

一类广义模糊控制系统及其特征*

岳士弘 李平

(浙江大学工业控制技术研究所, 杭州 310027)

摘要 在具有再生核的希尔伯特空间中(简记为 r.k.h, 下同), 以一组修正化的再生核作为输入空间的隶属函数, 建立了一种广义的模糊控制系统, 在一定条件下, 该系统事实上包含着是 r.k.h 中函数的最佳插值逼近. 就对未知控制曲线的逼近而言, 典型的模糊控制器^[1]不可能比这种广义的模糊控制系统做得更好. 广义的模糊系统具有以下优点: 对样本的学习一次完成, 克服了一般模糊控制器学习时所面临的解一个非线性最优化问题的困难; 能估计出对待逼近实际控制函数误差的一个确定的上界; 从 Kosko B 所揭示的模糊逼近本质特征^[2], 即确定性的角度来看它也是最优的.

关键词 模糊控制, 隶属函数, 再生核

0 引言

模糊控制方法被用于工业过程的控制及新型家电产品的开发等方面取得很大成功, 深入研究其结构特征及本质成为一个紧迫的任务. [3] 揭示了模糊控制器的插值机理, 指出模糊控制器的本质是插值器, 这种插值虽然形式上与数值分析中的插值没有任何区别, 但内容上却反映了模糊控制系统的逼近的最优性. Kosko 概括和揭示了一般的模糊逼近的本质特征, 即确定性^[2], 是指可加性模糊控制系统是用模糊规则“补块”覆盖待逼近曲线来达到控制效果的. 规则的条件部分(对应输入变量)和结论部分采用的隶属函数的形式不同, 得到的模糊控制系统作为逼近器的确定性也不同, 这种确定性与模糊性是相对的, 反映了对任意输入所得到输出结果的确定程度, 结果的确定性越高越受人喜欢, 所以也把确定性称为最优性. 而 Kosko 的研究表明, 通过补块形成的模糊逼近系统具有最大的确定性, 或者说具有最优性. 当前虽然有许多文献^[4-6]讨论使用不同形式的隶属函数下构造模糊系统的特性, 但这些结果并没有与最优性相结合, 特别在结合具体函数空间的特殊性质去研究模糊控制器的设计方法及本质特征方面, 目前尚未取得重要进展. [7,8] 在一类希尔伯特空间中找到了再生核, 并在一致逼近意义下求出其中的最佳插值逼近算子, 为我们的研究提供了契机. [1,9] 等深入研究和概述了模糊控制器的分析结构和极限结构, 这种输入变量的隶属函数采用三角形形状的模糊控制系统目前被广泛的应用. 上述结论都是在模糊控制器的研究方面所取得重要结果, 将与本文中关于模糊控制系统的成果作对比研究.

本文的其余部分被组织如下, 在第一节, 关于再生核的一些主要结果被回忆和介绍; 在第二节, 论述了在具有再生核 w_2 空间的广义的模糊控制系统的主要特征, 并与典型的模糊控制系统做了对比; 紧接着在第四节讨论了具有再生核 w 空间的广义的模糊控制系统的主要特征. 最后, 分析本文中方法的使用条件和局限性.

本文 2001 年 4 月 9 日收到, 2002 年 8 月 16 日收到修改稿.

*国家 863 基金(2002A412010 号)和浙江大学博士后科研启动基金资助项目.

1 预备知识

记 $w_2^1[a, b] = \{u(x) \mid u(x) \text{ 绝对连续, 且 } u(x) \in L^2[a, b]\}$, $[a, b] \subset \mathbf{R}$. 在 w_2^1 中内积定义为

$$(u, v) = \int_a^b [uv + u'v'] dx, \quad \forall u, v \in w_2^1[a, b]. \quad (1)$$

