

具有外部输入和偏差的 细胞神经网络的完全稳定性*

李雪梅

(湖南师范大学数学系, 长沙 410081)

黄立宏

(湖南大学数学与计量经济学院, 长沙 410082)

摘要 本文证明了对于由两个细胞组成的细胞神经网络, 外部输入和偏差不影响网络的稳定平衡点的存在性和完全稳定性.

关键词 细胞神经网络, 完全稳定性, 平衡点, 饱和域, 外部输入

1 引言

自从 Chua 和 Yang^[1-2] 于 1988 年提出细胞神经网络 (CNN) 以来, 其理论和应用成为新的研究热点. 在细胞神经网络应用最广泛的像处理中, 要求网络是完全稳定的, 即每一条轨线收敛到某个平衡点. 在这类应用中, 网络的主要作用是把一个输入像转变成一个相应的输出像, 这个输出像对应于一个稳定平衡点, 这时也要求网络有双值输出, 即要求对应的状态方程有饱和域内的平衡点. 饱和域内稳定平衡点的存在性是完全稳定性的一个很重要的条件, 因此有大量的文献^[3-14] 讨论饱和域内稳定平衡点的存在性和网络的完全稳定性. 但有不少文献^[3-8] 是在没有外部输入和偏差的情况下讨论的. 外部输入和偏差 (表示阈值, 或环境等) 对网络饱和域内平衡点的存在性和完全稳定性是否有影响, 本文通过由两个细胞组成的细胞神经网络来讨论这一问题. 我们先给出一个例子说明一个细胞神经网络当没有外部输入和偏差时是不完全稳定的, 而当加入外部输入时变成完全稳定了; 然后证明了当没有外部输入和偏差时两个细胞组成的网络有饱和域内的平衡点, 那么外部输入和偏差将不会影响网络饱和域内平衡点的存在性和完全稳定性.

[3] 讨论了不带外部输入和偏差的两个细胞组成的细胞神经网络的动力性质, 得到网络当有饱和域内平衡点存在时是完全稳定的. 长期以来, 猜测一个细胞神经网络只要存在饱和域内的平衡点, 这个网络可能是完全稳定的. [9] 给出了一个由两个细胞组成的网络的反例说明此猜测不成立, 由 [3] 的结论可知此反例是错误的, 这是由于计算误差所造成的. 我们在 [15] 中举出了一个由三个细胞组成的网络的反例说明此猜测确实不成立. 为了了解神经网络有些什么样复杂的动力性质, 也为了讨论的方便, 有不少文献只讨论由一个或两个神经元 (或细胞) 组成的网络的动力性质. 由本文和 [15] 的结论

本文 2001 年 6 月 18 日收到. 2002 年 11 月 18 日收到修改稿.

* 教育部重点项目, 博士点基金和优秀青年教师基金资助项目.

说明神经元(或细胞)的个数影响网络的动力性质.

2 网络模型和预备知识

两个细胞组成的 CNN, 在标准化参数下, 其状态方程为

$$\dot{x} = -x + Ay(x) + u \quad A; r \quad \dot{x}_i = -x_i + a_{i1}y_1(x_1) + a_{i2}y_2(x_2) + u_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

其中 $x = (x_1, x_2)^T$ 是状态向量, $A = (a_{ij})$ 是反馈矩阵, $u = (u_1, u_2)^T$ 是由外部输入和偏差组成的常向量, $y = (y_1, y_2)^T$ 是输出向量, 输出函数为 $y_i(x_i) = 0.5|x_i+1| - 0.5|x_i-1|$, $i = 1, 2$. 为了确保 CNN 正常工作, 就要求输出是双值的, 即 $y_i = \pm 1$, 这就要求饱和域外的平衡点是不稳定的, 为了使饱和域外的平衡点不稳定, 假设自反馈大于 1^[1], 即

$$a_{11} > 1, \quad a_{22} > 1.$$

因此在讨论 CNN 的完全稳定性时, 总假设自反馈大于 1, 讨论稳定平衡点的存在性, 也就是指讨论饱和域内平衡点的存在性. 在本文的讨论中, 也假设上述不等式成立.

由于 CNN(1) 是分段线性系统, 状态空间能分成 9 个区域, 在每一个区域中, CNN(1) 是线性的, 每一个区域用记号 $\{s_1, s_2\}$ 来表示, 其中

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{iff } x_i > 1, \\ X, & \text{iff } |x_i| \leq 1, \\ -1, & \text{iff } x_i < -1. \end{cases}$$

如记号 $\{X, -1\}$ 表示域 $\{(x_1, x_2)^T : |x_1| \leq 1, x_2 < -1\}$, 即细胞 1 在输出函数的线性部分工作, 而细胞 2 在饱和值 -1 部分工作. 域 $\{X, X\}$ 称为中心域或线性域, 域 $\{\pm 1, \pm 1\}$ 和 $\{\mp 1, \pm 1\}$ 称为饱和域, 其余的区域称为部分饱和域.

