第 26 卷 第 3 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 26 No. 3
2003 年 7 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA July, 2003

一类非线性卷积拟抛物型积分微分方程整体解的存在性问题*

尚亚东
(广州大学数学系，广州 510405)
郭柏灵
(北京应用物理与计算数学研究所非线性研究中心，北京 100088)

摘 要 本文研究一类非线性卷积拟抛物型积分微分方程的初边值问题. 运用 Galerkin 方法结合能量型先验估计证明了其整体强解的存在性、唯一性和正则性, 并在一定条件下讨论了整体解的不存在性.

关键词 拟抛物, 积分微分方程, 整体强解, Galerkin 方法, 爆破

1 引言

随着粘弹性力学的发展及广泛应用, 在数学上提出了许多新的微分方程和积分微分方程. 对于非线性 Volterra 型积分偏微分方程各种定解问题整体解的存在性、唯一性、正则性及解的其它性质已有许多讨论. 讨论非线性卷积双曲型或拟双曲型积分微分方程的文献可见 [1–4] 及它们的参考文献. 对于非线性抛物型积分微分方程的研究见 [5,6] 及其参考文献. 而关于非线性拟抛物型积分微分方程的研究则尚未有任何文献论及.

本文考虑如下一类非线性拟抛物型积分微分方程

$$u_t-\beta u_{xx}-\gamma u_{xxt}+\int_0^t\lambda(t-s)\sigma\big(u(x,s),u_x(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s=f(x,t,u,u_x). \tag{1}$$

其中 β,γ 为非负实常数. 当 $\lambda=0$, $\gamma=0$ 时, 方程 (1) 为拟线性抛物型方程, 已有较充分的讨论; 当 $\lambda=0$, $\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0$ 时, 方程 (1) 成为非线性的拟抛物型方程或 Sobolev-Galpern 型方程, 把 BBM-Burgers 方程作为特例 [7]; 而当 $\gamma=0$, $\beta\neq 0$, $\lambda\neq 0$ 时, (1) 成为 [8] 及 [9] 中考虑的描述热流及粘性介质中声波传播的模型方程. 另外方程 (1) 包含了在非线性、色散、耗散三种因素影响下细长弹性杆中纵向应变波振动的模型方程 [10]

$$u_{tt}-\beta u_{xxt}-\gamma u_{xxtt}=\sigma(u_x)_x,\qquad \gamma>0, \tag{2}$$

本文 2001 年 5 月 3 日收到. 2003 年 5 月 30 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10271034 号) 资助项目.

具耗散的广义 Pochhammer-Chree 方程 [11]

$$u_{tt}-\gamma u_{xxt}-u_{xx}-u_{xxtt}-f(u)_{xx}=0, \qquad \gamma>0 \tag{3}$$

及考虑粘性阻尼效应时的耗散的广义对称正则长波方程 [12]

$$u_{tt}-\gamma u_{xxt}-u_{xx}-u_{xxtt}+f(u)_{xt}=0, \qquad \gamma>0 \tag{4}$$

等. 因此, 更一般地研究非线性 Volterra 拟抛物型积分微分方程 (1) 无论从纯数学角度还是从应用背景看都有重要意义.

对方程 (1) 附加如下形式的边界条件和初始条件

$$u\,|_{x=0}=0, \quad u\,|_{x=1}=0, \qquad t>0, \tag{5}$$

$$u\,|_{t=0}=u_0(x), \qquad 0\le x\le 1. \tag{6}$$

对初边值问题 (1),(5),(6), 利用 Galerkin 方法结合能量估计证明了其整体强解的存在性、唯一性及正则性，并在一定条件下讨论了整体解的不存在性和 Blow up 问题.

不失一般性, 不妨设 $\beta=\gamma=1$. 记 $\Omega=(0,1)$, 空间和范数的记号与通常意义相同.

2　初边值问题整体强解的存在性

定义 1　称定义于 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上的实值函数 $u(x,t)$ 为定解问题 (1),(5),(6) 的强解，如果对任意 $T>0$ 满足以下条件:

(i)　$u(x,t)\in L^\infty\big(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\big)$, $u_t(x,t)\in L^\infty\big(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\big)$;

(ii)　$\psi(x,t)\in C^0\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$ 成立

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega\Big[u_t-\beta u_{xx}-\gamma u_{xxt}+\int_0^t\lambda(t-s)\sigma\big(u(x,s),u_x(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s\\&-f(x,t,u,u_x)\Big]\psi(x,t)\,\mathrm{d}x\,dt=0;\end{aligned} \tag{7}$$

(iii)　$u(x,0)=u_0(x)\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

为了获得问题 (1),(5),(6) 强解的存在性，先构造其有限维逼近解．为此设 $\{v_n(x)\}$ 是算子 $\frac{d^2}{dx^2}$ 在边界条件 (5) 下的规范特征函数，即存在实数 $\mu_n>0$ 使有

$$\frac{\mathrm{d}^2v_n}{\mathrm{d}x^2}=-\mu_nv_n, \qquad v_n|_{x=0}=v_n|_{x=1}=0, \qquad \|v_n\|=1, \qquad n=1,2,\cdots,$$

则 $\{v_n(x)\}$ 构成空间 $L^2(\Omega)$ 的完备正交系， $v_n(x)$ 的线性组合在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠，并且 $\{v_n(x)\}$ 在 $H^2(\Omega)$ 中的闭线性扩张为空间 $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)$.

构造问题 (1),(5),(6) 的逼近解为

$$u_m(x,t)=\sum_{n=1}^m\alpha_{nm}(t)v_n(x), \qquad m=1,2,\cdots,$$

其中 $\alpha_{nm}(t)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的待定函数．由 Galerkin 方法，它应满足如下的非线性卷积

常微分方程组的初值问题：

$$\begin{aligned}&\Big(u_{mt}-u_{mxx}-u_{mxxt}+\int_0^t\lambda(t-s)\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s,v_n(x)\Big)\\&=\big(f(x,t,u_m,u_{mx}),v_n(x)\big),\qquad n=1,2,\cdots,m,\end{aligned}\tag{8}$$

$$u_m(0)=u_{0m}(x),\tag{9}$$

其中 $u_{0m}(x)\overset{H^2(\Omega)}{\longrightarrow}u_0(x)$, 当 $m\to\infty$ 时.

利用 Piccard 逐次逼近法及常微分方程理论知，当 $\lambda(t)\in C\,[0,+\infty)$, $f(x,t,s,p)\in C\big([0,1]\times[0,+\infty)\times R\times R\big)$ 并且关于固定的 $(x,t)\in\Omega\times[0,+\infty)$, $f(x,t,s,p)\in C^{1,0}(R\times R),\sigma(s,p)\in C^{1,0}(R\times R)$ 时，(8),(9) 在 $t=0$ 附近存在唯一局部解. 为了得到其整体解，要求函数 σ,f 满足一些更强的条件.