取范数 $\| \cdot \| = (\cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}}$, [7] 中给出了 $w_2^1[a, b]$ 的再生核为

$$R(x, y) = [ch(x + y - b - a) + ch(|x - y| - b + a)] / 2sh(b - a), \quad (2)$$

即满足下面关系式: $u(x) = (u(y), R(x, y)), \forall u \in w_2^1[a, b]$. $R(x, y)$ 满足对称性, 即 $R(x, y) = R(y, x)$, 记 $R_{x_i}(x) = R(x_i, x) = R(x, x_i)$, 对给出点列 $\{(x_i, y_i)\}_{(1 \leq i \leq n)}$ (y_i 为 x_i 由 $y = u(x)$ 得到的对应值), 按照一致逼近意义的最优插值表达式

$$H_n^w(x) = \sum_{i=1}^n R_i^*(x) f_i, \quad (3)$$

其中 $R_i^*(x) = \sum_{t=1}^i \beta_{it} R_t(x)$, $f_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} y_k$, β_{it} 是函数集 $\{R_t(x)\}_{(1 \leq t \leq n)}$ 的 Schemit 正交化系数. (3) 式满足 $H_n^w(x_i) = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 其逼近误差为:

$$r(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} G_{[i, i+1]}(x, t) l_t u(t) dt, \quad (4)$$

其中 $l_t = -D^2 + I$, D 是广义二阶微分算子, I 是恒等算子. $G_{[i, i+1]}$ 是如下的格林函数:

$$G_{[i, i+1]}(x, t) = \begin{cases} \frac{e^t - e^{2x_{i+1}-t}}{2(e^{2x_i} - e^{2x_{i+1}})} (e^x - e^{2x_i-x}), & x \leq t, \\ \frac{e^t - e^{2x_i-t}}{2(e^{2x_i} - e^{2x_{i+1}})} (e^x - e^{2x_i-x}), & x \geq t, \\ x_i < x, \quad t < x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

记 $W = \{u(x, y) \mid u(x, y) \text{ 在 } I = [a, b] \times [c, d] \text{ 上绝对连续, } u'_x, u'_y, u''_{xy} \in L^2(I)\}$, 由 [8], W 上存在着再生核 $R_{sz}(x, y)$, 且满足: $R_{sz}(x, y) = R_s(x)R_z(y)$, 其中 $R_s(x), R_z(y)$ 分别为一元再生核空间 $w_2^1[a, b]$ 和 $w_2^1[c, d]$ 中的再生核. 对给出点列 $\{(x_i, y_j, u_l)\}_{(1 \leq l \leq L)}$ (u_l 为 (x_i, y_j) 按 $y = u(x, y)$ 的对应值, l 对应下标组 (i, j) ; l 取遍下标 i, j 的一切组合) 的最佳一致逼近意义下的插值算子为:

$$y = R^*(x) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^l \sum_{t=1}^l \beta_k \beta_t R_l \right) u_k. \quad (5)$$

β_l ($l = 1, 2, \dots, n^2$) $\{R_l\}_{(1 \leq l \leq n)}$ 为集合的 Schemit 正交化系数. $R_l = R_{x_i y_j}(x, y)$ ($l = 1, 2, \dots, n$). 它有着与 (4) 式类似的误差估计式,

2 在 w_2^1 中的广义模糊系统

根据 Kosko B^[2] 的分析, 可加性模糊系统的规则中采用对称形式时输入和输出隶属函数的峰点对, 是隶属度最大的点, 也是规则补块的形心, 从而是在反映不确定的模糊系统中的每一个规则补块中确定性最高的点, 因此, 我们必须充分利用这些点的信息, 当让模糊逼近系统 $y = F(x)$ 过所有规则形心 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) 时, 则构成过这些点的最优插值逼近, 同时模糊系统也就具有了最大的确定性. 这正是本文中方法的中心思想.

2.1 广义模糊系统的建立

通过对以上关于 w_2^1 中结果做分析, 可以得到其以下性质.

