_t\pi_{e,ij}^n\cdot\delta_yd_t\pi_{e,ij}^n\cdot h^2\\
\equiv&\sum_{m=1}^{7}T_m^n.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

由 (1.6) 式可知

$$
T_1^n\geq\frac{K_*^2}{C^*}\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\|\delta_x\delta_yd_t\pi_e^n\|_h^2\geq0.\tag{3.23}
$$

当 $n\leq l$ 时, 由归纳假定 (3.19) 可以推出 $k_{e,i,j+\frac12}^n,k_{e,i+\frac12,j}^n,\delta_xk_{e,i,j+\frac12}^n,\delta_y\big(k_{e,i+\frac12,j}^nB_{e,ij}^{n+1}\big)$ 有

界，利用 Cauchy 不等式可证

$$|T_2^n| \le M_7^*\big[\|\delta_x\pi_e^n\|_h^2+\|\delta_x\pi_e^{n+1}\|_h^2\big]\Delta t+\frac{1}{3}T_1^n, \tag{3.24}$$

$$|T_3^n| \le M_8^*\big[\|\delta_y\pi_e^n\|_h^2+\|\delta_y\pi_e^{n+1}\|_h^2\big]\Delta t+\frac{1}{3}T_1^n, \tag{3.25}$$

$$|T_5^n| \le M_9^*\big[\|\delta_y\pi_e^n\|_h^2+\|\delta_y\pi_e^{n+1}\|_h^2\big]\Delta t+\frac{1}{3}T_1^n, \tag{3.26}$$

$$|T_4^n+T_6^n+T_7^n| \le M_{10}^*\big[|\pi_e^n|_1^2+|\pi_e^{n+1}|_1^2\big]\Delta t. \tag{3.27}$$

于是 (3.13) 式左端第三项有如下估计式

$$\frac{(\Delta t)^3}{\rho^2}\big|\langle\delta_{\overline{x}}\big(k_e^n\delta_x\big(B_e^{n+1}(\delta_{\overline{y}}(k_e^n\delta_y d_t\pi_e^n))\big)\big),\ d_t\pi_e^n\rangle\big| \le M_{11}^*\left[|\pi_e^n|_1^2+|\pi_e^{n+1}|_1^2\right]\Delta t. \tag{3.28}$$

把 (3.14)–(3,17), (3.21) 和 (3.28) 代入 (3.13), 由 (3.18) 式并从 $n=0$ 到 $n=l$ 作和可得

$$\begin{aligned}
&C_*\sum_{n=0}^{l}\|d_t\pi_e^n\|_h^2\Delta t+\frac{1}{2\rho}\langle k_e^l\nabla_h\pi_e^{l+1},\nabla_h\pi_e^{l+1}\rangle-\frac{1}{2\rho}\langle k_e^0\nabla_h\pi_e^0,\nabla_h\pi_e^0\rangle\\
\le&3\varepsilon\sum_{n=1}^{l}\|d_t\pi_e^n\|_h^2\Delta t+\frac{1}{2\rho}\sum_{n=1}^{l}\langle(k_e^n-k_e^{n-1})\nabla_h\pi_e^n,\nabla_h\pi_e^n\rangle\\
&+M_{12}^*\Big\{h^4+|\pi_e^{l+1}|_1^2\Delta t+\sum_{n=0}^{l}\|\pi_e^n\|_1^2\Delta t+\sum_{n=0}^{l}\|\pi_i^n\|_h^2\Delta t+\sum_{n=0}^{l}\|\pi_r^n\|_h^2\Delta t\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

因为

$$\begin{aligned}
|k_e^n-k_e^{n-1}|=&\big|K(\rho,T_{eh}^n)-K(\rho,T_{eh}^{n-1})\big|\le D^*|d_tT_e^{n-1}-d_t\pi_e^{n-1}|\Delta t\\
\le&M\Big(D^*,\Big\|\frac{\partial T_e}{\partial t}\Big\|_c\Big)\cdot\big\{1+|d_t\pi_e^{n-1}|\big\}\Delta t,
\end{aligned}$$