CNN(1) 的所有可能的平衡点如下 ($\det(A - I) \neq 0$):

区域	符号	平衡点的坐标
$\{X, X\}$	O	$x_{10} = \frac{a_{12}u_2 - (a_{22}-1)u_1}{(a_{11}-1)(a_{22}-1) - a_{12}a_{21}}, \quad x_{20} = \frac{a_{21}u_1 - (a_{11}-1)u_2}{(a_{11}-1)(a_{22}-1) - a_{12}a_{21}}$
$\{1, X\}$	B	$x_{10} = a_{11} + u_1 - \frac{a_{12}a_{21} + a_{12}u_2}{a_{22}-1}, \quad x_{20} = -\frac{a_{21} + u_2}{a_{22}-1}$
$\{-1, X\}$	C	$x_{10} = -a_{11} + u_1 + \frac{a_{12}a_{21} - a_{12}u_2}{a_{22}-1}, \quad x_{20} = \frac{a_{21} - u_2}{a_{22}-1}$
$\{X, 1\}$	D	$x_{10} = -\frac{a_{12} + u_1}{a_{11}-1}, \quad x_{20} = a_{22} + u_2 - \frac{a_{12}a_{21} + a_{21}u_1}{a_{11}-1}$
$\{X, -1\}$	E	$x_{10} = \frac{a_{12} - u_1}{a_{11}-1}, \quad x_{20} = -a_{22} + u_2 + \frac{a_{12}a_{21} - a_{21}u_1}{a_{11}-1}$
$\{1, 1\}$	F	$x_{10} = a_{11} + a_{12} + u_1, \quad x_{20} = a_{21} + a_{22} + u_2$
$\{-1, 1\}$	G	$x_{10} = -a_{11} + a_{12} + u_1, \quad x_{20} = -a_{21} + a_{22} + u_2$
$\{-1, -1\}$	H	$x_{10} = -a_{11} - a_{12} + u_1, \quad x_{20} = -a_{21} - a_{22} + u_2$
$\{1, -1\}$	K	$x_{10} = a_{11} - a_{12} + u_1, \quad x_{20} = a_{21} - a_{22} + u_2$

注: I 表示单位矩阵. 在下面, O, B, C, ..., K 均表示表中的平衡点.

由输出函数可知 CNN(1) 在饱和域内的平衡点都是稳定的, 因此, 在细胞神经网络的文献中, 讨论稳定平衡点的存在性就是讨论饱和域内平衡点的存在性. 在后面的讨论

中, 我们需要用到如下几个引理:

引理 1 若 CNN(1) 没有闭轨, 则 CNN(1) 是完全稳定的.

证 因为 CNN(1) 是分段线性的, 因此其 ω 极限集不可能由平衡点和连接平衡点的轨线组成 (即 ω 极限集不可能是一个奇异集合). 这样 CNN(1) 只能有一个由平衡点组成的 ω 极限集, 又由于 (1) 的每一个解是有界的^[1], 故每一条轨线必收敛到一个平衡点.

引理 2^[16] (1) 的任何闭轨内至少存在一个平衡点.

引理 3^[17] (1) 的每一个饱和域内的平衡点都是稳定的, 而且包含此平衡点的饱和域是此平衡点吸引域的一部分.

推论 在 (1) 的任何闭轨内不存在稳定平衡点.

引理 4^[18] 假设 $P = (p_{ij})$ 是一个具有正对角元素的 $n \times n$ 矩阵, 存在一个正对角矩阵 $D = \text{diag} \{d_1, \dots, d_n\}$ 使得 PD 是严格对角控制的, 即

$$d_i p_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n d_j |p_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

当且仅当 P 的比较矩阵是非奇 M - 矩阵 (用 C_1 表示所有这样的矩阵 P 的集合).

下面的例子表明外部输入 u 可改变 CNN(1) 的完全稳定性.

例 两细胞的 CNN

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2y_1(x_1) + 2y_2(x_2), \quad \dot{x}_2 = -x_2 - 2y_1(x_1) + 2y_2(x_2) \quad (2)$$

有唯一平衡点 $(0, 0)$, 且此平衡点是不稳定焦点. 由于 CNN(2) 的所有解有界^[1], 因此 (2) 至少有一个极限环. 从而 (2) 不是完全稳定的. 但当加入外部输入 $u = (2, 2)^T$ 时, 细胞神经网络

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2y_1(x_1) + 2y_2(x_2) + 2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - 2y_1(x_1) + 2y_2(x_2) + 2 \quad (3)$$

是完全稳定的. 事实上, (3) 有两个稳定结点 $(6, 2)$ 和 $(2, -2)$ 分别在域 $\{1, 1\}$ 和 $\{1, -1\}$ 中, 一个鞍点 $(4, 0)$ 在域 $\{1, X\}$ 中. 若 (3) 有一个闭轨, 由推论此闭轨只能环绕鞍点 $(4, 0)$, 这样, 这个闭轨就会与鞍点的稳定流 $\{(x_1, x_2) : x_1 > 1, x_2 = 0\}$ 相交而破坏解的唯一性定理. 因此由引理 1, (3) 是完全稳定的.

类似 [3] 的讨论, 对 CNN(1), 易知其饱和域内的平衡点是稳定结点, 部分饱和域内的平衡点是鞍点, 线性域内的平衡点当 $\det(A - I) > 0$ 时是不稳定结点或不稳定焦点.