定理 1 1) 再生核函数 $R_{x_i}(x)$ 在 $[a, x_i]$ 单调递增且下凹, 在 $[x_i, b]$ 上单调递减下凹. 特别令 $a = x_{i-1}, x_i = b$ 或者 $a = x_i, b = x_{i+1}$ 得到的函数仍为区间 $[x_i, x_{i+1}] \subset w_2^1$ 中再生核. 并分别记为 $R_{x_i^-}$ 和 $R_{x_i^+}$. 2) 在任意 $[x_i, x_{i+1}] \subset [a, b]$ 上按 $R_{x_i^-}(x)$ 和 $R_{x_i^+}(x)$ 建立的最优插值系统与 $[a, b]$ 上的最优控制系统在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 具有相同的逼近误差. 3) 再生核函数由参数 a, b, x_i 完全确定, 具有平移不变性, 即对于任意实数 T 和 $x \in [a + T, b + T]$, $R_{x_i+T}(x + T) = R_{x_i}(x)$.

证 1) 计算 $R_{x_i}(x)$ 一阶和二阶导数, 可得在 $[a, x_i]$ 上, $R'_{x_i}(x) > 0, R''_{x_i} > 0$. 在 $[x_i, b]$ 上, $R'_{x_i}(x) < 0, R''_{x_i}(x) > 0$, 故知单调性与凸凹性结论成立. 取再生核函数的表达式 $R_{x_i^+}$ 和 $R_{x_i^-}$ 代入 $u(x) = (u(y), R(x, y))$ 检验, 可知结论成立. 2) 注意到表达式 (4) 在任意区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的逼近误差与 a, b 无关, 故在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上分别取再生核为 $R_{x_{i+1}^-}(x)$ 和 $R_{x_i^+}(x)$ 得到的最优插值逼近式与原来在 $[a, b]$ 上最优插值函数相同的逼近误差. 3) 将任意实数 T 代入 $R_{x_i^+}(x)$ 和 $R_{x_i^-}$ 表达式可验证 3) 成立.

根据定理 2 的 2) 在各区间上所建立最优插值表达式与整个 $[a, b]$ 建立的最优插值表达式等价且具有相对独立性, 这对以后的建模非常重要, 它使得整个区间上的逼近分析可以分解到每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 中进行.

设 $X = [a, b], Y = [m, n]$ 分别为输入变量和输出变量的论域且均为实空间, $A = \{A_i\}$ ($1 \leq i \leq n$) 和 $B = \{B_i\}$ ($1 \leq i \leq n$) 分别为 X 和 Y 上的单峰集, x_i, y_i 分别为 A_i 和 B_i 的峰点, $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b, m < y_1 < y_2 < \dots < y_n < n$ 分别在模糊系统中按下标对应. 隶属函数 A_i 图示和定义如下:

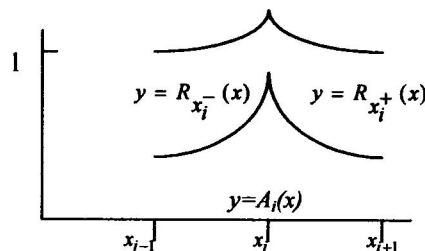


图 1 隶属函数示意图

$$A_i(x) = \begin{cases} R_{x_i^-}(x) \cdot R_{x_i^-}^{-1}(x_i), & \text{当 } x_{i-1} < x \leq x_i, \\ R_{x_i^+}(x) \cdot R_{x_i^+}^{-1}(x_i), & \text{当 } x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (6)$$

本文所述广义的模糊控制系统采用以下形式:

$$y = F(x) = \sum_{i=1}^n A_i(x)m_i, \quad (7)$$

这里 $A_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 是一个正规的模糊集, $A_i(x_i) = 1$, 但由定理 1 性质 1) 易知 $\sum_{i=1}^n A_i(x) < 1$, m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 对应单点模糊集. 任取 $x \in [a, b]$, 且设 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, 则其激活下面两条规则:

$$\text{If } x \text{ is } A_i \text{ then } y \text{ is } B_i, \quad \text{If } x \text{ is } A_{i+1} \text{ then } y \text{ is } B_{i+1},$$