出于实际背景的考虑 [12], 假设 f 具有下列形式：

$$f(x,t,u,u_x)=g(x,t)+h(u)+\varphi(u)_x,\tag{10}$$

并设函数 λ,σ,h 及 φ 分别满足条件：

1) $\lambda(s)\in C[0,+\infty)$;

2) $\sigma(s,q)\in C^1(R\times R)$, 且 $\sigma(0,0)=0$, $\left|\frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,q)\right|+\left|\frac{\partial\sigma}{\partial q}(s,q)\right|\le C$, $\forall\,(s,q)\in R\times R$, C 为正常数；

3) $h(s)\in C(R)$, 满足单边增长条件 $\big(h(u),u\big)\le B_1\|u\|^2+B_2,B_1,B_2$ 均为非负常数；

4) $\varphi(u)\in C^1(R)$;

并设函数 $u_0(x)$ 和 $g(x,t)$ 满足条件：

5) $u_0(x)\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$;

6) $g(x,t)\in L^2(0,T;L^2(\Omega)$, $\forall\,T>0$.

下面在假定条件 1)–6) 下对 $u_m(x,t)$ 进行能量估计, 从而获得问题 (8),(9) 在 $[0,+\infty)$ 上的整体解，且使函数列 $u_m(x,t)$ 有子列收敛于问题 (1),(5),(6) 的强解.

引理 1　在假设 1)–6) 下，对任意 $T>0$, 有估计

$$\big\|u_m(\cdot,t)\big\|_{L^2}^2+\big\|u_{mx}(\cdot,t)\big\|_{L^2}^2+\int_0^t\|u_{mx}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\le E_1(T),\qquad 0\le t\le T.\tag{11}$$

这里及以下诸引理中的 E_i 均为与 m 无关的常数.

证　方程 (8) 两边同乘以 $\alpha_{nm}(t)$, 然后对 n 从 1 到 m 求和，得到

$$\begin{aligned}&\Big(u_{mt}-u_{mxx}-u_{mxxt}+\int_0^t\lambda(t-s)\frac{\partial}{\partial x}\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)\,\mathrm{d}s,u_m\Big)\\&=\big(g(x,t),u_m\big)+\big(h(u_m),u_m\big)+\big(\varphi(u_m)_x,u_m\big).\end{aligned}\tag{12}$$

由于

$$(u_m,u_m)-(u_{mxxt},u_m)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|u_m\|_{L^2}^2+\|u_{mx}\|_{L^2}^2\big),\qquad(-u_{mxx},u_m)=\|u_{mx}\|_{L^2}^2,$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big(\int_0^t \lambda(t-s)\frac{\partial}{\partial x}\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)\,\mathrm{d}s, u_m(x,t)\Big)\Big|\\
=&\Big|-\int_0^t \lambda(t-s)\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)u_{mx}(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\Big|\\
\le&\int_0^t \big|\lambda(t-s)\big|\,\mathrm{d}s\int_\Omega \big|\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)u_{mx}(x,t)\big|\,\mathrm{d}x\\
\le&M_1(T)\int_0^t \Big(TM_1(T)\big\|\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)\big\|_{L^2}^2+\frac{1}{4TM_1(T)}\big\|u_{mx}(\,\cdot\,,s)\big\|_{L^2}^2\Big)\,\mathrm{d}s\\
\le&TM_1^2(T)\int_0^t \big\|\sigma\big(u_m(\,\cdot\,,\tau),u_{mx}(\,\cdot\,,\tau)\big)\big\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4}\big\|u_{mx}(\,\cdot\,,t)\big\|_{L^2}^2,\qquad t\le T,
\end{aligned}\tag{13}$$

其中 $M_1(T)=\sup\limits_{0\le t\le T}\|\lambda(t)\|$. 这里用到了 $ab\le\frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2$. 从条件 2) 知有 $|\sigma(s,p)|\le C\big(|s|+|p|\big)$, $\forall\,(s,p)\in R\times R$. 于是有

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \big|\sigma\big(u_m(x,t),u_{mx}(x,t)\big)\big|^2\,\mathrm{d}x \le&\overline{C}\Big(\int_\Omega \big|u_m(x,t)\big|^2\,\mathrm{d}x+\int_\Omega \big|u_{mx}(x,t)\big|^2\,\mathrm{d}x\Big)\\
\le&\widetilde{C}\int_\Omega \big|u_{mx}(x,t)\big|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{14}$$

这里用到了 Poincaré 不等式 [13]

$$\int_\Omega \big|w(x)\big|^2\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{\mu_1}\int_\Omega \big|w'(x)\big|^2\,\mathrm{d}x,\qquad \forall\,w\in H_0^1(\Omega).$$

代 (14) 式到 (13) 式中，得到

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^t \lambda(t-s)\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)u_{mx}(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\Big|\\
\le&M_2(T)\int_0^t \Big\|\frac{\partial u_m}{\partial x}\Big\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\big\|u_{mx}(\,\cdot\,,t)\big\|_{L^2}^2,\qquad t\le T.
\end{aligned}\tag{15}$$

对方程 (12) 右端第一项有 $\big(g(x,t),u_m\big)\le\frac{1}{2}\|g\|_{L^2}^2+\|u_m\|_{L^2}^2$, 对右端第二项有 $\big(h(u_m),u_m\big)\le B_1\|u_m\|_{L^2}^2+B_2$, 对右端第三项有 $\big(\varphi(u_m)_x,u_m\big)=-\big(\varphi(u_m),u_{mx}\big)=-\big(\Phi_x(u_m),1\big)=0$, 其中 $\Phi(u)=\int_0^u\varphi(s)\,\mathrm{d}s$. 将上述所有这些估计式代入 (12) 式得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|u_m\|_{L^2}^2+\big\|u_{mx}(\,\cdot\,,t)\big\|_{L^2}^2+\int_0^t\Big\|\frac{\partial u_m}{\partial x}\Big\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\Big)\\
\le&M_3(T)\Big(\|u_m\|_{L^2}^2+\big\|u_{mx}(\cdot,t)\big\|_{L^2}^2+\int_0^t\Big\|\frac{\partial u_m}{\partial x}\Big\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\Big)+M_4(T).
\end{aligned}$$

据 Gronwall 不等式，即得引理结论.

应用 Sobolev 嵌入定理，有

推论 1 在假定 1)–6) 成立时，对任意 $T>0$, 有 $\|u_m\|_{L^\infty\times L_T^\infty}\le E_2(T)$.

