第 26 卷 第 4 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 26 No. 4
2003 年 10 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Oct., 2003

群体多目标最优化的Lagrange对偶性 *

王晓敏
(上海交通大学数学系，上海 200030)
胡毓达
(温州大学数学与信息科学学院，温州 325027)

摘 要 本文建立了目标和约束为不对称的群体多目标最优化问题的 Lagrange 对偶规划. 在问题的联合弱有效解意义下，得到群体多目标最优化 Lagrange 型的弱对偶定理、基本对偶定理、直接对偶定理和逆对偶定理.

关键词 群体决策，多目标最优化， Lagrange 对偶性，联合弱有效解

1 引言

对偶理论是数学规划的重要研究领域. Lagrange 对偶则是数学规划对偶理论中一种基本的对偶形式. 在 (单目标) 非线性规划 Lagrange 对偶理论的基础上 [1], [2–6] 讨论了多目标最优化关于锥有效解意义下的 Lagrange 对偶问题， [7] 又研究了多目标规划关于锥弱有效解意义下的 Lagrang 对偶性. 这些工作显示，多目标最优化的 Larange 对偶理论比起单目标的非线性最优化的 Lagrange 对偶理论具有更丰富的形式和内容.

群体多目标最优化是群体决策和多目标最优化相交叉的一个新的研究领域，它的理论和方法在大型决策活动中有着广阔的应用前景 [8,9]. [10] 引进群体多目标最优化问题的联合有效解和联合弱有效解的概念，并且建立了这类解的 $K-T$ 条件. 在此基础上，本文对各决策个体具不同目标函数和约束条件的群体多目标最优化问题，建立了在联合弱有效解意义下的 Lagrange 对偶规划. 同时，得到了原问题和对偶问题之间的关系，建立了相应的弱对偶定理、基本对偶定理、直接对偶定理和逆对偶定理.

2 记号与概念

设集合 $X \subset R^n \times R^s$, 集合 $Y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \subset R^{\overline{n}}$ (其中 $\boldsymbol{x} \in R^n, \boldsymbol{t} \in R^s$), 向量函数 $\boldsymbol{f}: R^{\overline{n}} \times R^n \times R^s \to R^m$. 考虑集值映射向量最优化问题

$$V-\min_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\in X} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}), \tag{1}$$

其中集值目标映射 $\boldsymbol{F}: X \to P^m$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) | \boldsymbol{y} \in Y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\}$ (P^m 是 R^m 的幂集).

本文 2001 年 9 月 17 日收到.
* 国家自然科学基金 (70071026 号) 资助项目.

在问题 (1) 中，我们称 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 是决策变量， $\boldsymbol{y}$ 是决策实现变量．当 $(\boldsymbol{x},t)\in X$ 时，设定 $Y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\neq\emptyset$. 这时，称 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ 是 (1) 的可行解， $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ 是 (1) 在 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ 处对应于 $\boldsymbol{y}$ 的目标值， $\boldsymbol{y}$ 是 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ 的可行实现.

特别地，当问题 (1) 中的 $Y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ 是单点集并且不含变量 $\boldsymbol{t}$ 时， (1) 即为通常的多目标最优化问题.

记为 R_+^m 为 R^m 中的正锥，即 $R_+^m=\{\boldsymbol{v}\in R^m\mid \boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}\}$.

定义 1　设 $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{t}})\in X$, $\widetilde{\boldsymbol{y}}\in Y(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{t}})$. 若不存在 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\in X$ 和 $\boldsymbol{y}\in Y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$, 使 $\boldsymbol{f}(\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{t}})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\in int\ R_+^m$, 则称 $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{t}})$ 是问题 (1) 的 Pareto 弱有效解，其集合记作 $w-\min(F,X)$, $\boldsymbol{f}(\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{t}})$ 是 (1) 的 Pareto 弱有效值，其集合记作 $w-\min\boldsymbol{F}(X)$, $\widetilde{\boldsymbol{y}}$ 是 $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{t}})$ 的弱有效实现，其集合记作 $R(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{t}})$.