以下确定 (7) 式中的 m_i . 对于任意函数 $u(x) \in W_2^1$, 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上按 $R_{x_i}^+, R_{x_{i+1}}^-$ 的最优一致逼近的表达式 (3) 为

$$\begin{aligned} y = R^*(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \sum_{t=1}^i \beta_{ik} \beta_{it} R_k u_t \\ &= (\beta_{ii}^2 u_i + \beta_{i+1,i}^2 u_i + \beta_{i+1,i} \beta_{i+1,i+1} u_{i+1}) R_{x_i}^+ \\ &\quad + (\beta_{i+1,i} \beta_{i+1,i+1} u_i + \beta_{i+1,i+1}^2 u_{i+1}) R_{x_{i+1}}^-. \end{aligned} \quad (8)$$

故取

$$\begin{aligned} m_i &= R_{x_i}^-(x_i) (\beta_{ii}^2 u_i + \beta_{i+1,i}^2 u_i + \beta_{i+1,i} \beta_{i+1,i+1} u_{i+1}), \\ m_{i+1} &= R_{x_{i+1}}^-(x_i) (\beta_{i+1,i} \beta_{i+1,i+1} u_i + \beta_{i+1,i+1}^2 u_{i+1}). \end{aligned}$$

由 (6), (7) 式得

$$\begin{aligned} |u(x) - F(x)| &= |u(x) - A_i(x)m_i - A_{i+1}(x)m_{i+1}| \\ &= |u(x) - R_{x_i}^+ m_i - R_{x_{i+1}}^- m_{i+1}| = |u(x) - R^*(x)|, \end{aligned}$$

最后一步等号后表达式是代入了 m_i, m_{i+1} 值得到. 以上 β_{ij} ($i, j = 1, 2$) 是在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上 $R_{x_{i+1}}^-$ 和 $R_{x_i}^+$ 的 Schmit 标准正交化系数. 由此得 $F(x) = R^*(x)$, 且 $F(x_i) = R^*(x_i) = u_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 这说明 (7) 本质上是 $u(x)$ 的过点 (x_i, u_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) 最佳一致插值逼近. 在对系统进行模糊控制的设计中总需对 x, u 的值分别乘以比例因子 g_x, g_u , 以使 $xg_x \in [0, 1]$, $ug_u \in [0, 1]$, 由于 $\beta_{ij} \in [0, 1]$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 故可以选择到适当的 g_x, g_u , 使得 $m_i, m_{i+1} \in [0, 1]$. 例如可令 $g_x = g_u = (\sup\{m_i, m_{i+1} | u_i, u_{i+1}\})^{-1}$. 如果对 (7) 式的隶属函数的 (6) 的隶属函数做以下变形:

$$A_i(x) = \begin{cases} (R_{x_i}^-(x) - R_{x_i}^{-1}(x_{i-1})) (R_{x_i}^-(x_i) - R_{x_i}^{-1}(x_{i-1}))^{-1}, & \text{当 } x_{i-1} < x \leq x_i, \\ (R_{x_i}^+(x) - R_{x_i}^{-1}(x_{i+1})) (R_{x_i}^+(x_i) - R_{x_i}^{-1}(x_{i+1}))^{-1}, & \text{当 } x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (9)$$

则 $A_i(x)$ 的值域为 $[0, 1]$, 且 $A_i(x_{i-1}) = A_i(x_{i+1}) = 0$, $A_i(x_i) = 1$. 用 δ 表示 $[a, b]$ 和 $[m, n]$ 被 x_i 和 y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 所划分的最大区间长度. 当 $\delta \rightarrow 0$, 即划分的足够细时, 在区

间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, $|A_i(x) - [(x_i - x_{i-1})^{-1}(x - x_{i-1}) + 1]| \rightarrow 0$, 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上, 同样地有 $|A_i(x) - [(x_i - x_{i+1})^{-1}(x - x_i) + 1]| \rightarrow 0$, 则用 (9) 中的关于 $A_i(x)$ 表达式替换 (7) 中的 $A_i(x)$, 并让 $m_i = u_i$, 则与下面的典型模糊控制器相比较^[9]:

$$y = \sum_{i=1}^n A'_i(x)u_i, \quad A'_i(x) = \begin{cases} (x_i - x_{i-1})^{-1}(x - x_{i-1}) + 1, & x_{i-1} < x \leq x_i, \\ (x_i - x_{i+1})^{-1}(x - x_i) + 1, & x_i < x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (10)$$