引理 2 若假设 1)–6) 成立，则对任意 $T>0$, 有

$$\begin{aligned}&\|u_{mx}\|^2_{L^2\times L^\infty_T}+\|u_{mxx}\|^2_{L^2\times L^\infty_T}+\int_0^t\big\|u_{mxx}(\,\cdot\,,\tau)\big\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}\tau\le E_3(T),\\&\|u_{mxx}\|_{L^\infty\times L^\infty_T}\le E_4(T).\end{aligned}\tag{16}$$

证 方程 (8) 两边同乘以 $\mu_n\alpha_{nm}(t)$, 然后关于 n 从 1 到 m 求和，有

$$\begin{aligned}&\Big(u_{mt}-u_{mxx}-u_{mxxt}+\int_0^t\lambda(t-s)\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s,-u_{mxx}\Big)\\=&\big(g(x,t),-u_{mxx}\big)+\big(h(u_m),-u_{mxx}\big)+\big(\varphi(u_m)_x,-u_{mxx}\big).\end{aligned}\tag{17}$$

因为

$$\begin{aligned}&(u_{mt}-u_{mxxt},-u_{mxx})=\frac12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|u_{mx}\|^2_{L^2}+\|u_{mxx}\|^2_{L^2}\big),\\&\Big|\int_0^t\lambda(t-s)\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)_x\big)\,\mathrm{d}s,-u_{mxx}\Big|\\\le&\int_0^t\big|\lambda(t-s)\big|\,\mathrm{d}s\int_\Omega\big|\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)_x\big|\,\big|u_{mxx}(x,t)\big|\,\mathrm{d}x\\\le&TM_1(T)\int_0^t\int_\Omega\big|\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)_x\big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s+\frac14\big\|u_{mxx}(\cdot,t)\big\|^2_{L^2},\qquad 0\le t\le T.\end{aligned}\tag{18}$$

由条件 2) 知

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{\partial}{\partial x}\sigma\big(u_m(x,\tau),u_{mx}(x,\tau)\big)\Big|\\=&\Big|\frac{\partial}{\partial s}\sigma\big(u_m(x,\tau),u_{mx}(x,\tau)\big)\frac{\partial u_m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial p}\sigma\big(u_m(x,\tau),u_{mx}(x,\tau)\big)\frac{\partial^2u_m}{\partial x^2}\Big|\\\le&\widehat{C}\Big(\Big|\frac{\partial u_m}{\partial x}(x,\tau)\Big|^2+\Big|\frac{\partial^2u_m}{\partial x^2}(x,\tau)\Big|^2\Big).\end{aligned}$$

于是利用引理 1 的结论有

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_\Omega\Big|\frac{\partial}{\partial x}\sigma\big(u_m(x,\tau),u_{mx}(x,\tau)\big)\Big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\\le&\check{C}\Big(\int_0^t\int_\Omega\Big|\frac{\partial u_m}{\partial x}(x,\tau)\Big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau+\int_0^t\int_\Omega\Big|\frac{\partial^2u_m}{\partial x^2}(x,\tau)\Big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\Big)\\\le&M_5(T)\int_0^t\big\|u_{mxx}(x,\tau)\big\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}\tau+M_6(T).\end{aligned}\tag{19}$$

代 (19) 式到 (18) 式中有

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^t\lambda(t-s)\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s,-u_{mxx}\Big)\Big|\\\le&M_7(T)\int_0^t\big\|u_{mxx}(x,\tau)\big\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}\tau+M_8(T)+\frac14\big\|u_{mxx}(\,\cdot\,,t)\big\|^2_{L^2}.\end{aligned}\tag{20}$$

而对 (17) 式右端各项分别有

$$\begin{aligned}
\left|(g(x,t),-u_{mxx})\right| \le & \frac{1}{2}\|g\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|u_{mxx}\|_{L^2}^2,\\
\left|(h(u_m),-u_{mxx})\right| \le & C'\big\|h(u_m)\big\|_{L^\infty}\|u_{mxx}\|_{L^2}\le C\big(1+\|u_{mxx}\|_{L^2}^2\big),\\
\left|(\varphi(u_m)_x,-u_{mxx})\right| \le & \big\|\varphi'(u_m)\big\|_{L^\infty}\|u_{mx}\|_{L^2}\|u_{mxx}\|_{L^2}\\
\le & C\big(\|u_{mx}\|_{L^2}^2+\|u_{mxx}\|_{L^2}^2\big).
\end{aligned}$$

将以上各式代入 (17) 式，得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|u_{mx}\|_{L^2}^2+\|u_{mxx}\|_{L^2}^2+\int_0^t\big\|u_{mxx}(x,\tau)\big\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\Big)\\
\le & M_9(T)\big(\|u_{mx}\|_{L^2}^2+\|u_{mxx}\|_{L^2}^2+\int_0^t\big\|u_{mxx}(x,\tau)\big\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\big)+M_{10}(T).
\end{aligned}$$

利用 Gronwall 不等式，(16) 式的第一式得证，再由 Sobolev 嵌入定理，(16) 式的第二式得证.

引理 3 设假定 1)–6) 成立，则对任意 $T>0$, 有

$$\begin{aligned}
&\|u_{mt}\|_{L^2\times L_T^\infty}^2+\|u_{mxt}\|_{L^2\times L_T^\infty}^2+\int_0^t\big\|u_{mxx}(\cdot,\tau)\big\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\le E_5(T),\\
&\|u_{mt}\|_{L^\infty\times L_T^\infty}^2\le E_6(T).
\end{aligned}\tag{21}$$

证 用 $\alpha'_{nm}(t)$ 乘 (8) 式两边，并关于 n 从 1 到 m 求和，分部积分，利用引理 1, 2 的结论和推论 1, 有

$$\begin{aligned}
&\|u_{mt}\|_{L^2}^2+\|u_{mxt}\|_{L^2}^2\\
\le & \big[\|u_{mx}\|_{L^\infty}+\|\varphi(u_m)\|_{L^\infty}\big]\,\|u_{mxt}\|_{L^1}+\Big[\|g(x,t)\|_{L^2}+\big\|h(u_m)\big\|_{L^2}\\
&+\Big\|\int_0^t\lambda(t-s)\big(\sigma(u_m(x,s),u_{mx}(x,s))\big)_x\,\mathrm{d}s\Big\|_{L^2}\Big]\,\|u_{mt}\|_{L^2}\\
\le & M_{11}(T)\|u_{mxt}\|_{L^2}+M_{12}(T)\,\|u_{mt}\|_{L^2}.
\end{aligned}\tag{22}$$

此式蕴涵有 $\|u_{mt}\|_{L^2\times L_T^\infty}^2+\|u_{mxt}\|_{L^2\times L_T^\infty}^2\le E_5(T)$, 由 Sobolev 嵌入定理，(21) 式第二个不等式得证.

