第 26 卷 第 4 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 26 No. 4
2003 年 10 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Oct., 2003

非线性互补约束优化问题的可行性条件 *

万 中　　周叔子

(湖南大学数学与计量经济学院，长沙 410082)

摘　要　本文研究了非线性互补约束优化问题的可行性条件，其中约束条件除互补问题外还包括第一水平 (设计) 变量和第二水平 (状态) 变量同时出现的其它非线性约束，它是线性互补约束优化问题的可行性条件的推广.

关键词　带平衡约束的数学规划，非线性互补，　SQP，可行性

1　引言

所谓带平衡约束的优化问题 (简称 MPEC) 是指约束条件中除通常的等式或不等式约束外，还包含带参数的互补条件或带参数的变分不等式，后者称为平衡约束条件，至今该类问题的大部分主要分析结果局限于仅仅允许第一水平 (设计) 变量与第二水平 (状态) 变量同时出现于平衡约束条件中，在其它的等式或不等式约束中不能包含第二水平变量 (参看文献 [1–4]). 其根本原因在于无法解决 MPEC 本身或数值方法 (如磨光 SQP 方法) 中构造的子问题的可行性问题，寻找可行域非空的条件.

[5] 第一次给出了如下的 MPEC 可行性充分条件：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x,y) \\ \text{subject to} & Ax+By=b, \\ & \omega = Nx+My-q, \\ & \omega^T y = 0, \qquad x\in C,\quad y\geq 0,\quad \omega\geq 0, \end{array} \tag{1.1}$$

其中 $f: R^{n+m}\to R$ 连续可微，　$A\in R^{p\times n}$，$B\in R^{p\times m}$，$N\in R^{m\times n}$ 和 $M\in R^{m\times m}$ 为已知向量，　C 为 R^n 中的凸多面锥，平衡约束条件是线性互补问题．本文在此基础上进一步讨论带非线性互补问题的 MPEC 的可行性条件.

2　问题及其可行性条件

我们考虑如下 MPEC:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x,y) \\ \text{subject to} & g(x,y)=0, \\ & h(x,y)\geq 0, \\ & 0\leq y\perp F(x,y)\geq 0, \end{array} \tag{2.1}$$

本文 2000 年 12 月 12 日收到．2003 年 7 月 2 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (70271019 号) 资助项目.

其中 $f: R^{n+m} \to R,\ \ g: R^{n+m} \to R^l,\ \ h: R^{n+m} \to R^p,\ \ F: R^{n+m} \to R^m$ 连续可微， x 为第一水平 (设计) 变量， y 为第二水平 (状态) 变量，平衡约束条件为带参数 x 的非线性互补问题：

$$0 \le y \perp F(x,y) \ge 0.$$

针对问题 (2.1), 我们引入两个假设：

(A$_1$) 蕴含式

$$\left.\begin{array}{l}[\nabla_x g^T, -\nabla_x h^T]u + \nabla_x F^T v = 0 \\ vo\big([\nabla_y g^T, -\nabla_y h^T]u + \nabla_y F^T v\big) \le 0\end{array}\right\} \longrightarrow vo\big([\nabla_y g^T, -\nabla_y h^T]u + \nabla_y F^T v\big) = 0 \quad (2.2)$$

成立，其中 o 表示 Hadamard 乘积.

(A$_2$) 下列非线性系统的解集 S 非空.

$$\begin{cases} g(x,y) = 0, \\ h(x,y) \ge 0, \\ y \ge 0, \\ F(x,y) \ge 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

且

$$\mathrm{SFD}\,(x,y,S) = \mathrm{LFD}\,(x,y,S), \qquad \forall\,(x,y) \in S, \quad (2.4)$$

这里， SFD 和 LFD 分别表示序列可行方向集和线性化可行方向集 (见 [6]), 实际上, (2.4) 可减弱到仅要求在下列非线性规划问题的全局极小点处成立：

$$\begin{array}{ll} \min & y^T F(x,y), \\ \text{s.t.} & (2.3) \end{array} \quad (2.5)$$

[6] 给出了许多使 (2.4) 式成立的充分性条件.