对任意的 $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$\left| \sum_{i=1}^n A_i(x)u_i - \sum_{i=1}^n A'_i(x)u_i \right| = \left| \sum_{i=1}^2 (A_i(x) - A'_i(x))u_i \right| \rightarrow 0.$$

此时, 典型的模糊控制器与广义的模糊控制系统无限趋近, 并且 $\sum_{i=1}^n A_i(x) \approx \sum_{i=1}^n A'_i(x) = 1$,

以上讨论说明, 形如 (7) 的广义模糊系统当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 包括过点 (x_i, u_i) 的典型的模糊控制系统, 否则由于最优表达式的唯一性后者不会有前者那样的最优性, 因此我们有下列结论:

定理 2 如果我们仅仅有待逼近函数在一组点 (x_i, u_i) 的值, 则用 (6) 定义的广义模糊控制系统 (7) 包含 w_2^1 中的最佳一致插值逼近; 在用一致插值逼近误差最小最为度量确定性做为最优的意义下, 典型的模糊控制器不可能比广义模糊控制系统做得更好.

注 当划分很细时, 或者一直足够多的插值点时, 此时经典逼近论中许多手段, 例如样条逼近等会取得很好的逼近效果, 此时用模糊系统已经失去了意义. 所以模糊系统更多使用在信息较少的场合, 以上的讨论为最优插值系统作为模糊系统的使用提供了一个接口.

2.2 广义模糊系统的学习

实际建立模糊系统时, 一般都不是对所有的样本直接插值使用, 而是往往先产生规则. 以下结合上一节的结果做进一步讨论. 我们注意到, 仅依赖插值点的广义模糊系统与最优插值系统等价. 记 $A = \{(x_i, y_i)\}_{(1 \leq i \leq n)}$, $B = \{(x_{i_k}, y_{i_k})\}_{(1 \leq k \leq K)}$ 表示从 A 中选出的 K 个代表点, 他可以是 A 中点做聚类产生的聚类中心, 也可以是其他方式产生的代表元. 这意味着首先选定 K 条规则. 对 B 中的点按照上一节方法建立模糊系统 $y = F(x) = \sum_{k=1}^K A_{i_k}(x)m_{i_k}$, 则 $F(x_{i_k}) = y_{i_k}$. 由于 $y = F(x)$ 也就是过 B 中的所有点对 A

集的广义模糊逼近系统. 根据最优插值系统的唯一性, 所以对 A 最优性的意义而言, 其他过 B 集的模糊系统对 A 的逼近不可能比 $y = F(x)$ 做的更好. 设 ε 为待建立系统对 A 集中样本点的学习误差要求, 并记 $C = A - B$. 计算 C 中的各点是否对 $y = F(x)$ 是否满足误差 ε 的要求. 若是, 则学习终止. 否则, 找出全部不满足误差精度要求点, 其全体构成集合 $D = \{(x_{k_t}, y_{k_t}) \mid |F(x_{k_t}) - y_{k_t}| \geq \varepsilon, 1 \leq t \leq T\}$, 按照 D 中样本在输入空间的相应区间, 增加新的模糊集和规则. 例如, 对于含 D 中的样本的区间 $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$ 任选其中一个点 (x_{k_l}, y_{k_l}) (即其输入 x_{k_l} 在区间 $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$ 中), 以 x_{k_l} 为峰点增加模糊集 A_{k_l} , 并分别将模糊集 A_{I_K} 和 $A_{I_{K+1}}$ 的左支和右支去掉, 而在区间 $[x_{i_k}, x_{k_l}]$ 和 $[x_{k_l}, x_{i_{k+1}}]$ 替换为相应的再生核, 则 $y = F(x)$ 过点 $(x_{k_l}, y_{k_l}) \in D$, 从而满足误差要求. 检查区间 $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$ 内其他 D 中点是否对 $y = F(x)$ 满足误差 ε 要求, 若满足则在该区间上停止学习; 否则重复上述步骤直到满足误差 ε 要求, 由于广义模糊系统在每个区间上学习的独立性, 这种学习不影响其他区间的 $y = F(x)$ 的值. 对其他的任何含 D 点区间也做同