引理 4 若假设 1)–6) 成立，则对任意 $T>0$, 有

$$\|u_{mxxt}\|_{L^2\times L_T^\infty}\le E_7(T),\qquad \|u_{mxt}\|_{L^2\times L_T^\infty}\le E_8(T).\tag{23}$$

证 方程 (8) 两边同乘以 $\mu_n\alpha'_{nm}(t)$, 并关于 n 由 1 到 m 求和，得

$$\begin{aligned}
\|u_{mxxt}\|_{L^2}^2\le & \Big[\|u_{mt}\|_{L^2}+\|u_{mxx}\|_{L^2}+\big\|g(x,t)\big\|_{L^2}+\big\|h(u_m)\big\|_{L^2}\\
&+\Big\|\int_0^t\lambda(t-s)\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s\Big\|_{L^2}\\
&+\big\|\varphi'(u_m)\big\|_{L^\infty}\|u_{mx}\|_{L^2}\Big]\,\|u_{mxxt}\|_{L^2}
\end{aligned}$$

$$\le\Big[M_{13}(T)+M_{14}(T)\int_0^t\|u_{mxx}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau+M_{15}(T)\int_0^t\|u_{mx}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\Big]\|u_{mxxt}\|_{L^2}$$
$$\le M_{16}(T)\|u_{mxxt}\|_{L^2}.$$

于是有

$$\big\|u_{mxxt}(t)\big\|_{L^2}\le M_{17}(T),\qquad 0\le t\le T. \tag{24}$$

此式及 Sobolev 嵌入定理推出 (23) 式.

定理 1　设假设 1)–6) 成立，则定解问题 (1),(5),(6) 存在整体强解.

证　由引理 1– 引理 4 知，初值问题 (8),(9) 在 $[0,+\infty)$ 上的整体解存在，所以函数列 $\{u_m(x,t)\}$ 中的每个函数 $u_m(x,t)$ 都在 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上有定义，且关于 t 连续可微. 另一方面，根据紧致性原理，从引理 1– 引理 4 知，对任意 $T>0$, 存在序列 $\{u_m(x,t)\}$ 的子序列 $\{u_{m'}(x,t)\}$ 和函数 $u(x,t)$, 使当 $m'\to\infty$ 时，

$u_{m'}(x,t)\to u(x,t)$ 于 $L^\infty\big(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\big)$ 弱 * 收敛，

$u_{m't}(x,t)\to u_t(x,t)$ 于 $L^\infty\big(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\big)$ 弱 * 收敛，

$u_{m'}(x,t)\to u(x,t)$ 于 $L^2\big(0,T;H^2(\Omega)\big)$ 强收敛.

而且

$u_{m'}(x,t)\to u(x,t)$ 于 $\Omega\times[0,T]$ 几乎处处收敛，

$u_{m'x}(x,t)\to u_x(x,t)$ 于 $\Omega\times[0,T]$ 几乎处处收敛.

由 $\sigma(s,p)\in C^1(R\times R)$, $\varphi(s)\in C^1(R)$, $h(s)\in C(R)$ 有

$\sigma\big(u_{m'}(x,t),u_{m'x}(x,t)\big)\to\sigma\big(u(x,t),u_x(x,t)\big)$ 于 $\Omega\times[0,T]$ 几乎处处收敛，

$\varphi\big(u_{m'}(x,t)\big)\to\varphi\big(u(x,t)\big)$ 于 $\Omega\times[0,T]$ 几乎处处收敛，

$h\big(u_{m'}(x,t)\big)\to h\big(u(x,t)\big)$ 于 $\Omega\times[0,T]$ 几乎处处收敛.

并且 $\sigma\big(u_{m'}(x,t),u_{m'x}(x,t)\big)$, $\varphi\big(u_{m'}(x,t)\big)$, $h\big(u_{m'}(x,t)\big)$ 关于 m' 于 $Q_T=\Omega\times[0,T]$ 一致有界，(8) 式两边同乘以任意实值函数 $d(t)\in C^0[0,T]$, 并对 t 在 $[0,T]$ 上积分，得

$$\begin{aligned}&\int_0^T\Big(u_{mt}-u_{mxx}-u_{mxxt}+\int_0^t\lambda(t-s)\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s,d(t)v_n(x)\Big)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^T\big(g(x,t),d(t)v_n(x)\big)\,\mathrm{d}t+\int_0^T\big(h(u_m),d(t)v_n(x)\big)\,\mathrm{d}t\\&\quad+\int_0^T\big(\varphi(u_m)_x,d(t)v_n(x)\big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{25}$$

在 (25) 中让 $m=m'\to\infty$, 则有

$$\int_0^T\big(u_{m't}-u_{m'xx}-u_{m'xxt},d(t)v_n(x)\big)\,\mathrm{d}t\longrightarrow\int_0^T\big(u_t-u_{xx}-u_{xxt},d(t)v_n(x)\big)\,\mathrm{d}t.$$

应用 Lebesgue 逐项积分定理，有

$$\int_0^T\big(h(u_{m'}),d(t)v_n(x)\big)\,\mathrm{d}t\longrightarrow\int_0^T\big(h\big(u(x,t)\big),d(t)v_n(x)\big)\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^T\big(\varphi(u_{m'})_x,d(t)v_n(x)\big)\,\mathrm{d}t=-\int_0^T\big(\varphi(u_{m'}),d(t)v_n'(x)\big)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&\to -\int_0^T \big(\varphi(u), d(t)v_n'(x)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \big(\varphi(u)_x, d(t)v_n(x)\big)\,\mathrm{d}t,\\
&\int_0^T \Big(\int_0^t \lambda(t-s)\sigma\big(u_{m'}(x,s), u_{m'x}(x,s)\big)_x \,\mathrm{d}s, d(t)v_n(x)\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= -\int_0^T \Big(\int_0^t \lambda(t-s)\sigma\big(u_{m'}(x,s), u_{m'x}(x,s)\big)\,\mathrm{d}s, d(t)v_n'(x)\Big)\,\mathrm{d}t\\
&\to -\int_0^T \Big(\int_0^t \lambda(t-s)\sigma\big(u(x,s), u(x,s)\big)\,\mathrm{d}s, d(t)v_n'(x)\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^T \Big(\int_0^t \lambda(t-s)\sigma\big(u(x,s), u(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s, d(t)v_n(x)\Big)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

于是对任意 $d(t)\in C^0[0,T]$, 有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \Big(u_t - u_{xx} - u_{xxt} + \int_0^t \lambda(t-s)\sigma\big(u(x,s), u(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s, d(t)v_n(x)\Big)\,\mathrm{d}t\\
=&\int_0^T \big(g(x,t), d(t)v_n(x)\big)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \big(h\big(u(x,t)\big), d(t)v_n(x)\big)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \big(\varphi(u)_x, d(t)v_n(x)\big)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

由 $v_n(x)$ 在 $L^2(\Omega)$ 的稠密性及 $d(t)\in C^0[0,T]$ 的任意性，知强解定义中 1), 2) 成立. 再由 (9) 中 $m=m'\to\infty$ 知 $u(x,t)$ 满足初始条件. 于是 $u(x,t)$ 是问题 (1),(5),(6) 的整体强解. 定理 1 证毕.