设有决策群体 $G=\{DM_1,\cdots,DM_l\}$ $(l\geq 2)$, 其中 $DM_r(r=1,\cdots,l)$ 是第 r 个决策者．记 $L=\{1,\cdots,l\}$. 对于 $r\in L$, 设集合 $X_r\subset R^n\times R^{s_r}$, $Y_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^r)\subset R^{\overline{n}}$ (其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$, $\boldsymbol{t}\in R^{s_r}$), 向量函数 $\boldsymbol{f}^r:R^{\overline{n}}\times R^n\times R^{s_r}\to R^{m_r}$. 若 DM_r 对应的集值映射向量最优化问题为

$$V-\min_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^r)\in X_r}\boldsymbol{F}^r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^r),\tag{2}$$

其中集值目标映射 $\boldsymbol{F}^r: X_r\to P^{m_r}$, $\boldsymbol{F}^r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^r)=\left\{\boldsymbol{f}^r(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^r)\mid y\in Y_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^r)\right\}$, 则有群体 G 关于集值目标函数和约束条件不对称的群体多目标最优化问题

$$G-\left\{V-\min_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^1)\in X_1}\boldsymbol{F}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^1),\cdots,V-\min_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^r)\in X_l}\boldsymbol{F}^l(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^l)\right\},\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{t}^r\in\boldsymbol{R}^{s_r}$ $(r\in L)$ 是 DM_r 的决策变量， $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ 和 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^{\overline{n}}$ 分别是各 $DM_r(r\in L)$ 共有的即 G 的决策变量和决策实现变量.

对问题 (2), 当 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^r)\in X_r$ 时，假定 $Y_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^r)\neq\emptyset$, 当 $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{t}^r})\in w-\min(\boldsymbol{F}^r,X_r)$ 时，令 $R_r(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{t}^r})$ 为其弱有效实现集．记 $X=\{X_1,\cdots,X_l\}$, $F=\{F^1,\cdots,F^l\}$, $\boldsymbol{t}=\{\boldsymbol{t}^1,\cdots,\boldsymbol{t}^l\}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=\left\{\boldsymbol{f}^1(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^1),\cdots,\boldsymbol{f}^l(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^l)\right\}$. 令 $A_N=\{L_N\subset L|L_N\text{中元素个数为}N\}$, 其中 $N\in L$.

定义 2　设 $N\in L$.

(i) 若存在 $L_N\in A_N$, 使对任意的 $r\in L_N$, 有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^r)\in X_r$ 和 $y\in Y_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^r)$, 则称 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ 是问题 (3) 的 N- 联合可行解，并且称它由 L_N 生成，其集合记作 X^N,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ 是 (3) 在 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ 处对应于 $\boldsymbol{y}$ 的目标值， $\boldsymbol{y}$ 是 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ 的 N- 联合可行实现，其集合记作 $Y^N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$.

(ii) 若存在 $L_N\in A_N$, 使对任意的 $r\in L_N$, 有 $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{t}}^r)\in w-\min(\boldsymbol{F}^r,X_r)$,$\widetilde{\boldsymbol{y}}\in R_r(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{r}}^r)$, 则称 $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{t}})$ 是问题 (3) 的 N- 联合弱有效解，并且称它由 L_N 生成，其集合记作 $w-\min(\boldsymbol{F},X)^N$, $\boldsymbol{f}(\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{t}})$ 是 (3) 的 N- 联合弱有效值，其集合记作 $w-\min\boldsymbol{F}(X)^N$, $\widetilde{\boldsymbol{y}}$ 是 $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{t}})$ 的 N- 联合弱有效实现，其集合记作 $R^N(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{t}})$.

对于极大化形式的群体多目标最优化问题，类似于定义 2 可以定义其 N- 联合弱有效解和 N- 联合弱有效值，并且分别记作 $w-\max(\boldsymbol{F},X)^N$ 和 $w-\max\boldsymbol{F}(X)^N$.