当 $u = 0$, (1) 为

$$\dot{x}_i = -x_i + a_{i1}y_1(x_1) + a_{i2}y_2(x_2), \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

由 [3] 中的式 (41), (46), (51) 和 (56), 有

引理 5 CNN(4) 至少有一个饱和域内稳定平衡点的充分必要条件是下列不等式组之一成立:

$$\begin{cases} a_{11} - 1 > a_{12}, \\ a_{22} - 1 > a_{21}; \end{cases} \quad A; r \quad \begin{cases} a_{11} - 1 > -a_{12}, \\ a_{22} - 1 > -a_{21}. \end{cases} \quad (5)$$

在下一节我们讨论 CNN(1) 的稳定平衡点的存在性和完全稳定性.

3 稳定平衡点和完全稳定性

定理 1 若 CNN(4) 有一个饱和域内的稳定平衡点, 则对任意 $u = (u_1, u_2)^T$, CNN(1) 也有饱和域内的稳定平衡点.

证 由引理 5, 我们假设不等式

$$a_{11} - 1 > -a_{12}, \quad a_{22} - 1 > -a_{21} \quad (6)$$

成立, 因对另一组不等式 $a_{11} - 1 > a_{12}$ 和 $a_{22} - 1 > a_{21}$ 成立时, 其证明是类似的, 故略去其证明. 下面我们按 u_1 和 u_2 的取值情况给出证明.

a) $u_1 u_2 \geq 0$.

当 $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$ 或 $u_1 \leq 0, u_2 \leq 0$ 时, F 或 H (为表中的平衡点) 分别是域 $\{1, 1\}$ 或 $\{-1, -1\}$ 内的平衡点.

b) $u_1 u_2 < 0$.

我们只对 $u_1 < 0$ 且 $u_2 > 0$ 的情况给出证明, 相应地, $u_1 > 0$ 且 $u_2 < 0$ 的情况可类似地证明 (交换细胞 1 和细胞 2 的位置即可). 我们把区域 $u_1 < 0$ 且 $u_2 > 0$ 分成如下三部分:

i) $1 - a_{11} - a_{12} < u_1 < 0, u_2 > 0$;

ii) $u_1 \leq 1 - a_{11} - a_{12}, 0 < u_2 < a_{22} - 1 + a_{21}$;

iii) $u_1 \leq 1 - a_{11} - a_{12}, u_2 \geq a_{22} - 1 + a_{21}$.

我们对这三部分分别给出定理的证明.

i) 由式 (6), F 的坐标满足

$$x_{10} = a_{11} + a_{12} + u_1 > 1, \quad x_{20} = a_{21} + a_{22} + u_2 > a_{22} - 1 + a_{21} + 1 > 1.$$

故 F 是域 $\{1, 1\}$ 内的稳定平衡点.

ii) 由式 (6), H 的坐标满足

$$x_{10} = -a_{11} - a_{12} + u_1 < -a_{11} - a_{12} < -1, \quad x_{20} = -a_{21} - a_{22} + u_2 < -1.$$

故 H 是域 $\{-1, -1\}$ 内的稳定平衡点.

iii) 由式 (6), G 的坐标满足

$$\begin{aligned} x_{10} &= -a_{11} + a_{12} + u_1 \leq 2(1 - a_{11}) - 1 < -1, \\ x_{20} &= -a_{21} + a_{22} + u_2 \geq 2(a_{22} - 1) + 1 > 1. \end{aligned}$$

因此 G 是域 $\{-1, 1\}$ 内的稳定平衡点. 证毕.

定理 2 假设 CNN(4) 有饱和域内的平衡点, 则对任何 $u = (u_1, u_2)^T$, CNN(1) 是完全稳定的.

证 当 $a_{12}a_{21} = 0$ 时, 由 [9] 中的定理 5 知 (1) 是完全稳定的; 当 $a_{12}a_{21} > 0$ 时, 取 $P = \text{diag}\{1, a_{12}/a_{21}\}$, 则 P 是正对角矩阵且 PA 是对称的, 由 [11] 中的定理 1 及其后面的讨论可知 (1) 也是完全稳定的; 当 $a_{12}a_{21} < 0$ 时, 我们仅给出 $a_{12} > 0$ 且 $a_{21} < 0$ 的情况的证明, 因 $a_{12} < 0$ 且 $a_{21} > 0$ 的情况可类似地证明 (实际上只要交换细胞 1 和细胞 2 的位置就化为前一种情况). 由本定理的假设可知式 (5) 成立, 再由 $a_{12} > 0, a_{21} < 0, a_{11} - 1 > 0$ 及 $a_{22} - 1 > 0$, 因此式 (5) 与下列不等式组之一等价:

$$\text{i) } \begin{cases} a_{11} - 1 > a_{12}, \\ a_{22} - 1 > -a_{21}; \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} a_{11} - 1 > a_{12}, \\ 0 < a_{22} - 1 \leq -a_{21}; \end{cases} \quad \text{iii) } \begin{cases} 0 < a_{11} - 1 \leq a_{12}, \\ a_{22} - 1 > -a_{21}. \end{cases}$$

若不等式组 i) 成立, 取对角矩阵为 $\text{diag}\{1, 1\}$, 由引理 4 可知 $A - I$ 是 C_1 - 矩阵, 从而由 [9] 中的定理 5 知 (1) 是完全稳定的; 因不等式组 iii) 对应的证明类似于不等式组 ii) 对应的证明 (通过交换细胞 1 和细胞 2 的位置即可), 将略去; 下面就只对不等式组 ii) 成立时给出证明.