3 解的正则性

为了得到初边值问题 (1),(5),(6) 具有较强光滑性质的解，须对问题 (8),(9) 的解作进一步的估计，为此，先引述下面引理.

引理 5[14] 设 $G(z_1,z_2,\cdots,z_h)$ 为 $z_1,z_2,\cdots,z_h$ 的 k $(k\ge 1)$ 次连续可微函数，且 $z_i(x,t)\in L^\infty\big(0,T;H^k(\Omega)\big)$, $i=1,2,\cdots,h$, 则有估计式

$$
\big\|D_x^k G(z_1,z_2,\cdots,z_h)\big\|_{L^2}^2 \le C(M,k,h)\sum_{i=1} h\|z_i\|_k^2,
$$

其中 $M=\max\limits_{1\le i\le h}\big(\max\limits_{(x,t)\in\Omega\times[0,T]}\big|z_i(x,t)\big|\big)$.

引理 6 设在假设 1)–6) 下还成立:

7) $\sigma(s,p)$ 在 $R\times R$ 上有 k 阶偏导数，各 k 阶偏导数都在有解集上有界，且对任意奇数 $l\le k-1$, 有 $\frac{\partial^l}{\partial s^l}\sigma(0,p)\mid_{\partial\Omega}=0$;

8) $h(s)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $k-1$ 次可导， $h^{(k-1)}(s)$ 在有界集上有界，并对任意偶数 $l\le k-1$ 有 $h^{(l)}(0)=0$;

9) $\varphi(s)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 k 次可导，$\varphi^{(k)}(s)$ 在有界集上有界, 且对任意奇数 $l\le k-1$ 有 $\varphi^{(l)}(0)=0$;

10) $g(x,t)\in H_0^{k-1}(\Omega)$, 且 $D_x^l g(x,t)\in L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$, $1\le l\le k-1$;

11) $u_0(x)\in H_0^k(\Omega)\cap H^{k+1}(\Omega)$,

则对任意 $T>0$, 有估计

$$\|D_x^k u_m\|^2_{L^2\times L^\infty_T}+\|D_x^{k+1}u_m\|^2_{L^2\times L^\infty_T}+\int_0^t\|D_x^{k+1}u_m\|^2_{L^2}d\tau\le E_9(T). \tag{26}$$

证 用归纳法. 先证 (26) 式对 $k=2$ 成立. 方程 (8) 两边同乘以 $\mu_n^2\alpha_{nm}(t)$, 再关于 n 从 1 到 m 求和, 得

$$\begin{aligned}&\Big(u_{mt}-u_{mxx}-u_{mxxt}+\int_0^t\lambda(t-s)\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s,u_{mxxxx}\Big)\\=&\big(g(x,t),u_{mxxxx}\big)+\big(h(u_m),u_{mxxxx}\big)+\big(\varphi(u_m)_x,u_{mxxxx}\big).\end{aligned} \tag{27}$$

由于

$$(u_{mt}-u_{mxx}-u_{mxxt},u_{mxxxx})=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|u_{mxx}\|^2_{L^2}+\|u_{mxxx}\|^2_{L^2}\big)+\|u_{mxxx}\|^2_{L^2},$$

类似于 (13) 式的导出，有

$$\begin{aligned}&\Big|\Big(\int_0^t\lambda(t-s)\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s,u_{mxxxx}\Big)\Big|\\=&\Big|-\int_0^t\lambda(t-s)\int_\Omega\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)u_{mxxx}(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\Big|\\\le&\int_0^t\big|\lambda(t-s)\big|\,\mathrm{d}s\int_\Omega\Big|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)\Big|\,\Big|\frac{\partial^3}{\partial x^3}u_m(x,t)\Big|\,\mathrm{d}x\\\le&TM_1^2(T)\int_0^t\int_\Omega\Big|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma\big(u_m(x,\tau),u_{mx}(x,\tau)\big)\Big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4}\|u_{mxxx}\|^2_{L^2},\end{aligned} \tag{28}$$

注意到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma(u_m,u_{mx})=&\frac{\partial}{\partial s}\sigma(u_m,u_{mx})\frac{\partial^2u_m}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial p}\sigma(u_m,u_{mx})\frac{\partial^3u_m}{\partial x^3}\\&+\frac{\partial^2}{\partial s^2}\sigma(u_m,u_{mx})\Big(\frac{\partial u_m}{\partial x}\Big)^2+2\frac{\partial^2}{\partial s\partial p}\sigma(u_m,u_{mx})\frac{\partial u_m}{\partial x}\frac{\partial^2u_m}{\partial x^2}\\&+\frac{\partial^2}{\partial p^2}\sigma(u_m,u_{mx})\Big(\frac{\partial^2u_m}{\partial x^2}\Big)^2.\end{aligned}$$

由条件 7) 及推论 1, 引理 2, 有

$$\Big|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma(u_m,u_{mx})\Big|\le M_{18}(T)+M_{19}(T)\Big|\frac{\partial^2u_m}{\partial x^2}\Big|^2+M_{20}(T)\Big|\frac{\partial^3u_m}{\partial x^3}\Big|.$$

代入 (28) 式得到

$$\begin{aligned}&\Big|\Big(\int_0^t\lambda(t-s)\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s,u_{mxxxx}\Big)\Big|\\\le&M_{21}(T)+M_{22}(T)\int_0^t\|u_{mxxx}\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}\tau+M_{23}(T)\int_0^t\int_\Omega|u_{mxx}|^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4}\|u_{mxxx}\|^2_{L^2},\end{aligned}$$

应用 Nirenberg-Gagliard 不等式 [15]

$$\|D^j u\|_{L^p} \le C(p,q,r,m,j,\Omega)\,\|D^m u\|_{L^r}^{\theta}\|u\|_{L^q}^{1-\theta},$$

其中 $1 \le q,\ r < +\infty,\ 0 \le j \le m,\ \frac{j}{m} \le \theta < 1;\ \frac{1}{p} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{q} - (m\theta - j)$. 取 $q=2,\ r=2,\ p=4,\ m=1,\ j=0,\ u=\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}$, 得

$$\int_\Omega |u_{mxx}|^4\,\mathrm{d}x \le C(\Omega)\,\|u_{mxxx}\|_{L^2}\|u_{mxx}\|_{L^2}^3 \le \|u_{mxxx}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}C^2(\Omega)\,\|u_{mxx}\|_{L^2}^6.$$