3　原问题及其 Lagrange 对偶问题

设 $X_0\subset R^n$ 是非空凸集， $\boldsymbol{f}^r:R^n\to R^{m_r}$ 和 $\boldsymbol{g}^r: R^n\to R^{p_r}$ $(r\in L)$ 是 X_0 上的凸

向量函数 $(r \in L)$, $\boldsymbol{h}^r : R^n \to R^{q_r}$ $(r \in L)$ 是 X_0 上的线性向量函数，集合

$$X_r = \left\{\boldsymbol{x} \in X_0 \mid \boldsymbol{g}^r(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{h}^r(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\right\} \neq \emptyset, \qquad r \in L, \tag{4}$$

又设 DM_r 对应于考虑集值映射向量最优化问题

$$V - \min_{\boldsymbol{x} \in X_r} \boldsymbol{f}^r(\boldsymbol{x}), \qquad r \in L, \tag{VP$_r$}$$

则有 G 关于目标和约束不对称的群体多目标最优化问题

$$G - \left\{V - \min_{\boldsymbol{x} \in X_1} \boldsymbol{f}^1(\boldsymbol{x}), \cdots, V - \min_{\boldsymbol{x} \in X_l} \boldsymbol{f}^l(\boldsymbol{x})\right\}. \tag{GVP}$$

在原问题 (GVP) 中， $\boldsymbol{x}$ 是各 (DM_r) $(r \in L)$ 共有的即 G 的决策变量. 记 $X = \{X_1, \cdots, X_l\}$, $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{f}^1, \cdots, \boldsymbol{f}^l\}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left\{\boldsymbol{f}^1(\boldsymbol{x}), \cdots, \boldsymbol{f}^l(\boldsymbol{x})\right\}$.

首先，构造 $(VP_r)(r \in L)$ 的 Lagrange 对偶问题. 为此，对实数 a_r, 记 $\langle a_r \rangle = (a_r, \cdots, a_r)^T \in R^{m_r}$, 并令

$$W_r = R_+^{p_r} \times R^{q_r}, \qquad r \in L, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{L}^r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r) = \boldsymbol{f}^r(\boldsymbol{y}) + \left\langle \boldsymbol{u}^{rT} \boldsymbol{g}^r(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{v}^{rT} \boldsymbol{h}^r(\boldsymbol{y}) \right\rangle, \qquad r \in L, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^r(\boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r) = w - \min L^r(X_0, \boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r), \qquad r \in L. \tag{7}$$

由 [5] 知，对 $(\boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r) \in W_r$, 存在非空集合 $Y_r(\boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r) \subset X_0$，使 $\boldsymbol{\Phi}^r(\boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r) = \left\{L^r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r) \mid \boldsymbol{y} \in Y_r(\boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r)\right\}$. 于是，式 (7) 变为,

$$\boldsymbol{\Phi}^r(\boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r) = \left\{\boldsymbol{L}^r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r) \mid \boldsymbol{y} \in Y_r(\boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r)\right\}, \qquad r \in L. \tag{8}$$

从而得 $(\mathrm{VP})_r$ 的多目标 Lagrange 对偶问题

$$V - \max_{(\boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r) \in W_r} \boldsymbol{\Phi}^r(\boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r), \qquad r \in L. \tag{VD$_r$}$$

根据以上讨论，我们构造原问题 (GVP) 的群体多目标 Lagrange 对偶问题

$$G - \left\{V - \max_{(\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{v}^1) \in W_1} \boldsymbol{\Phi}^1(\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{v}^1), \cdots, V - \max_{(\boldsymbol{u}^l, \boldsymbol{v}^l) \in W_l} \boldsymbol{\Phi}^l(\boldsymbol{u}^l, \boldsymbol{v}^l)\right\}. \tag{GVD}$$

由 (8) 可知，在对偶问题 (GVD) 中， $(\boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r)$ $(r \in L)$ 是 DM_r 的决策变量， $\boldsymbol{y}$ 是各个 DM_r $(r \in L)$ 共有的即 G 的决策实现变量.

对于问题 $(\mathrm{VD})_r (r \in L)$, 令 $R_r(\widetilde{\boldsymbol{u}}^r, \widetilde{\boldsymbol{v}}^r)$ 为 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}^r, \widetilde{\boldsymbol{v}}^r) \in w - \max(\boldsymbol{\Phi}^r, W_r)$ 的弱有效实现. 记 $W = \{W_1, \cdots, W_l\}$, $\boldsymbol{\Phi} = \{\boldsymbol{\Phi}^1, \cdots, \boldsymbol{\Phi}^l\}$, $\boldsymbol{u} = \{\boldsymbol{u}^1, \cdots, \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{l}}\}$, $\boldsymbol{v} = \{\boldsymbol{v}^1, \cdots, \boldsymbol{v}^l\}$, $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \left\{\boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{v}^1), \cdots, \boldsymbol{L}^l(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}^l, \boldsymbol{v}^l)\right\}$.