直线

$$\begin{aligned} l_1 : u_2 &= 1 - a_{22} - a_{21}, & l_2 : u_2 &= -(1 - a_{22} - a_{21}), & l_3 : u_2 &= a_{22} - 1 - a_{21}, \\ l_4 : u_2 &= -(a_{22} - 1 - a_{21}), & l_5 : u_1 &= a_{11} - 1 - a_{12}, & l_6 : u_1 &= -(a_{11} - 1 - a_{12}), \\ l_7 : u_1 &= a_{11} - 1 + a_{12}, & l_8 : u_1 &= -(a_{11} - 1 + a_{12}) \end{aligned}$$

把 (u_1, u_2) 平面分成了二十五个开区域及边界, 这些区域用 D_1 到 D_{25} 表示 (见图 1), 点 a 和 b 分别表示直线 l_5 与 l_1 , l_5 与 l_2 的交点. 当 $a_{22} - 1 = -a_{21}$ 时, l_1 和 l_2 都落在 $u_1 = 0$ 上, 此时就没有区域 D_1, D_2, D_{10}, D_{18} 和 D_6 , 对应的讨论与 $a_{22} - 1 \neq -a_{21}$ 的情况一样. 因此我们假设

$$a_{11} - 1 > a_{12}, \quad 0 < a_{22} - 1 < -a_{21}. \tag{7}$$

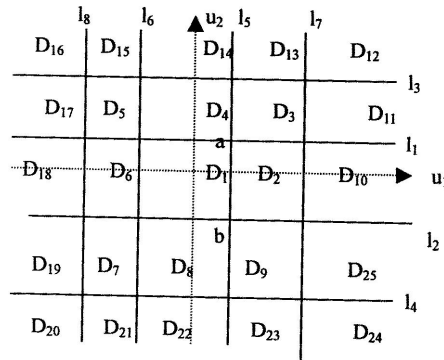


图 1

我们可把这些区域和边界分成八类:

- 类一: 区域 D_1 ;
- 类二: 区域 D_2, D_4, D_6, D_8 ;
- 类三: 区域 D_3, D_5, D_7, D_9 ;
- 类四: 区域 $D_{10}, D_{14}, D_{18}, D_{22}$;
- 类五: 区域 $D_{11}, D_{13}, D_{15}, D_{17}, D_{19}, D_{21}, D_{23}, D_{25}$;
- 类六: 区域 $D_{12}, D_{16}, D_{20}, D_{24}$;
- 类七: 区域 $D_1 - D_{25}$ 的边界 (除去直线 $l_1 - l_8$ 的交点);
- 类八: $l_1 - l_8$ 的交点.

设 $\Delta = \det(A - I)$, 由式 (7) 可知 $\Delta > 0$. 直线

$$l_9 : (a_{11} - 1)u_2 - a_{21}u_1 = \Delta, \quad l_{10} : (a_{11} - 1)u_2 - a_{21}u_1 = -\Delta.$$

把区域 D_1 分成三个开区域部分 (见图 2):

$$\begin{aligned} G_{11} &= \{(u_1, u_2) \in D_1 : |(a_{11} - 1)u_2 - a_{21}u_1| < \Delta\}, \\ G_{12} &= \{(u_1, u_2) \in D_1 : (a_{11} - 1)u_2 - a_{21}u_1 > \Delta\}, \\ G_{13} &= \{(u_1, u_2) \in D_1 : (a_{11} - 1)u_2 - a_{21}u_1 < -\Delta\}, \end{aligned}$$

而把区域 D_2 分成两个开区域部分:

$$\begin{aligned} G_{21} &= \{(u_1, u_2) \in D_2 : (a_{11} - 1)u_2 - a_{21}u_1 > \Delta\}, \\ G_{22} &= \{(u_1, u_2) \in D_2 : (a_{11} - 1)u_2 - a_{21}u_1 < \Delta\}, \end{aligned}$$

或者直线 l_9 不穿过区域 D_1 (此时 $G_{12} = G_{13} = \phi$ (空集)), 但 l_9 将会把区域 D_3 分成两个开区域部分 (见图 3):

$$\begin{aligned} G_{31} &= \{(u_1, u_2) \in D_3 : (a_{11} - 1)u_2 - a_{21}u_1 > \Delta\}, \\ G_{32} &= \{(u_1, u_2) \in D_3 : (a_{11} - 1)u_2 - a_{21}u_1 < \Delta\}. \end{aligned}$$