于是再利用引理 2, 得到

$$\begin{aligned}&\Big|\Big(\int_0^t \lambda(t-s)\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s, u_{mxxxx}\Big)\Big|\\ \le& M_{24}(T) + M_{25}(T)\int_0^t \|u_{mxxx}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4}\|u_{mxxx}\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

代入 (27) 式，对右端各项，分部积分并利用引理条件和前面的结果，可得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|u_{mxx}\|_{L^2}^2 + \|u_{mxxx}\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|u_{mxxx}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\Big)\\ \le& M_{27}(T) + M_{28}(T)\Big(\|u_{mxx}\|_{L^2}^2 + \|u_{mxxx}\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|u_{mxxx}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\Big).\end{aligned}$$

利用 Gronwall 不等式，证得引理结论对 $k=2$ 成立．假定 (26) 式对 $k-1$ 成立，我们证明 (26) 式对 k 成立．由引理假设条件，归纳假设及 Sobolev 嵌入不等式知

$$\|u_m\|_{L^\infty\times L_T^\infty}, \|u_{mx}\|_{L^\infty\times L_T^\infty}, \cdots, \|D_x^{k-1}u_m\|_{L^\infty\times L_T^\infty}$$

均为有限数，且可被一与 m 无关的常数界定．方程 (8) 两端同乘以 $\mu_n^k\alpha_{nm}(t)$, 并且关于 n 由 1 到 m 求和，得到

$$\begin{aligned}&\Big(u_{mt} - u_{mxx} - u_{mxxt} + \int_0^t \lambda(t-s)\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s, (-1)^k D_x^{2k}u_m\Big)\\ =&\big(g(x,t),(-1)^k D_x^{2k}u_m\big) + \big(h(u_m),(-1)^k D_x^{2k}u_m\big) + \big(\varphi(u_m)_x,(-1)^k D_x^{2k}u_m\big).\end{aligned}\tag{29}$$

分部积分，由引理假设，引理 5, 可知

$$\begin{aligned}&\big(u_{mt} - u_{mxx} - u_{mxxt},(-1)^k D_x^{2k}u_m\big)\\ =&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\|D_x^k u_m t\|_{L^2}^2 + \|D_x^{k+1}u_m\|_{L^2}^2\big) + \|D_x^{k+1}u_m\|_{L^2}^2,\\ &\Big|\Big(\int_0^t \lambda(t-s)\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)_x\,\mathrm{d}s,(-1)^k D_x^{2k}u_m\Big)\Big|\\ \le& TM_1^2(T)\int_0^t\int_\Omega\Big|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\sigma\big(u_m(x,s),u_{mx}(x,s)\big)\Big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4}\|D_x^{k+1}u_m\|_{L^2}^2\\ \le& M_{29}(T) + M_{30}(T)\int_0^t \|D_x^{k+1}u_m\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4}\|D_x^{k+1}u_m\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\big|\big(g(x,t),(-1)^k D_x^{2k}u_m\big)\big| = \Big|\int_\Omega D_x^{k-1}g(x,t)\cdot D_x^{k+1}u_m\,\mathrm{d}x\Big|\\
\le&\big\|D_x^{k-1}g(x,t)\big\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|D_x^{k+1}u_m\|_{L^2}^2,\\
&\big|\big(h(u_m),(-1)^k D_x^{2k}u_m\big)\big| = \big|\big(D_x^{k-1}h(u_m),D_x^{k+1}u_m\big)\big|\\
\le&\big\|D_x^{k-1}h(u_m)\big\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|D_x^{k+1}u_m\|_{L^2}^2\\
\le&M_{31}(T)\|D_x^{k-1}u_m\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|D_x^{k+1}u_m\|_{L^2}^2,\\
&\big|\big(\varphi(u_m)_x,(-1)^k D_x^{2k}u_m\big)\big| = \big|\big(D_x^{k}\varphi(u_m),D_x^{k+1}u_m\big)\big|\\
\le&\big\|D_x^{k}\varphi(u_m)\big\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|D_x^{k+1}u_m\|_{L^2}^2\\
\le&M_{32}(T)\|D_x^{k}u_m\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|D_x^{k+1}u_m\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

代入 (29) 式，利用 Gronwall 不等式，知 (26) 对 k 亦成立.

引理 7 在引理 6 的条件成立时还有估计

$$\|D_x^k u_{mt}\|_{L^2\times L_T^\infty}^2+\|D_x^{k+1}u_{mt}\|_{L^2\times L_T^\infty}^2\le E_{10}(T). \tag{30}$$

证　用 $\mu_n^k\alpha_{nm}'(t)$ 同乘以方程 (8) 两端，并关于 n 由 1 到 m 求和，分部积分，并利用引理假设及前面结论可得到 (30).

定理 2 在引理 6 的假设下, 问题 (1),(5),(6) 存在整体光滑解 $u(x,t)\in L^\infty\big(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^{k+1}(\Omega)\big)$, $u_t(x,t)\in L^\infty\big(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^{k+1}(\Omega)\big)$, 其中 $k\ge 2$.

4　强解的适定性

定理 3 在假设 1)–6) 成立时，问题 (1),(5),(6) 的强解是唯一的.

证　设 u,v 是问题 (1),(5),(6). 那么 $w=u-v$ 满足下列问题

$$\begin{aligned}
&w_t-w_{xx}-w_{xxt}+\int_0^t\lambda(t-s)\big[\sigma\big(u(x,s),u_x(x,s)\big)-\sigma\big(v(x,s),v_x(x,s)\big)\big]_x\,\mathrm{d}s\\
=&h(u)-h(v)+\big[\varphi(u)-\varphi(v)\big]_x,
\end{aligned}\tag{31}$$

$$w|_{x=0}=w|_{x=1}=0,\qquad w|_{t=0}=0. \tag{32}$$

方程 (31) 两边同乘以 $w(x,t)$, 并在 Ω 上积分，分部积分，类似于引理 1 的证明，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|w\|_{L^2}^2+\|w_x\|_{L^2}^2+\int_0^t\|w_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\Big)\\
\le&M_{33}(T)\Big(\|w\|_{L^2}^2+\|w_x\|_{L^2}^2+\int_0^t\|w_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau\Big).
\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式和零初始条件知，对任何 $T>0$, 有

$$\big\|w(t)\big\|_{L^2}^2+\big\|w_x(t)\big\|_{L^2}^2+\int_0^t\|w_x\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\tau=0,\qquad\forall\,0\le t\le T.$$

从而知， $w(x,t)\equiv 0$ 在 $\Omega\times[0,+\infty]$ 上几乎处处为零．证毕．

相似地，我们有

定理 4 在假设 1)–6) 下，问题 (1),(5),(6) 的解在空间 $L^\infty\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$ 模的意义下关于初值 $u_0(x)$ 是稳定的．即若 u,v 分别为问题 (1),(5),(6) 当 $u\mid_{t=0}=u_0$ 和 $v\mid_{t=0}=v_0$ 的解，则对任意 $\varepsilon>0$ 和任意 $T>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $\|u_0-v_0\|_{H^1}<\delta$, 就有 $\big\|u(x,t)-v(x,t)\big\|_{H^1\times L_T^\infty}<\varepsilon$.