4 对偶定理

先给出 (GVP) 和 (GVD) 在 $N-$ 联合可行解处的目标值之间的关系.

定理 1（**弱对偶**） 设 $N \in L$, $\boldsymbol{x} \in X^N$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in W^N$, $\boldsymbol{y} \in Y^N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. 若存在 $L_N \in A_N$, 使 $\boldsymbol{x}$ 和 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 分别由 L_N 生成，则对任意的 $r \in L_N$, 有 $\boldsymbol{L}^r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r) - \boldsymbol{f}^r(\boldsymbol{x}) \notin \mathrm{int}\, R_+^{m_r}$.

证　用反证法. 假设存在某个 $r \in L_N$, 使 $\boldsymbol{L}^r(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r) - \boldsymbol{f}^r(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{int} R_+^{m_r}$. 由条件 $\boldsymbol{x} \in X^N$, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in W^N$ 和 $\boldsymbol{y} \in Y^N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, 据定义 2 知

$$\boldsymbol{x} \in X_r, \qquad (\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r) \in W_r, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{y} \in Y_r(\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r). \tag{10}$$

由式 (9) 据式 (4) 和 (5) 得 $\boldsymbol{u}^{rT}\boldsymbol{g}^r(\boldsymbol{x}) \le 0$, $\boldsymbol{v}^{rT}\boldsymbol{h}^r(\boldsymbol{x}) = 0$, 即 $-\langle \boldsymbol{u}^{rT}\boldsymbol{g}^r(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}^{rT}\boldsymbol{h}^r(\boldsymbol{x})\rangle \in R_+^{m_r}$. 于是，利用式 (6) 和所做假设知,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^r(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r) - \boldsymbol{L}^r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r) =& \boldsymbol{L}^r(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r) - \boldsymbol{f}^r(\boldsymbol{x}) - \langle \boldsymbol{u}^{rT}\boldsymbol{g}^r(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}^{rT}\boldsymbol{h}^r(\boldsymbol{x})\rangle \\ &\in \operatorname{int} R_+^{m_r} + R_+^{m_r} = \operatorname{int} R_+^{m_r},\end{aligned}$$

再由 $\boldsymbol{x} \in X_0$ 和式 (8) 得

$$\boldsymbol{L}^r(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r) \notin w - \min \boldsymbol{L}^r(X_0,\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r) = \big\{\boldsymbol{L}^r(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r) \mid \boldsymbol{y} \in Y_r(\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r)\big\},$$

即 $\boldsymbol{y} \notin Y_r(\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r)$, 导致与 (10) 矛盾.

推论 1　设 $r \in L$. 若 $\boldsymbol{x} \in X_r$, $(\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r) \in W_r$, $\boldsymbol{y} \in Y_r(\boldsymbol{u}^r, \boldsymbol{v}^r)$, 则 $L^r(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r) - \boldsymbol{f}^r(\boldsymbol{x}) \notin \operatorname{int} R_+^{m_r}$.

证　令 $N = 1$, $L_N = \{r\}$, 由定理 1 立即得证.

定理 2　(基本对偶) 设 $N \in L$, $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in X^N$, $(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}}) \in W^N$, $\widetilde{\boldsymbol{y}} \in Y^N(\widetilde{\boldsymbol{u}}, \widetilde{\boldsymbol{v}})$. 若存在 $L_N \in A_N$, 使 $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ 和 $(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}})$ 分别由 L_N 生成，并且对任意的 $r \in L_N$ 有 $\boldsymbol{f}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{L}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}}, \widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r)$, 则 $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in w - \min(\boldsymbol{f}, X)^N$, $(\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r) \in w - \max(\boldsymbol{\Phi}, W)^N$, $\widetilde{\boldsymbol{y}} \in R^N(\widetilde{\boldsymbol{u}}, \widetilde{\boldsymbol{v}})$.