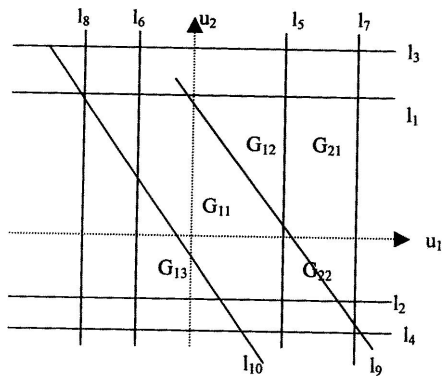


图 2

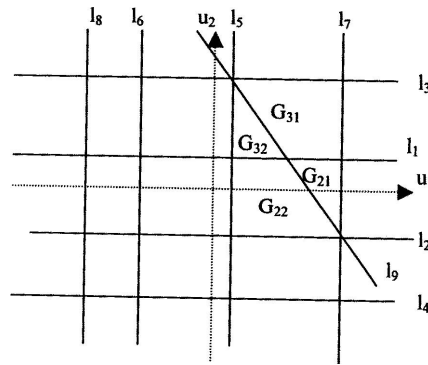


图 3

下面, 我们分别取 (u_1, u_2) 在类一中属于 D_1 , 在类二中属于 D_2 , 在类三中属于 D_3 , 在类四中属于 D_{10} , 在类五中属于 D_{11} , 在类六中属于 D_{12} , 在类七中属于开线段 \bar{ab} 及在类八中取点 a 来证明 (1) 的完全稳定性, 其它情况可类似证明.

类一: 取 D_1 来考虑, 则

$$|u_1| < a_{11} - 1 - a_{12}, \quad |u_2| < 1 - a_{22} - a_{21}. \tag{8}$$

我们首先按平衡点表来讨论 CNN(1) 的平衡点的情况.

1.1. 对域 $\{X, X\}$ 中的可能的平衡点 O , 由式 (8), 其坐标满足

$$\begin{aligned} |x_{10}| &< \frac{1}{\Delta} [a_{12}(1 - a_{22} - a_{21}) + (a_{22} - 1)(a_{11} - 1 - a_{12})] < 1, \\ |x_{20}| &\begin{cases} < 1, & (u_1, u_2) \in G_{11}, \\ > 1, & (u_1, u_2) \in G_{12} \cup G_{13}. \end{cases} \end{aligned}$$

因此当 $(u_1, u_2) \in G_{11}$ 时, $O \in \{X, X\}$; 当 $(u_1, u_2) \in G_{12} \cup G_{13}$ 时, $O \notin \{X, X\}$; 当 (u_1, u_2) 分别在 G_{11} 与 G_{12} 或 G_{11} 与 G_{13} 的边界上时, O 分别在域 $\{X, X\}$ 与 $\{X, -1\}$ 或 $\{X, X\}$ 与 $\{X, 1\}$ 的边界上.

1.2. 对域 $\{1, X\}$ 中的可能的平衡点 B , 由式 (8), 其坐标满足

$$\begin{aligned} x_{10} &> a_{11} - (a_{11} - 1 - a_{12}) + \frac{-a_{12}a_{21} - a_{12}(1 - a_{22} - a_{21})}{a_{22} - 1} = 2a_{12} + 1 > 1, \\ x_{20} &> \frac{-a_{21} - (1 - a_{22} - a_{21})}{a_{22} - 1} = 1, \end{aligned}$$

故 $B \notin \{1, X\}$.

1.3. 对域 $\{-1, X\}$ 中的可能的平衡点 C , 由式 (8), 其坐标满足

$$\begin{aligned} x_{10} &< -a_{11} + a_{11} - 1 - a_{12} + \frac{a_{12}a_{21} + a_{12}(1 - a_{22} - a_{21})}{a_{22} - 1} = -2a_{12} - 1 < -1, \\ x_{20} &< \frac{a_{21} + 1 - a_{22} - a_{21}}{a_{22} - 1} = -1, \end{aligned}$$

因此, $C \notin \{-1, X\}$.

1.4. 对域 $\{X, 1\}$ 中的可能的平衡点 D , 其坐标满足

$$|x_{10}| < \frac{a_{12} + a_{11} - 1 - a_{12}}{a_{11} - 1} = 1, \quad x_{20} \begin{cases} > 1, & (u_1, u_2) \in G_{11} \cup G_{12}, \\ < 1, & (u_1, u_2) \in G_{13}, \end{cases}$$

因此, 当 $(u_1, u_2) \in G_{11} \cup G_{12}$ 或 (u_1, u_2) 在 G_{11} 与 G_{12} 的边界上时, $D \in \{X, 1\}$; 当 $(u_1, u_2) \in G_{13}$ 时, $D \notin \{X, 1\}$; 当 (u_1, u_2) 在 G_{11} 与 G_{13} 的边界上时, D 在 $\{X, X\}$ 与 $\{X, 1\}$ 的边界上 (此时 D 和 O 重合).

1.5. 对域 $\{X, -1\}$ 中的可能的平衡点 E , 其坐标满足

$$|x_{10}| < \frac{a_{12} + a_{11} - 1 - a_{12}}{a_{11} - 1} = 1, \quad x_{20} \begin{cases} < -1, & (u_1, u_2) \in G_{11} \cup G_{13}, \\ > -1, & (u_1, u_2) \in G_{12}, \end{cases}$$

因此, 当 $(u_1, u_2) \in G_{11} \cup G_{13}$ 或 (u_1, u_2) 在 G_{11} 与 G_{13} 的边界上时, $E \in \{X, -1\}$; 当 $(u_1, u_2) \in G_{12}$ 时, $E \notin \{X, -1\}$; 当 (u_1, u_2) 在 G_{11} 和 G_{12} 的边界上时, E 在 $\{X, X\}$ 与 $\{X, -1\}$ 的边界上 (此时 E 与 O 重合).