5 Blow up 问题

本节，我们考虑非线性拟抛物型积分微分方程

$$u_t-u_{xx}-u_{xxt}+\int_0^t\lambda(t-s)\varphi\big(u(x,s)\big)_{xx}\,\mathrm{d}s=f(u), \tag{33}$$

连同 (5),(6) 构成的初边值问题解的 blow up 问题.

定理 5 设初始函数 $u_0(x)$, 非线性函数 f,φ, 和函数 $\lambda(s)$ 满足条件:

a) $\lambda(t)\ge 0,\ \forall\, t\in[0,+\infty)$;

b) $\varphi(s)\in C^2(R)$ 为凸函数，且对任何 $y>0$, 有 $\varphi(y)\ge\varphi(0)$;

c) $f(s)\ge g(s),\ \forall\, s\in R,\ g(s)$ 是局部 Lipschitz 连续的凸函数，且满足 $g(s)-\pi^2 s$ 对 $s\ge 0$ 非负不减，并使积分 $\int_\alpha^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{g(s)-\pi^2 s}$ 收敛;

d) $\alpha=\frac{\pi}{2}\int_0^1 u_0(x)\sin\pi x\,\mathrm{d}x>0$.

则初边值问题 (33), (5),(6) 的解必在有限时间内 blow up, 即存在有限常数 $\widetilde{T}$, 当 $t\to\widetilde{T}^-$ 时，有 $\big\|u(\cdot,t)\big\|_{L^p(\Omega)}\to+\infty,\ \forall\, 1\le p\le+\infty$.

定理 6 设初始函数 $u_0(x)$, 非线性函数 f,φ 和函数 $\lambda(s)$ 满足条件:

a) $\lambda(t)\le 0,\ \forall\, t\in[0,+\infty]$;

b) $\varphi(s)\in C^2(R)$ 为凹函数，且对任何 $y>0$, 有 $\varphi(y)\le\varphi(0)$;

c) $f(s)\ge g(s),\ \forall\, s\in R,\ g(s)$ 为局部 Lipschitz 连续的凸函数，且满足 $g(s)-\pi^2 s$ 对 $s\ge 0$ 非负不减，并使积分 $\int_\alpha^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{g(s)-\pi^2 s}$ 收敛;

d) $\alpha=\frac{\pi}{2}\int_0^1 u_0(x)\sin\pi x\,\mathrm{d}x>0$.

则初边值问题 (33), (5), (6) 的解必在有限时间内 blow up, 即存在有限常数 $\widetilde{T}$, 当 $t\to\widetilde{T}^-$ 时，有 $\big\|u(\cdot,t)\big\|_{L^p(\Omega)}\to+\infty,\ \forall\, 1\le p\le+\infty$.

证 我们只给出定理 5 的证明, 定理 6 的证明完全类似. 记 $y(t)=\frac{\pi}{2}\int_0^1 u(x,t)\sin\pi x\,\mathrm{d}x$. 方程 (33) 两边同乘以 $\frac{\pi}{2}\sin\pi x$, 然后关于 x 在 Ω 上积分，分部积分并利用凸函数的 Jensen 不等式，得到

$$\begin{aligned}
&\dot y(t)+\pi^2 y(t)+\pi^2\dot y(t)+\pi^2\int_0^t\lambda(t-s)\big[\varphi(0)-\varphi\big(y(s)\big)\big]\,\mathrm{d}s\\
\ge&\dot y(t)+\pi^2 y(t)+\pi^2\dot y(t)+\pi^2\int_0^t\lambda(t-s)\Big[\varphi(0)-\int_0^1\varphi\big(u(x,s)\big)\frac{\pi}{2}\sin\pi x\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}s\\
=&\dot y(t)+\pi^2 y(t)+\pi^2\dot y(t)+\pi^2\int_0^t\lambda(t-s)\,\mathrm{d}s\int_\Omega\varphi(u)_{xx}\frac{\pi}{2}\sin\pi x\,\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1 f(u)\frac{\pi}{2}\sin\pi x\,\mathrm{d}x\ge\int_0^1 g(u)\frac{\pi}{2}\sin\pi x\,\mathrm{d}x\ge g(y).
\end{aligned}$$

于是

$$\dot{y}(t) - \frac{\pi^2}{1+\pi^2}\int_0^t \lambda(t-s)\big[\varphi\big(y(s)\big) - \varphi(0)\big]\,\mathrm{d}s \geq \frac{1}{1+\pi^2}(g(y) - \pi^2 y), \tag{34}$$

且 $y(0) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 u_0(x)\sin\pi x\,\mathrm{d}x = \alpha > 0$. 由定理假设，从 (34) 式可推知有 $y(t) > 0$, 对任何 $t > 0$. 事实上，若此结论不真，则由 $y(t)$ 在 $[0,T]$ 上的连续性和 $y(0) = \alpha > 0$, 知必存在 $t_1 > 0$, 使在 $[0,t_1)$ 上有 $y(t) > 0$ 而 $y(t_1) = 0$, 从而在 $t \in [0,t_1)$ 时，有 $g\big(y(t)\big) - \pi^2 y(t)$ 是非负的，$\varphi\big(y(s)\big) - \varphi(0) > 0$, $\forall\, s \in (0,t)$, $t \in [0,t_1)$. 于是由 (34) 知 $\dot{y}(t) > 0$, $\forall\, t \in (0,t_1)$, 表明 $y(t)$ 在 $[0,t_1]$ 上是严格单调增的，于是对 $t_1 > 0$, 有 $y(t_1) > 0$. 矛盾说明对任何 $t > 0$, 有 $y(t) > 0$. 与前证明相同可知，对任何 $t > 0$ 有 $g\big(y(t)\big) - \pi^2 y(t) > 0$, 对任何 $s \in (0,t)$, 有 $\varphi\big(y(s)\big) - \varphi(0) > 0$. 由 (34) 得

$$\dot{y}(t) \geq \frac{1}{1+\pi^2}\big(g(y) - \pi^2 y\big). \tag{35}$$

分离变量 (35) 式积分得

$$t \leq (1+\pi^2)\int_\alpha^{y(t)} \big(g(s) - \pi^2 s\big)^{-1}\,\mathrm{d}s \leq (1+\pi^2)\int_\alpha^{+\infty} \big(g(s) - \pi^2 s\big)^{-1}\,\mathrm{d}s = \widetilde{T}. \tag{36}$$

(36) 式表明函数 $y(t)$ 的存在区间是有限的，且当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时，有 $y(t) \to +\infty$. 由 Hölder 不等式知，对任意 $1 \leq p \leq +\infty$, $\big\|u(\cdot,t)\big\|_{L^p(\Omega)} \to +\infty$, 当 $t \to \widetilde{T}^-$.