证　由条件 $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in X^N$, $(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}}) \in W^N$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{y}} \in Y^N(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}})$, 据定义 2 知，对任意的 $r \in L_N$ 有

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} \in X_r, \tag{11}$$

$$(\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r) \in W_r, \qquad \widetilde{\boldsymbol{y}} \in Y_r(\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r). \tag{12}$$

先证明对任意的 $r \in L_N$ 有 $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in w - \min(\boldsymbol{f}^r, X_r)$. 用反证法，假设存在 $r \in L_N$, 使 $\widetilde{\boldsymbol{x}} \notin w - \min(\boldsymbol{f}^r, X_r)$, 则由式 (11) 知，存在

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in X_r, \tag{13}$$

使 $\boldsymbol{f}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) \in \operatorname{int} R_+^{m_r}$, 于是由条件 $\boldsymbol{f}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{L}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r)$ 得 $\boldsymbol{L}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r) - \boldsymbol{f}^r(\bar{\boldsymbol{x}}) \in \operatorname{int} R_+^{m_r}$, 但由式 (12) 和 (13) 知，此式与引理 1 矛盾，因此对任意的 $r \in L_N$ 有 $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in E(\boldsymbol{f}^r, X_r)$. 据此，由定义 2 得 $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in w - \min(\boldsymbol{f}, X)^N$.

再证明对任意的 $r \in L_N$ 有 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r) \in w - \max(\boldsymbol{\Phi}^r, W_r)$. 用反证法，假设存在 $r \in L_N$ 使 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r) \notin w - \max(\boldsymbol{\Phi}^r, W_r)$, 则 $\boldsymbol{L}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r) \notin w - \max \boldsymbol{\Phi}^r(W_r)$, 由定义 1 和式 (12) 知，存在

$$(\bar{\boldsymbol{u}}^r,\bar{\boldsymbol{v}}^r) \in W_r, \qquad \bar{\boldsymbol{y}} \in Y_r(\bar{\boldsymbol{u}}^r,\bar{\boldsymbol{v}}^r), \tag{14}$$

使 $\boldsymbol{L}^r(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{u}}^r,\bar{\boldsymbol{v}}^r) - \boldsymbol{L}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r) \in \operatorname{int} R_+^{m_r}$. 于是，由条件 $\boldsymbol{L}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r) = \boldsymbol{f}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}})$ 得 $\boldsymbol{L}^r(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{u}}^r,\bar{\boldsymbol{v}}^r) - \boldsymbol{f}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}}) \in \operatorname{int} R_+^{m_r}$, 但从式 (11) 和 (14) 知此式与引理 1 矛盾. 根据定义 2 得 $(\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r) \in w - \max(\boldsymbol{\Phi}, W)^N$.

下面给出 (GVP) 的 N- 联合有效解和 (GVD) 的 N- 联合有效解之间的关系.

对于 $r\in L$, 记 $\boldsymbol{e}^r=(1,\cdots,1)^T\in R^{m_r}$, $\varLambda_+^r=\{\boldsymbol{\lambda}^r\in R_+^{m_r}\mid \boldsymbol{\lambda}^{rT}\boldsymbol{e}^r=1\}$. 显然，对任意的 $\boldsymbol{\lambda}^r\in\Lambda_+^r$, $\boldsymbol{x}\in X_0$, $\boldsymbol{u}^r\in R^{p_r}$, $\boldsymbol{v}^r\in R^{q_r}$ 有

$$\boldsymbol{\lambda}^{rT}\boldsymbol{f}^r(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{u}^{rT}\boldsymbol{g}^r(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v}^{rT}\boldsymbol{h}^r(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\lambda}^{rT}\boldsymbol{L}^r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}^r). \tag{15}$$

定义 3 (i) 若对任意的 $r\in L$, $(\mathrm{VP})_r$ 是 X_0 上的凸规则，则称 (GVP) 是凸规划问题.

(ii) 若对任意的 $r\in L$, 存在 $\boldsymbol{x}^r\in X$, 使得 $\boldsymbol{g}^r(\boldsymbol{x}^r)<\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{h}^r(\boldsymbol{x}^r)=\boldsymbol{0}$, 则称问题 (GVP) 满足 Slater 条件.

定理 3 (直接对偶) 设问题 (GVP) 满足 Slater 条件，$N\in L$. 若 $\widetilde{\boldsymbol{x}}\in w-\min(\boldsymbol{f},X)^N$, 则 $\boldsymbol{f}(\widetilde{\boldsymbol{x}})\in w-\max\boldsymbol{\Phi}(W)^N$.