1.6. 对域 $\{1, 1\}$ 中的可能的平衡点 F ,

$$x_{10} = a_{11} + a_{12} + u_1 > 2a_{12} + 1 > 1, \quad x_{20} = a_{21} + a_{22} + u_2 < 1,$$

故 $F \notin \{1, 1\}$.

1.7. 对域 $\{-1, 1\}$ 中的可能的平衡点 G ,

$$x_{10} = -a_{11} + a_{12} + u_1 < -1, \quad x_{20} = -a_{21} + a_{22} + u_2 > 2a_{22} - 1 > 1,$$

故 $G \in \{-1, 1\}$.

1.8. 对域 $\{-1, -1\}$ 中的可能的平衡点 H ,

$$x_{10} = -a_{11} - a_{12} + u_1 < -2a_{12} - 1 < -1, \quad x_{20} = -a_{21} - a_{22} + u_2 > -1,$$

因此, $H \notin \{1, -1\}$.

1.9. 对域 $\{X, X\}$ 中的可能的平衡点 K ,

$$x_{10} = a_{11} - a_{12} + u_1 > 1, \quad x_{20} = a_{21} - a_{22} + u_2 < 1 - 2a_{22} < -1,$$

故 $K \in \{1, -1\}$.

综上所述, 当 $(u_1, u_2) \in G_{11}$ 时, CNN(1) 有五个平衡点: 两个稳定结点 G 和 K 分别在域 $\{-1, 1\}$ 和 $\{1, -1\}$ 中, 两个鞍点 D 和 E 分别在域 $\{X, 1\}$ 和 $\{X, -1\}$ 中, 一个不稳定结点 (或不稳定焦点) O 在域 $\{X, X\}$ 中. 鞍点 D 在域 $\{X, 1\}$ 中的稳定流为 $\{(x_1, x_2) : x_1 = -(a_{12} + u_1)/(a_{11} - 1), x_2 > 1\}$, 此稳定流延伸到域 $\{X, X\}$ 中. 为了证明 (1) 是完全稳定的, 由引理 1, 我们只须证明 (1) 无闭轨. 下面来分析一下域 $\{X, X\}$ 中的向量场的流向,

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a_{12} + u_1}{a_{11} - 1}, & |x_2| < 1, & \frac{dx_1}{dt} = a_{12}(x_2 - 1) < 0; \\ x_1 &= \frac{a_{12} - u_1}{a_{11} - 1}, & |x_2| < 1, & \frac{dx_1}{dt} = a_{12}(x_2 + 1) > 0. \end{aligned}$$

由于 $x_1 = -(a_{12} + u_1)/(a_{11} - 1)$ 位于平衡点 O 的横坐标 x_{10} 的左边, 而 $x_1 = (a_{12} - u_1)/(a_{11} - 1)$ 位于 x_{10} 的右边, 因此, 平衡点 O 位于由四条直线 $x_1 = -(a_{12} + u_1)/(a_{11} - 1)$, $x_1 = (a_{12} - u_1)/(a_{11} - 1)$, $x_2 = 1$ 和 $x_2 = -1$ 所围成的区域内. 考虑函数

$$V(x_1, x_2) = (x_1 - x_{10})^2 - \frac{a_{12}}{a_{21}}(x_2 - x_{20})^2,$$

其中 x_{10} 和 x_{20} 是平衡点 O 的两坐标, 在域 $\{X, X\}$ 中, 沿 (1) 的解, V 关于 t 的导数满足

$$\frac{dV}{dt} = 2(a_{11} - 1)(x_1 - x_{10})^2 - \frac{2a_{12}(a_{22} - 1)}{a_{21}}(x_2 - x_{20})^2 \geq 0.$$

我们可以选取适当的正常数 c 使得曲线 $V(x_1, x_2) = c$ 及直线 $x_1 = -(a_{12} + u_1)/(a_{11} - 1)$, $x_1 = (a_{12} - u_1)/(a_{11} - 1)$ 和 $x_2 = 1$ 所围成的区域 Ω_1 在域 $\{X, X\}$ 中, 而 D 的稳定流当 $t \leq 0$ 时进入 Ω_1 . 若 (1) 存在闭轨, 则此闭轨内的平衡点只可能是 O , 从上面分析可知此闭轨会与鞍点 D 或 E 的稳定流相交, 从而破坏解的唯一性, 故 (1) 是完全稳定的.

当 $(u_1, u_2) \in G_{12}$ 时, CNN(1) 有三个平衡点: 两个稳定结点 G 和 K , 一个鞍点 D ; 当 $(u_1, u_2) \in G_{13}$ 时, CNN(1) 也有三个平衡点: 两个稳定结点 G 和 K , 一个鞍点 E ; 对这两种情况, 若 (1) 有闭轨, 由推论, 此闭轨内的平衡点只可能是鞍点, 但闭轨会与鞍点的稳定流相交, 而导出矛盾, 故 (1) 也是完全稳定的.