注 可以验证当 (2.1) 中的 $g(x,y), h(x,y)$ 和 $F(x,y)$ 为仿射函数时， [5] 中两个可行性充分条件蕴涵假设 (A$_1$), (A$_2$).

对给定的 (x,y), 用 S_0 表示下列线性方程组的解集

$$[\nabla_x g^T, -\nabla_x h^T]u + \nabla_x F^T v = 0,$$

则 S_0 为闭凸锥，下面进一步给出 A$_1$ 成立的两个充分性条件.

定理 2.1 对给定的 (x,y), 如果矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \nabla_y g \\ 0 & 0 & -\nabla_y h \\ -\nabla_y g^T & -\nabla_y h^T & 2\nabla_y F \end{pmatrix}$$

在 S_0 上协正定，则假设 (A$_1$) 成立.

证 设 (u,v) 满足蕴含式 (2.2) 的左边，则 $(u,v) \in S$. 因此，根据 P 在 S 上协正定，我们有

$$\begin{aligned}(u^T, v^T)\,P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= 2v^T[\nabla_y g^T, -\nabla_y h^T]\,u + 2v^T\,\nabla_y F v \\ &= 2v^T\big([\nabla_y g^T, -\nabla_y h^T]\,u + \nabla_y F^T v\big) \ge 0.\end{aligned}$$

由此及 (u,v) 满足条件

$$vo\big(\,[\nabla_y g^T, -\nabla_y h^T]\,u + \nabla_y F^T v\big) \le 0,$$

即推出蕴含式 (2.2) 的右边.

定理 2.2. 假设 $\nabla_y F$ 为半正定阵, 对给定的 $(x,y)\in R^{n+m}$, 下列关于变量 $z\in R^n$ 的线性方程组

$$\begin{pmatrix} \nabla_x g \\ -\nabla_x h \\ \nabla_x F \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 \\ [\nabla_y g^T, -\nabla_y h^T]u \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

对一切 $u\in R^{p+l}$ 恒有解, 则 (A_1) 成立.

证 假设 (u,v) 满足蕴含式 (2.2) 的左边, 则有

$$[\nabla_x g^T, -\nabla_x h^T]u + \nabla_x F^T v = 0, \tag{2.7}$$

$$vo\big([\nabla_y g^T, -\nabla_y h^T]u + \nabla_y F^T v\big) \le 0. \tag{2.8}$$

由 (2.8) 式可得

$$v^T\big([\nabla_y g^T, -\nabla_y h^T]u + \nabla_y F^T v\big) \le 0,$$

即

$$v^T[\nabla_y g^T, -\nabla_y h^T]u \le -v^T\nabla_y F^T v \le 0,$$

其中第二个不等式用到 $\nabla_y F$ 的半正定性.

对上述 u, 由于线性方程组 (2.6) 式有解, 不妨记之为 $\overline{z}$, 则有

$$\nabla_x F\overline{z} = [\nabla_y g^T, -\nabla_y h^T]u, \qquad \begin{pmatrix} \nabla_x g \\ -\nabla_x h \end{pmatrix}\overline{z} = 0, \tag{2.9}$$

因此

$$\begin{aligned}[\nabla_y g^T, -\nabla_y h^T]u =& u^T\nabla_x F\overline{z} + u^T\begin{pmatrix} \nabla_x g \\ -\nabla_x h \end{pmatrix}\overline{z} \\ =& (\overline{z})^T[\nabla_x g^T, -\nabla_x h^T]u + \nabla_x F^T v = 0.\end{aligned} \tag{2.10}$$

利用 (2.9), (2.10) 可得:

$$u^T\nabla_y F^T v = 0.$$

因而

$$v^T\big([\nabla_y g^T, -\nabla_y h^T]u + v^T\nabla_y F^T v\big) = 0,$$

从而不难证明

$$vo\big([\nabla_y g^T, -\nabla_y h^T]u + \nabla_y F^T v\big) = 0.$$

定理 2.3 设 (A_1) 和 (A_2) 成立, 且 (2.3) 定义的 S 与 $y^T F(x,y)$ 的水平集的交集有界, 则 MPEC(2.1) 具有非空可行域.