证 由 $\widetilde{\boldsymbol{x}}\in w-\min(\boldsymbol{f},X)^N$ 和定义 2 知，存在 $L_N\in A_N$, 使对任意的 $r\in L_N$ 有 $\widetilde{\boldsymbol{x}}\in w-\min(\boldsymbol{f}^r,X_r)$.

先考虑 $r\in L_N$. 在凸性假设下，由 $\widetilde{\boldsymbol{x}}\in w-\min(\boldsymbol{f}^r,X_r)$ 据 [11] 可知，存在 $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^r\in\Lambda_+^r$ 使得

$$\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^{rT}\boldsymbol{f}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}})=\min\ \{\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^{rT}\boldsymbol{f}^r(\boldsymbol{x})\mid \boldsymbol{x}\in X_0,\ \boldsymbol{g}^r(\boldsymbol{x})\le\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{h}^r(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}. \tag{16}$$

由式 (16) 据 [1] 得知，存在

$$(\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r)\in W_r, \tag{17}$$

使 $\widetilde{\boldsymbol{u}}^{rT}\boldsymbol{g}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}})=0$, 并且

$$\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^{rT}\boldsymbol{f}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}})+\widetilde{\boldsymbol{u}}^{rT}\boldsymbol{g}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}})+\widetilde{\boldsymbol{v}}^{rT}\boldsymbol{h}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}})=\min\ \{\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^{rT}\boldsymbol{f}^r(\boldsymbol{x})+\widetilde{\boldsymbol{u}}^{rT}\boldsymbol{g}^r(\boldsymbol{x})+\widetilde{\boldsymbol{v}}^{rT}\boldsymbol{h}^r(\boldsymbol{x})\mid \boldsymbol{x}\in X_0\}.$$

于是，由 $\boldsymbol{h}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{0}$ 和式 (15) 得 $\boldsymbol{f}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{f}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}})+\langle\widetilde{\boldsymbol{u}}^{rT}\boldsymbol{g}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}})+\widetilde{\boldsymbol{v}}^{rT}\boldsymbol{h}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}})\rangle=\boldsymbol{L}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r)$, 即

$$\boldsymbol{f}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{L}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r), \tag{18}$$

$\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^{rT}\boldsymbol{L}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r)=\min\ \{\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^{rT}\boldsymbol{L}^r(\boldsymbol{x},\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r)\mid \boldsymbol{x}\in X_0\}$, 根据 [11] 再由 $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^r\in\Lambda_+^r$ 和上式有 $\boldsymbol{L}^r(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r)\in w-\min\boldsymbol{L}^r(X_0,\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r)$, 故据式 (8) 得

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}\in Y_r(\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r). \tag{19}$$

再设 $r\in L\setminus L_N$. 取 $\widetilde{\boldsymbol{u}}^r=\boldsymbol{0}$, $\widetilde{\boldsymbol{v}}^r=\boldsymbol{0}$, 则式 (18) 也成立.

于是，由式 (18) 得

$$\boldsymbol{f}(\widetilde{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{L}(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}}). \tag{20}$$

由 $\widetilde{\boldsymbol{x}}\in w-\min(\boldsymbol{f},X)^N$ 知 $\widetilde{\boldsymbol{x}}\in X_N$, 由 (17) 和 (19) 知 $(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}})\in W^N$, $\widetilde{\boldsymbol{x}}\in Y^N(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}})$, 并且 $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ 和 $(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}})$ 分别由 L_N 生成，因此由式 (20) 根据定理 2 得 $(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}})\in w-\max(\boldsymbol{\Phi},W)^N$, $\widetilde{\boldsymbol{x}}\in R^N(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}})$, 即 $\boldsymbol{f}(\widetilde{\boldsymbol{x}})\in w-\max\boldsymbol{\Phi}(W)^N$.

定理 4 (逆对偶) 设 $N\in L$. 若 $\widetilde{\boldsymbol{y}}\in X^N$, $\boldsymbol{f}(\widetilde{\boldsymbol{y}})\in w-\max\boldsymbol{\Phi}(W)^N$, 并且它们分别由 $L_N\in A_N$ 生成，则 $\widetilde{\boldsymbol{y}}\in w-\min(\boldsymbol{f},X)^N$.