类似地可证

定理 7　设初始函数 $u_0(x)$, 非线性函数 f, φ, 和函数 $\lambda(s)$ 满足条件：

a)　$\lambda(t) \geq 0$, $\forall\, t \in [0,+\infty)$;

b)　$\varphi(s) \in C^2(R)$ 为凹函数，且对任何 $y < 0$, 有 $\varphi(y) \leq \varphi(0)$;

c)　$f(s) \leq g(s)$, $\forall\, s \in R$, $g(s)$ 为局部 Lipschitz 连续的凹函数，满足 $g(s) - \pi^2 s$ 对 $s \leq 0$ 非正不减，并使积分 $\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}s}{\pi^2 s - g(s)}$ 收敛；其中 $\alpha = \frac{\pi}{2}\int_0^1 u_0(x)\sin\pi x\,\mathrm{d}x < 0$. 则初边值问题 (33), (5),(6) 的解必在有限时间内 blow up, 即存在有限常数 $\widetilde{T}$, 当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时，有 $\big\|u(\cdot,t)\big\|_{L^p(\Omega)} \to +\infty$, $\forall\, 1 \leq p \leq +\infty$.

定理 8　设初始函数 $u_0(x)$, 非线性函数 f, φ 和函数 $\lambda(s)$ 满足条件：

a)　$\lambda(t) \leq 0$, $\forall\, t \in [0,+\infty)$;

b)　$\varphi(s) \in C^2(R)$ 为凸函数，且对任何 $y < 0$, 有 $\varphi(y) \geq \varphi(0)$;

c)　$f(s) \leq g(s)$, $\forall\, s \in R$, $g(s)$ 为局部 Lipschitz 连续的凹函数，满足 $g(s) - \pi^2 s$ 对 $s \leq 0$ 非正不减，并使积分 $\int_{-\infty}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}s}{\pi^2 s - g(s)}$ 收敛，其中 $\alpha = \frac{\pi}{2}\int_0^1 u_0(x)\sin\pi x\,\mathrm{d}x < 0$,
则初边值问题 (33), (5),(6) 的解必在有限时间内 blow up, 即存在有限常数 $\widetilde{T}$, 当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时，有 $\big\|u(\cdot,t)\big\|_{L^p(\Omega)} \to +\infty$, $\forall\, 1 \leq p \leq +\infty$.

参　考　文　献

1 Engler H. Weak Solutions of a Class of Quasilinear Hyperbolic Integro-differential Equations Describing Viscoelastic Materials. *Arch. Rational. Mech. Anal.*, 1991, 113: 1–38

2 Londen S O. Some Existence Results for a Nonlinear Hyperbolic Integro-differential Equation with Singular Kernel. *J. Integral Equations Appl.*, 1991, 3: 3–30

3 王书彬. 半线性拟双曲型积分微分方程的初边值问题和初值问题. 应用数学学报, 1995, 18(4): 567–578

(Wang Shubin. On the Initial Boundary Value Problem and Initial Value Problem for the Semilinear Pseudo-hyperbolic Integro-differential Equation. *Acta. Math. Appl. Sinica*, 1995, 18(4): 567–578)

4 郭艾. 一类非线性积分偏微分方程的初边值问题. 数学物理学报, 1999, 19(1): 30–38
(Guo Ai. The Initial Boundary Value Problem for a Class of Nonlinear Integro- partial-differential Equations. *Acta. Math. Sci.*, 1999, 19(1): 30–38)

5 Yin Huiming. Weak and Classical Solutions of Some Nonlinear Volterra Integro-Differential Equations. *Comm. Partial. Diff. Eqn.*, 1992, 17(7,8): 1369–1385

6 Gripenberg G. Global Existence of Solutions of Volterra Integro-differential Equations of Parabolic Type. *J. Diff. Eqn.*, 1993, 102: 382–390

7 Mei Ming. Long Time Behavior of Solution for Generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equations. *Nonlinear Anal, T.M.A.*, 1998, 33: 699–714

8 Suveika I V. Mixed Problems for an Equation Describing the Propagation Odd Disturbances in Viscous Media. *Diff. Eqn.*, 1984, 19: 337–347

9 Londen S O, Nohel J A. Nonlinear Volterra Integro-differential Equation Occurring in Heat Flow. *J. Integral Equations*, 1984, 6: 11–50

10 朱位秋. 弹性杆中的非线性波. 固体力学学报, 1980, 1(1,2): 247–253
(Zhu Weiqiu. Nonlinear Waves in Elastic Rods. *Acta. Mech. Solida Sinica*, 1980, 1(1,2): 247–253)

11 张卫国, 马文秀. 广义 Pochhammer-Chree 方程的精确显式孤立波解. 应用数学与力学, 1999, 20(6): 625–632
(Zhang Weiguo, Ma Wenxiu. Explicit and Exact Solitary Wave Solutions to the Generalized Pochhammer-Chree Equations. *Appl. Math. Mech.*, 1999, 20(6): 625–632)

12 Chen Lin. Stability and Instability of Solitary Wave Solutions for Generalized Symmetric Regularized Long Wave Equations. *Physica D*, 1998, 118(1-2): 53–68

13 Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. New York: Springer-Verlag, 1983

14 周毓麟, 符鸿源. 广义 Sine-Gordon 型非线性双曲型方程组. 数学学报, 1983, 26(2): 234–249
(Zhou Yulin, Fu Hongyuan. Nonlinear Hyperbolic Equations of Generalized Sine- Gordon Type. *Acta Math. Sinica*, 1983, 26(2): 234–249)

15 Friedman A. Partial Differential Equations. Reinhart and Wiston: Holt, 1969

ON THE PROBLEM OF THE EXISTENCE OF GLOBAL SOLUTIONS FOR A CLASS OF NONLINEAR CONVOLUTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PSEUDOPARABOLIC TYPE

SHANG Yadong

(*Department of Mathematics, Guangzhou University, Guangzhou* 510405)

GUO Boling

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, P.O. Box 8009, Beijing* 100088)

Abstract This paper studies the initial boundary value problem for a class of nonlinear pseudoparabolic integro-differential equations. The existence, uniqueness, and regularities of the global strongly solution of the problem are proved by combining the Galerkin method and a priori estimates, and some conditions of the nonexistence of global solutions are obtained.

Key words Pseudoparabolic, integro-differential equations, global strong solutions, Galerkin method, blow up