当 (u_1, u_2) 在 G_{11} 与 G_{12} 的边界上取值时, CNN(1) 有四个平衡点: 两个稳定结点 G 和 K , 一个鞍点 D 和位于 $\{X, X\}$ 与 $\{X, -1\}$ 边界上的平衡点 E (与 O 重合); 当 (u_1, u_2) 在 G_{11} 与 G_{13} 的边界上取值时, CNN(1) 也有四个平衡点: 两个稳定结点 G 和 K , 一个鞍点 E 和位于 $\{X, X\}$ 与 $\{X, 1\}$ 边界上的平衡点 D (与 O 重合), 对这两种情况, (1) 也不可能存在闭轨, 从而 (1) 也是完全稳定的.

类二: 取 D_2 来考虑, 则有

$$a_{11} - 1 - a_{12} < u_1 < a_{11} - 1 + a_{12}, \quad |u_2| < 1 - a_{22} - a_{21}. \quad (9)$$

2.1. 对域 $\{X, X\}$ 中的可能的平衡点 O , 由式 (9), 其坐标满足

$$\begin{aligned} |x_{10}| &< \frac{1}{\Delta} [a_{12}(1 - a_{22} - a_{21}) + (a_{22} - 1)(a_{11} - 1 + a_{12})] < 1, \\ (u_1, u_2) &\in G_{22}, \quad |x_{20}| < 1; \quad (u_1, u_2) \in G_{21}, \quad x_{20} < -1, \end{aligned}$$

故当 $(u_1, u_2) \in G_{22}$ 时, $O \in \{X, X\}$; 当 $(u_1, u_2) \in G_{21}$ 时, $O \notin \{X, X\}$; 当 (u_1, u_2) 在 G_{21} 和 G_{22} 的边界上时, O 位于域 $\{X, X\}$ 与 $\{X, -1\}$ 的边界上.

2.2. 对域 $\{1, X\}$ 中的可能的平衡点 B , 它的坐标满足

$$x_{10} > 2a_{11} - 1 > 1, \quad x_{20} > \frac{-a_{21} - (1 - a_{22} - a_{21})}{a_{22} - 1} = 1,$$

故 $B \notin \{1, X\}$.

2.3. 对域 $\{-1, X\}$ 中的可能的平衡点 C , 它的坐标满足

$$\begin{aligned} x_{10} &< -a_{11} + a_{11} - 1 + a_{12} + \frac{a_{12}a_{21} + a_{12}(1 - a_{22} - a_{21})}{a_{22} - 1} = -1, \\ x_{20} &< \frac{a_{21} + 1 - a_{22} - a_{21}}{a_{22} - 1} = -1, \end{aligned}$$

故 $C \notin \{-1, X\}$.

2.4. 对域 $\{X, 1\}$ 中的可能的平衡点 D , 它的坐标满足

$$x_{10} < -\frac{a_{12} + a_{11} - 1 - a_{12}}{a_{11} - 1} = -1, \quad x_{20} > 2a_{22} - 1 > 1,$$

故 $D \notin \{X, 1\}$.

2.5. 对域 $\{X, -1\}$ 中的可能的平衡点 E , 它的坐标满足

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{a_{12} - (a_{11} - 1 + a_{12})}{a_{11} - 1} < x_{10} < \frac{a_{12} - (a_{11} - 1 - a_{12})}{a_{11} - 1} < \frac{a_{12}}{a_{11} - 1} < 1, \\ x_{20} &= \frac{(a_{11} - 1)u_2 - a_{21}u_1 - \Delta}{a_{22} - 1} - 1 \begin{cases} < -1, & (u_1, u_2) \in G_{22}, \\ > -1, & (u_1, u_2) \in G_{21}, \end{cases} \end{aligned}$$

因此, 当 $(u_1, u_2) \in G_{22}$ 时, $E \in \{X, -1\}$; 当 $(u_1, u_2) \in G_{21}$ 时, $E \notin \{X, -1\}$; 当 (u_1, u_2) 在 G_{22} 与 G_{21} 的边界上取值时, E 位于 $\{X, X\}$ 和 $\{X, -1\}$ 的边界上 (此时 E 和 O 重合).

2.6. 通过讨论各饱和域内可能的平衡点的坐标, 可知饱和域内只有一个平衡点 K 位于域 $\{1, -1\}$ 中.

综上所述, 当 $(u_1, u_2) \in G_{22}$ 时, CNN(1) 有三个平衡点: 一个稳定结点 K 在域 $\{1, -1\}$ 中, 一个鞍点 E 在域 $\{X, -1\}$ 中以及一个不稳定结点 (或不稳定焦点) O 在域 $\{X, X\}$ 中, 象类一中一样做向量场的分析, 可得 (1) 是完全稳定的.

当 $(u_1, u_2) \in G_{21}$ 时, CNN(1) 只有一个平衡点: 稳定结点 K , 由推论可知 (1) 是完全稳定的.