证　由于 $y \geq 0$, $F(x,y) \geq 0$ 从而函数 $y^T F(x,y)$ 下有界，所以在定理条件下 (2.5) 必存在最优解 $(\overline{x},\overline{y})$ 和相应乘子向量 $(\lambda,\mu,\theta,\xi) \in R^{l+p+2m}$ 使得

$$\begin{cases} \bigtriangledown_x F^T y + \bigtriangledown_x g^T \lambda - \bigtriangledown_x h^T \mu - \bigtriangledown_x F^T \zeta = 0, & \\ F(x,y) + \bigtriangledown_x F^T y + \bigtriangledown_y h^T \mu - \theta - \bigtriangledown_y F^T \zeta = 0, & \\ \mu_i \geq 0, \quad h_i(x,y) \geq 0, \quad \mu_i h_i(x,y) = 0, & i = 1,2,\cdots,p, \\ \theta_j \geq 0, \quad y_j \geq 0, \quad \theta_j y_j = 0, & j = 1,2,\cdots,m, \\ \zeta_k \geq 0, \quad F_k(x,y) \geq 0, \quad \xi_k F_k(x,y) = 0, & k = 1,2,\cdots,m, \end{cases}$$

即

$$\big(\bigtriangledown_x F^T (y-\zeta) + \big) [\bigtriangledown_x g^T, \; - \bigtriangledown_x h^T] \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = 0, \tag{2.11}$$

$$\bigtriangledown_y F^T (y-\zeta) + [\bigtriangledown_y g^T, - \bigtriangledown_y h^T] \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \theta - F(x,y), \tag{2.12}$$

$$\mu \geq 0, \qquad h(x,y) \geq 0, \qquad \mu \circ h(x,y) = 0, \tag{2.13}$$

$$\theta \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad \theta \circ y = 0, \tag{2.14}$$

$$\zeta \geq 0, \qquad F(x,y) \geq 0, \qquad \zeta \circ F(x,y) = 0, \tag{2.15}$$

记

$$\phi = \theta - F(x,y), \qquad \psi \equiv \bigtriangledown_y F^T (y-\zeta) + [\bigtriangledown_y g^T - \bigtriangledown_y h^T] \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

在 (2.12) 式两边同乘以 y, 则 $y \circ F(x,y) = y \circ \theta - y \circ \psi$. 根据 (2.14) 式有 $y \circ F(x,y) = -y \circ \psi$. 又因为

$$\begin{aligned} (y-\zeta) \circ \psi =& (y-\zeta) \circ \big(\theta - F(x,y)\big) \\ =& y \circ \theta - y \circ F(x,y) - \zeta \circ \theta + \zeta \circ F(x,y) \\ =& - y \circ F(x,y) - \zeta \circ \theta \leq 0, \end{aligned}$$

其中第三个等式和最后的不等式由 (2.14) 和 (2.15) 式得到．令

$$u = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \qquad v = y - \zeta,$$

则由假设 (A_1) 和 (2.11) 式可得 $(y-\zeta) \circ \psi = 0$, 从而 $y \circ F(x,y) = -y \circ \psi = -\zeta \circ \psi = -\zeta \circ \big(\theta - F(x,y)\big) = -\zeta \circ \theta \leq 0$. 另一方面，$y \geq 0$, $F(x,y) \geq 0$, 从而，$y \circ F(x,y) = 0$. 由此可知，$y^T F(x,y) = 0$. 否则存在 $i_0 \in \{1,2,\cdots,m\}$, 使得 $y_{i_0} F_{i_0} \neq 0$, 从而有 $y_{i_0} F_{i_0}(x,y) > 0$ 矛盾.