样的操作,直到 C 中的所有点都满足误差 ε 的要求. 这样,整个模糊系统对 A 中的样本学习一次完成. 现有的模糊系统当数据点很多时,其学习往往变成一个复杂的非线性运算甚至很难进行,而且往往要重复学习;与其相比,新的模糊系统的学习则根本避免了这一点,大大节省了学习时间,实际的学习仅仅是聚类后增删一些模糊规则,提高了系统学习的实时性. 对于被控制对象,我们往往既有确定的数据信息,又有来自经验或人工智能等手段得到的规则,当我们确定该规则在某个被 B 集划分的区间 $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$ 上含有实际待逼近未知曲线时,则除去在点 x_{i_k} 和 $x_{i_{k+1}}$ 的某个 δ 领域外,规则显然优于广义的模糊系统,这是由于在 δ 领域外,广义的模糊系统带有更大的不确定性,其中的 δ 是根据误差 ε 的要求,按照误差 $r(x)$ 表达式 (4) 求得,以便在区间 $[x_{i_k} - \delta, x_{i_k} + \delta]$ 和 $[x_{i_{k+1}} - \delta, x_{i_{k+1}} + \delta]$ 内, $|F(x) - U(x)| < \varepsilon$, $U(x)$ 为待逼近曲线,则在该区间之外,最优插值系统 $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}] - [x_{i_k}, x_{i_k} + \delta] \cup [x_{i_{k+1}} - \delta, x_{i_{k+1}}]$ (δ 是充分小的正数) 上用规则代替最优模糊系统,否则,将其组为一个单独的模糊规则加入到规则库中,重新构成模糊系统,或者像目前采用的办法,折衷地取两者的交集,这样的广义模糊系统比最优插值系统更加确定,而且不论任何情况下由于逼近误差表达式 $r(x)$ 的存在,我们总可以由建立某个广义的模糊系统的插值点预先较准确估计出他对待估计控制曲线的逼近误差来,这是一般的控制系统所难以做到的.

3 在 w 中广义模糊系统的建立

设 $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$, $Z = [m, n]$ 分别为输入变量 x, y 和输出变量 u 的论域且均为实空间, $A = \{A_i\}$ ($1 \leq i \leq n$), $B = \{B_i\}$ ($1 \leq i \leq n$) 和 $C = \{c_l\}_{(1 \leq l \leq n^2)}$ (C 集要考虑到可建立 n^2 条规则) 分别为 X, Y 和 Z 上的单峰模糊集, x_i, y_i 取为 A_i 和 B_i 的峰点, $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, $c < y_1 < y_2 < \dots < y_n < d$, $R_{y_j^+}(y), R_{y_j^-}(y)$ 意义与上节一致. 定义广义模糊控制系统为:

$$y = F(x, y) = \sum_{i,j=1}^n C_{ij}(x, y) m_{ij}, \quad (11)$$

$$C_{ij} = A_i B_j = \begin{cases} R_{x_i^-} R_{y_j^-} (R_{x_i^-}(x_i) R_{y_j^-}(y_i))^{-1}, & \text{当 } x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j \text{ 时,} \\ R_{x_i^+} R_{y_j^+} (R_{x_i^+}(x_i) R_{y_j^+}(y_j))^{-1}, & \text{当 } x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1} \text{ 时,} \\ R_{x_i^+} R_{y_j^-} (R_{x_i^+}(x_i) R_{y_j^-}(y_j))^{-1}, & \text{当 } x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_{j-1} \leq y \leq y_j \text{ 时,} \\ R_{x_j^-} R_{y_j^+} (R_{x_j^-}(x_j) R_{y_j^+}(y_j))^{-1}, & \text{当 } x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_j \leq y \leq y_{i+1} \text{ 时,} \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