证：由 $\widetilde{\boldsymbol{y}}\in X^N$ 和 $\boldsymbol{f}(\widetilde{\boldsymbol{y}})\in w-\max\boldsymbol{\Phi}(W)^N$ 据定义 2 知，存在 $(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}})\in W^N$, 使对任意的 $r\in L_N$ 有

$$\widetilde{\boldsymbol{y}}\in X_r, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{f}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}})\in\boldsymbol{\Phi}^r(\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r). \tag{22}$$

设 $r \in L_N$, 则由式 (21) 得 $\widetilde{\boldsymbol{u}}^{rT}\boldsymbol{g}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}}) \leq 0$, $\widetilde{\boldsymbol{v}}^{rT}\boldsymbol{h}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}}) = 0$. 若 $\widetilde{\boldsymbol{u}}^{rT}\boldsymbol{g}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}}) < 0$, 则由式 (6) 知 $\boldsymbol{f}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}}) - \boldsymbol{L}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r) = -\langle\widetilde{\boldsymbol{u}}^{rT}\boldsymbol{g}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}})\rangle \in \operatorname{int} R_+^{m_r}$. 据此，由式 (21) 和 (8) 得 $\boldsymbol{f}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}}) \notin w - \min \boldsymbol{L}^r(X_0,\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r) = \Phi^r(\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r)$, 它与式 (22) 矛盾. 因此， $\widetilde{\boldsymbol{u}}^{rT}\boldsymbol{g}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}}) = 0$, 即 $\boldsymbol{f}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{L}^r(\widetilde{\boldsymbol{y}},\widetilde{\boldsymbol{u}}^r,\widetilde{\boldsymbol{v}}^r)$, 由定理 2 得 $\widetilde{\boldsymbol{y}} \in w - \min(\boldsymbol{f}, X)^N$.

参 考 文 献

1 Avriel M, translated by Li Y X etc. Nonlinear Programming: Analysis and Methods. Shanghai: Shanghai Sci. & Tech. Press Inc., 1979 (in Chinese)

2 Tanino T, Sawaragi Y. Duality Theory in Multiobjective Programming. *J. Optim. Theory Appl.*, 1979, 27: 509–529

3 Tanino T. Saddle Points and Duality in Multi-objective Programming. *Internet J. Systems Sci.*, 1982, 13: 323–325

4 Nakayama H. Geometric Consideration of Duality in Vector Optimization. *J. Optim. Theory Appl.*, 1984, 44: 625–655

5 Sawaragi Y, Nakayama H, Tanino T. Theory of Multiobjective Optimization. Floride: Academic Press Inc, 1985

6 Lin C Y, Dong J L. Methods and Theory for Multiobjective Programming. Jilin: Jilin Edu. Press Inc, 1992 (in Chinese)

7 Li Z F, Wang S Y. Lagrange Duality and Scalarization in Multiobjective Programming. *J. Systems Sci & Math. Sci.*, 1993, 13(3): 211–217 (in Chinese)

8 Wedell R E. Multiple Objective Mathematical Programming with Respect to Multiple Decision Makers. Operations Reserch, 1980, 28: 1100–1112

9 Huang C L, Lin M J. Group Decision Making under Multiple Criteria. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

10 Hu Y D. A Class of the Joint Efficient Solution and its Optimality Conditions in Group Multiobjective Programming. *J. Shanghai Jiaotong Univ.*, 1999, 33(6): 642–645 (in Chinese)

11 Hu Y D. Efficient Theory of Multiobjective Programming. Shanghai: Shanghai Sci. & Tech. Press Inc, 1994 (in Chinese)

LAGRANGE DUALITY FOR GROUP MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION

WANG Xiaomin

(*Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)

HU Yuda

(*School of Mathematics and Information Sciences, Wenzhou University, Wenzhou* 325027)

Abstract Lagrange duality programming is established for Group Multiobjective Optimization which contains the unsymmetrical objective functions and conditions. The weak duality theorem, the basic duality theorem, the direct duality theorem and the adverse duality theorem under the means of the joint weak efficient solution are derived.

Key words Group decision making, Lagrange duality, multiobjective optimization, joint weak efficient solution