利用归纳假定 (3.19) 及 Cauchy 不等式可得

$$\Big|\sum_{n=1}^{l}\langle(k_e^n-k_e^{n-1})\nabla_h\pi_e^n,\nabla_h\pi_e^n\rangle\Big|\le\varepsilon\sum_{n=1}^{l}\|d_t\pi_e^{n-1}\|_h^2\Delta t+M_{13}^*\sum_{n=1}^{l}|\pi_e^n|_1^2\Delta t. \tag{3.30}$$

易证

$$\|\pi_e^{l+1}\|_h^2-\|\pi_e^0\|_h^2\le\varepsilon\sum_{n=0}^{l}\|d_t\pi_e^n\|_h^2\Delta t+M_{14}^*\sum_{n=0}^{l+1}\|\pi_e^n\|_h^2\Delta t. \tag{3.31}$$

将 (3.31) 式加到 (3.29) 式中，利用 (3.30) 并取 $5\,\varepsilon\le C_*$，$\Delta t\le\min\big\{\frac{K_*}{4\rho M_{12}^*},\frac{1}{2M_{14}^*}\big\}$, 注意到 $\pi_\alpha^0=0$, 可得

$$\|\pi_e^{l+1}\|_1^2\le M_{15}^*\Big\{h^4+\sum_{n=1}^{l}\Big\|\pi_e^n\|_1^2\Delta t+\sum_{n=1}^{l}\|\pi_i^n\|_h^2\Delta t+\sum_{n=1}^{l}\|\pi_r^n\|_h^2\Delta t\Big\}. \tag{3.32}$$

对离子和光子热传导的误差方程进行类似的分析可得

$$\|\pi_i^{l+1}\|_1^2 \le M_{16}^*\Big\{h^4 + \sum_{n=1}^{l}\|\pi_i^n\|_1^2\Delta t + \sum_{n=1}^{l}\|\pi_e^n\|_h^2\Delta t\Big\}, \tag{3.33}$$

$$\|\pi_r^{l+1}\|_1^2 \le M_{17}^*\Big\{h^4 + \sum_{n=1}^{l}\|\pi_r^n\|_1^2\Delta t + \sum_{n=1}^{l}\|\pi_e^n\|_h^2\Delta t\Big\}. \tag{3.34}$$

于是

$$\sum_{\alpha=e,i,r}\|\pi_\alpha^{l+1}\|_1^2 \le M_{18}^*\Big\{h^4 + \sum_{n=1}^{l}\sum_{\alpha=e,i,r}\|\pi_\alpha^n\|_1^2\Delta t\Big\}. \tag{3.35}$$

利用 Gronwall 不等式即得

$$\sum_{\alpha=e,i,r}\|\pi_\alpha^{l+1}\|_1^2 \le M_{19}^* h^4. \tag{3.36}$$

接下来需验证归纳假定 (3.19) 式当 $n=l+1$ 时成立. 事实上, 由 (3.36) 式及逆估计式

$$\|\pi_\alpha^{l+1}\|_{1,\infty} \le M_{20}^* h^{-1}\|\pi_\alpha^{l+1}\|_1,$$

可得

$$\|\pi_\alpha^{l+1}\|_{1,\infty} \le M_{21}^* h \longrightarrow 0, \qquad h \to 0.$$

即 (3.19) 式当 $n=l+1$ 时成立.

对差分格式 (2.4)–(2.6) 作类似于上面的分析可得到

$$\sum_{\alpha=e,i,r}\|T_{\alpha h}^{l+1}\|_1^2 \le M_{22}^* \sum_{\alpha=e,i,r}\|T_\alpha^0\|_1^2. \tag{3.37}$$

综上所述, 有如下结论.