则任取 $(x, y) \in I$, $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $y_j \leq y \leq y_{j+1}$, 其激活四条规则

$$\begin{aligned} & \text{if } x \text{ is } A_i \text{ and } y \text{ is } B_j \text{ then } y = C_{ij}; \\ & \text{if } x \text{ is } A_i \text{ and } y \text{ is } B_{i+1} \text{ then } y = C_{i,j+1}; \\ & \text{if } x \text{ is } A_{i+1} \text{ and } y \text{ is } B_i \text{ then } y = C_{i+1,j}; \\ & \text{if } x \text{ is } A_{i+1} \text{ and } y \text{ is } B_{j+1} \text{ then } y = C_{i+1,j+1}; \end{aligned}$$

分别将式 (5) 的结论用在区间 $[x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$ 上,并不妨设 $l = 1, 2, 3, 4$ 是依次对下标对 $(i, j), (i+1, j), (i, j+1), (i+1, j+1)$ 的编号. β_{lk} ($l = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2, 3, 4$) 表示对该区间上 $R_{x_i^+}(x), R_{x_i^-}(x), R_{y_j^+}(y), R_{y_j^-}(y)$ 的 Schemit 正交化系数. 对任意 $u(x, y) \in w$

的最优逼近式为

$$R^*(x, y) = \sum_{l=1}^4 \sum_{t=1}^l \beta_{lt} u_t \sum_{k=1}^l \beta_{lk} R_k = \sum_{l=1}^4 f_l(u_1, u_2, u_3, u_4) R_l. \quad (12)$$

以上 $f_l(u_1, u_2, u_3, u_4)$ ($l = 1, 2, 3, 4$) 表示把表达式按 R_l ($l = 1, 2, 3, 4$) 整理所得到的系数项. 与 (10) 式相比, 让

$$\begin{cases} m_1 = m_{ij} = R_{x_i^+}(x_i)R_{y_j^+}(y_j)f_1(u_1, u_2, u_3, u_4), \\ m_2 = m_{i+1,j} = R_{x_{i+1}^-}(x_{i+1})R_{y_j^+}(y_j)f_2(u_1, u_2, u_3, u_4), \\ m_3 = m_{i,j+1} = R_{x_i^+}(x_i)R_{y_{j+1}^-}(y_{j+1})f_3(u_1, u_2, u_3, u_4), \\ m_4 = m_{i+1,j+1} = R_{x_{i+1}^-}(x_{i+1})R_{y_{j+1}^-}(y_{j+1})f_4(u_1, u_2, u_3, u_4), \end{cases}$$

代入到 (11) 立即可有 $F(x, y) = R^*(x, y)$, 由此可得到下列结论:

定理 3 设 I 被划分成 n^2 个子区域 $I_l = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$; l 是对 i, j 编号). 用 (11) 定义的广义模糊控制系统在 w 中每个 I_l 上包含着最佳一致插值逼近; 在用一致插值逼近误差作为最优的意义下, 典型的模糊控制器不可能比广义模糊控制系统做得更好.

在 w 中广义模糊系统的有着类似于在 w_2^1 中定理 3 的结论, 只是这里的最优性都是在每个局部子区域取得.

注 考虑到典型的模糊控制器, 与上一节推导相比, 将每个隶属函数平移伸缩使其值域为 $[0, 1]$, 选择 AND 为点积和 OR 为有界和, 由于再生核函数为凹函数, 故在每个区间上的被激活的两条规则之和小于 1, 故有界和可以用算术和代替, 输出变量的隶属函数为但点模糊集, 蕴含算子为 R_c 或 R_p 且划分足够细时, 在上述假设下可知, 此时的 (11) 式, 就是典型的模糊控制器在 w 中的学习类似于在 w_2^1 , 可以略作变形重复进行.

4 结论与评注

1) 本文把隶属函数的构造与经典逼近结合起来, 得到的模糊控制器具有一致逼近意义下的最优性从而更确定.