3　一类 MPEC 的 SQP 算法中子问题的可行性

[7] 研究了求解下述非线性互补问题约束化问题的磨光 SQP 算法，

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x,y) \\ \text{subject to} & h(x,y) \geq 0, \\ & 0 \leq y \perp F(x,y) \geq 0. \end{array}$$

它是问题 (2.1) 略去等式约束时的特殊情形. 具体地说, 该算法将上述 MPEC 磨光为通常的带参数的非线性规划问题.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x,y) \\ \text{s.t.} & h(x,y) \geq 0, \\ & F(x,y) - w = 0 \\ & \Phi(y,w,\mu) = 0, \end{array}$$

其中 μ 为非负磨光参数, 函数 $\Phi: R^{2m} \times [0,\infty) \to R^m$ 定义为

$$\Phi(y,w,\mu) = \begin{pmatrix} y_1 + w_1 - (y_1^2 + w_1^2 + \mu)^{1/2} \\ \vdots \\ y_m + w_m - (y_m^2 + w_m^2 + \mu)^{1/2} \end{pmatrix},$$

并在算法的每一迭代步求解 (3.1) 的如下二次逼近问题:

$$\begin{array}{ll} \text{minmize} & \bigtriangledown f(x^k,y^k)^T \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\mathrm{d}x^T, \mathrm{d}y^T, \mathrm{d}w^T) Q_k \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}w \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} & \bigtriangledown_x h \, \mathrm{d}x + \bigtriangledown_y h \, \mathrm{d}y + h(x^k,y^k) \geq 0, \\ & \bigtriangledown_x F \, \mathrm{d}x + \bigtriangledown_y F \, \mathrm{d}y - \mathrm{d}w + \big(F(x^k,y^k) - w^k\big) = 0, \\ & D_y^k \, \mathrm{d}y + D_w^k \, \mathrm{d}w + \Phi(y^k, w^k, \mu_k) = 0, \end{array} \tag{3.2}$$

这里, $Q_k \in R^{(n+2m)\times(n+2m)}$ 为对称正定阵, 而

$$\begin{array}{ll} \bigtriangledown_x h \equiv \bigtriangledown_x h(x^k,y^k), & \bigtriangledown_y h \equiv \bigtriangledown_y h(x^k,y^k), \\ \bigtriangledown_x F \equiv \bigtriangledown_x F(x^k,y^k), & \bigtriangledown_y F \equiv \bigtriangledown_y F(x^k,y^k), \\ D_y^k \equiv \bigtriangledown_y \Phi(y^k,w^k,\mu_k), & D_w^k \equiv \bigtriangledown_w \Phi(y^k,w^k,\mu_k), \end{array}$$

我们将证明假设 (A_1) 能够保证子问题 (3.2) 的可行性.

消去 (3.2) 约束条件中的 $\mathrm{d}w$, 则约束条件可写成:

$$\begin{cases} \bigtriangledown_x h \, \mathrm{d}x + \bigtriangledown_y h \, \mathrm{d}y \geq -h(x^k,y^k), \\ (D_w^k \bigtriangledown_x F) \, \mathrm{d}x + (D_y^k + D_w^k \bigtriangledown_y F) \, \mathrm{d}y = s^k, \end{cases}$$

其中, $S^k \equiv -\Phi(y^k,w^k,\mu_k) + D_w^k(F(x^k,y^k) - w^k)$, 写成:

$$\begin{cases} \bigtriangledown_x h \, \mathrm{d}x + \bigtriangledown_y h \, \mathrm{d}y \geq -h(x^k,y^k), \\ \bigtriangledown_x F \, \mathrm{d}x + \big((D_w^k)^{-1} D_y^k + \bigtriangledown_y F\big) \, \mathrm{d}y = (D_w^k)^{-1} s^k. \end{cases} \tag{3.3}$$