定理 假设精确解 T_α 及方程系数满足 T_α, $\frac{\partial T_\alpha}{\partial t} \in C^4(\Omega)$, $\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial t^2} \in C(\Omega)$, w_{ei}, $w_{er} \in C(\Omega)$, $1/C_{v\alpha} \in C^2(\Omega)$, $\frac{\partial^3 K}{\partial T_\alpha^3}$ 有界, $(\alpha = e,i,r)$, 且 $\Delta t = O(h^2)$, 则存在常数 M 使

$$\max_{1\le n\le L}\sum_{\alpha=e,i,r}\|T_\alpha^n - T_{\alpha h}^n\|_1^2 \le Mh^4,$$

$$\max_{1\le n\le L}\sum_{\alpha=e,i,r}\|T_{\alpha h}^n\|_1^2 \le M\sum_{\alpha=e,i,r}\|T_\alpha^0\|_1^2.$$

致谢 作者对审稿人的建议表示衷心感谢.

参 考 文 献

1 Kershaw D S. Differencing of the Diffusion Equation in Lagrangian Hydrodynamics Codes. *J Comp. Phys.*, 1981, 39: 375–395

2 符尚武, 付汉清, 沈隆钧. 二维三温热传导方程组的九点差分格式. 数值计算与计算机应用, 1999(3): 237–240

(Fu Shangwu, Fu Hanqing, Shen Longjun. A Nine-point Difference Scheme for the Two-dimensional Equations of Heat Conduction with Three-temperature. *Journal on Numerical Methods and Computer Applications*, 1999(3): 237–240)

3 符尚武，付汉清，沈隆钧，黄书科，陈光南．二维三温能量方程的九点差分格式及其迭代解法．计算物理，1998, 15(4): 489–497
(Fu Shangwu, Fu Hanqing, Shen Longjun, Huang Shuke, Chen Guangnan. A Nine-point Difference Scheme and Iteration Solving Method for Two Dimensional Energy Equations with Three Temperatures. *Chinese Journal of Computational Physics*, 1998, 15(4): 489–497)

4 Yanenko N N 著．周宝熙，林鹏译．分数步法 — 数学物理中多变量问题的解法．北京：科学出版社，1992
(Yanenko N N. The Method of Fractional Steps-the Solution of Problems of Mathematical Physics in Several Variables. Beijing: Science Press, 1992)

5 袁益让．可压缩两相驱动问题的分数步长特征差分格式．中国科学 (A 辑), 1998, 28(10): 893–902
(Yuan Yirang. The Characteristic Finite Difference Fractional Steps Methods for Compressible Two-phase Displacement Problem. *Science in China* (Series A), 1998, 28(10): 893–902)

6 程爱杰. 平面热传导方程 Douglas 交替方向隐格式的稳定性和收敛性．高等学校计算数学学报, 1998, 9(3): 265–272
(Chen Aijie. Improvement of Stability and Convergence for Douglas Scheme in Two Space Variables. *Numerical Mathematics: A Journal of Chinese University*, 1998, 9(3): 265–272)

7 郭本瑜．偏微分方程的差分方法．北京：科学出版社，1988
(The Finite Difference Methods of Partial Differential Equations. Beijing: Science Press, 1988)

8 羊丹平．半导体器件瞬态模拟的对称正定混合元方法．应用数学学报, 2000, 23(3): 444–456
(Yang Danping. A Symmetric Positive Definite Mixed Finite Element Method for Transient Simulation of a Semiconductor Device. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2000, 23(3): 444–456)

FRACTIONAL-STEP IMPLICIT DIFFERENCE SCHEME FOR TWO-DIMENSIONAL EQUATIONS OF HEAT CONDUTION WITH THREE TEMPERATURES

Xie Shusen　　Li Gongchun　　Xue Heng

(*Department of Mathematics, Ocean University of China, Qingdao* 266071)

Abstract A fractional-step implicit finite difference scheme is introduced for two-dimensional equations of heat conduction with three temperatures. The optimal rate of convergence and the stability in discrete H^1-norm for this scheme are derived.

Key words Equations of heat conduction with three temperatures, fractional-step difference scheme, convergence, stability