2) 本文在 r.k.h 中很大程度解决了控制中的两个问题. 第一, 当我们对大量的样本进行学习时, 必然要面临解一个复杂的非线性最优化的问题, 且学习往往陷入局部最小而非全局最优也十分令人困惑. 而本文中的学习只需一次基本的插值运算, 得到的是全局最优解. 第二, 实际使用的模糊系统往往具有很少的确定的信息或根本没有. 通过规则的形心可以很大程度弥补那些由于没有多少的样本或确定信息支持的区域带来的不确定性. 这就使样本插值点和模糊规则纳入一个体系中, 这不是单独由数值分析本身能够带来的优势.

3) 模糊系统对待求曲线误差的某个上界可求. 这是由于我们至少可以根据被点的插值表达式的表达式 $r(x)$ 求出一个确定的上界. 这比目前我们使用一般模糊系统对逼近误差的预测几乎一无所知而言, 是前进了一步.

4) 本文的推导可知, 在一致逼近的意义下, 仅依赖插值做模糊控制器的设计不会取得比经典插值逼近器更好的效果. 因此, 要想使模糊控制器更有效, 要走出仅仅利用插值点设计的误区, 应更加注意规则库的建设, 注意从专家知识, 神经网络和聚类方法等知识中获取规则.

5) 一个面临的应用场合是, 样本或者规则的形心分布是不均匀的, 此时可以使用分段的均匀插值来代替和适应.

6) 建立本文模糊控制器时, 寻找具体内积空间的再生核是很重要的. 以下定理为此判别提供了依据.

定理 4^[10] 令 V 为函数 $f: x \rightarrow R$ 所构成的 Hilbert 空间, 且满足条件 $\forall f \in V, \forall x \in X, \exists \tau_x \leq 0$, 使得 $|f(x)| \leq \tau_x \|f\|_V$, 则 V 一定存在有再生核.

参 考 文 献

- 1 Zhang Naiyao. Structure Analysis of Typical Fuzzy Controller. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 1997, 11(2): 10–21
- 2 Kosko B. Fuzzy Engineering. ???: Prentice Hall, 1995
- 3 Li Hongxing. The Interpolation Mechanism of Fuzzy Control. *Science in China (Series E)*, 1998, 28(3): 259–267
- 4 Zhang Jianwei, Alois Knoll. Constructing Fuzzy Controller with b -spline Models Principles and Application. *Int. J. of Intel. Syst.*, 1998, 13: 257–286
- 5 Witold Pedrycz. Why Triangular Membership Functions? *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 64: 21–30
- 6 Kickerson J, Koskos B. Fuzzy Function Approximation with Ellipsoidal rules. *IEEE Trans., on SMC*, 1996, 8: 43–56
- 7 Cui Minggen, Den Zhongxin. The Best Approximating Interpolation Operator on the Space w_2^1 . *Mathematics Numerical Sinica*, 1986, 8(2): 208–216
- 8 Wen Songlong, Cui Minggen. The Best Approximating Interpolation Operator on the Space w . *Mathematics Numerical Sinica*, 1997, 19(2): 177–184
- 9 Ying H, Guangrong C. Analytical Theory of Fuzzy Control with Application. *Int. Information Sciences*, 2000 (123): 161–165
- 10 Lai Hangqing. The Course of Functional Analysis. China Press (in Taipei of China), 1977

A SORT OF EXTENSIVE FUZZY CONTRLER AND PROPROTIES

YUE SHIHONG

(*Institute of Mathematics, Zhangjiang University, Hangzhou 310027*)

Abstract In Hibert space with reproducing kernel (r.k.h), we set up a special fuzzy controller with the modified membership function in input space, which is the best approximation operator in the r.k.h. The research shows that the classical controller isn't better than this controller. The new controller has following advantages, it can perform learning once to the sample data and keep over the difficulty that a usual fuzzy controller must come from, and can estimate a super bound. In the nature of fuzzy approximation presented by Kosko B, i.e., the certainly, the new fuzzy system in this paper is also optimal.

Key words Fuzzy control, membership function, reproducing kernel