由 [8] 中的定理 2.7.8 可知, (3.3) 式关于变量 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 有解等价于

$$\left.\begin{array}{l} \bigtriangledown_x h^T u + \bigtriangledown_x F^T v = 0, \\ \bigtriangledown_y h^T u + \big((D_w^k)^{-1} D_y^k + \bigtriangledown_y F\big)^T v = 0, \\ (u,v) \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow h(x^k,y^k)^T u + (D_w^k)^{-1} s^k v \geq 0. \tag{3.4}$$

只要 $\bigtriangledown_y h^T u + \big((D_w^k)^{-1} D_y^k + \bigtriangledown_y F\big)^T v = 0$, 由于 D_y^k, D_w^k 均为正的对角阵, 则必有

$$v \circ [\bigtriangledown_y h^t u + \bigtriangledown_y F^T v] = -v \circ \big[(D_y^k)^T (D_w^k)^{-T} v\big] \leq 0. \tag{3.5}$$

为了证明蕴含式 (3.4) 成立，设存在 (u,v) 使 (3.4) 式的左边成立，从而有 (3.5) 式成立. 利用假设 (A_1) 可得 $v^T[\bigtriangledown_y h^T u+\bigtriangledown_y F^T]=0$, 即 $-v^T(D_y^k)(D_w^k)^{-1}v=0$, 因此 $v=0$. 如果我们要求对所有的 k 恒有 $h(x^k,y^k)\geq 0$, 则由 $u\geq 0$ 可知蕴含式 (3.4) 成立.

综上所述，我们有

定理 3.1 如果假设 (A_1) 成立，且对所有的 k, 恒有 $h(x^k,y^k)\geq 0$, 则 QP 子问题 (3.2) 可行.

参 考 文 献

1 Facchinei F, Jiang H, Qi L. A Smoothing Method for Mathematical Programs with Equilibrium Constraints. *Math. Program*, 1999, 85: 107–134

2 Fukushima M, Luo Z Q, Pang J S. A Globally Convergent Sequential Quadratic Programming Algorithm for Mathematical Programs with Linear Complementarity Constraints. *Computation Optimization and Applications*, 1998, 10: 5–34

3 Luo Z Q, Pang J S, Ralph D. Mathematical Programs with Equilibrium Constraints. Cambridge: Cambridge University Press, 1996

4 Outrata J V, Kočvar M, Zowe J. Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equilibrium Constraints. Kluwer Academic Publishers, 1998

5 Fukushima M, Pang J S. Some Feasibility Issues in Mathematical Programs with Equilibrium Constraints. *SIAM J. Optim*, 1998, 8(3): 673–681

7 Jiang H Y, Ralph D. Smooth SQP Methods for Mathematical Programs with Nonlinear Complementarity Constraints. *SIAM J. Optim.* 2000, 10: 779–808

8 Cottle R W, Pang J S, Stone R E. The Linear Complementarity Problem. New York: Academic Press, 1992

6 袁亚湘，孙文瑜．最优化理论与算法．北京：科学出版社， 1997
(Yuan Yaxiang, Sunwenyu. Optimization: Theory and Algorithms. Beijing: Science Press, 1997)

ON THE FEASIBILITY OF MATHEMATICAL PROGRAMS WITH NONLINEAR COMPLEMENTARITY CONSTRAINTS

WAN Zhong ZHOU Shuzi

(*College of Mathematics and Econometries, Hunan University, Changsha* 410082)

Abstract This paper studies the feasibility of mathematical programs with nonlinear complementarity constraints (MPEC), where additional joint constraints are present that must be satisfied by the first level (design) and the second-level (state) variables of the problem. It is an extension of the feasibility conditions for the mathematical programs with linear complementarity constraints.

Key words Mathematical programs with equilibrium constraints, feasibility nonlinear complementarity, sequential quadratic programming,