当 (u_1, u_2) 在 G_{21} 和 G_{22} 的边界上取值时, CNN(1) 有两个平衡点: 一个稳定结点 K 和一个位于 $\{X, X\}$ 与 $\{X, -1\}$ 的边界上的平衡点 E (与 O 重合). 平衡点 E 在域 $\{X, -1\}$ 中的稳定流为 $\{(x_1, x_2) : x_1 = (a_{12} - u_1)/(a_{11} - 1), x_2 \leq -1\}$. 若 (1) 存在一个

包含 E 在内部的闭轨, 则此闭轨会与 E 的稳定流相交而破坏解的唯一性, 故由推论及引理 1 可得 (1) 是完全稳定的.

类三: 取 D_3 来考虑, 则有

$$a_{11} - 1 - a_{12} < u_1 < a_{11} - 1 + a_{12}, \quad 1 - a_{22} - a_{21} < u_2 < a_{22} - 1 - a_{21}. \quad (10)$$

由 (7) 和 (10) 及类似的讨论, 当 $(u_1, u_2) \in G_{32}$ 时, CNN(1) 有五个平衡点: 两个稳定结点 F 和 K 分别位于域 $\{1, 1\}$ 和 $\{1, -1\}$ 中, 两个鞍点 B 和 E 分别位于域 $\{1, X\}$ 和 $\{X, -1\}$ 中, 一个不稳定结点 (或不稳定焦点) O 位于域 $\{X, X\}$ 中. 我们来考虑 $\{X, X\}$ 中的向量场的流向,

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{a_{21} + u_2}{a_{22} - 1}, & |x_1| < 1, & \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(x_1 - 1) > 0, \\ x_1 &= \frac{a_{12} - u_1}{a_{11} - 1}, & |x_2| < 1, & \frac{dx_1}{dt} = a_{12}(x_2 + 1) > 0. \end{aligned}$$

因此, 鞍点 B 和 E 的稳定流延伸到由直线 $x_1 = (a_{12} - u_1)/(a_{11} - 1)$, $x_2 = -(a_{21} + u_2)/(a_{22} - 1)$, $x_1 = -1$ 和 $x_2 = -1$ 所围成的区域内. 为了说明 B 和 E 的稳定流会和平衡点 O 相接, 我们只须适当选取两个正常数 c_1 和 c_2 使得由曲线 $V(x_1, x_2) = c_1$, $V(x_1, x_2) = c_2$ ($V(x_1, x_2)$ 是在类一中定义的函数) 和直线 $x_1 = (a_{12} - u_1)/(a_{11} - 1)$, $x_2 = -(a_{21} + u_2)/(a_{22} - 1)$, $x_1 = -1$ 及 $x_2 = -1$ 所围成的区域 Ω_2 包含平衡点 O , 而在 Ω_2 的边界上向量场由里指向外, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, B 和 E 的稳定流进入 Ω_2 中. 这样, 若 (1) 存在闭轨包含三个平衡点 B, E 和 O 中的一个在内, 则此闭轨会与 B 或 E 的稳定流相交而破坏解的唯一性. 由推论和引理 1 可知 (1) 是完全稳定的.

当 $(u_1, u_2) \in G_{31}$ 时, CNN(1) 有三个平衡点: 两个稳定结点 F 和 K , 一个鞍点 B ; 当 (u_1, u_2) 在 G_{31} 和 G_{32} 的边界上取值时, CNN(1) 有四个平衡点: 两个稳定结点 F 和 K , 一个鞍点 B 和一个位于域 $\{X, X\}$ 与 $\{X, -1\}$ 的边界上的平衡点 E (与 O 重合); 由引理 1 可知 (1) 也是完全稳定的.

类四: 取 D_{10} 来考虑, 则有

$$u_1 > a_{11} - 1 + a_{12}, \quad |u_2| < 1 - a_{22} - a_{21}. \quad (11)$$

由 (7) 和 (11) 可知 CNN(1) 只有一个平衡点: 域 $\{1, -1\}$ 中的稳定结点 K , 故 (1) 是完全稳定的.

类五: 取 D_{11} 来考虑, 则有

$$u_1 > a_{11} - 1 + a_{12}, \quad 1 - a_{22} - a_{21} < u_2 < a_{22} - 1 - a_{21}. \quad (12)$$

由 (7) 和 (12) 可知 CNN(1) 有三个平衡点: 两个稳定结点 F 和 K 分别在域 $\{1, 1\}$ 和 $\{1, -1\}$ 中, 一个鞍点 B 在域 $\{1, X\}$ 中, 类似地, (1) 也是完全稳定的.

类六: 取 D_{12} 来考虑, 则

$$u_1 > a_{11} - 1 + a_{12}, \quad u_2 > a_{22} - 1 - a_{21}. \quad (13)$$

由 (7) 和 (13) 可知 CNN(1) 只有一个平衡点: 域 $\{1, 1\}$ 中的稳定结点 F , 由推论, (1) 是完全稳定的.

类七: 取开线段 $\overline{ab} - D_1$ 与 D_2 的边界来考虑, 则

$$u_1 = a_{11} - 1 - a_{12}, \quad |u_2| < 1 - a_{22} - a_{21}. \quad (14)$$

由 (7) 和 (14) 可得, 当 (u_1, u_2) 在 G_{11} 与 G_{22} 的边界上取值时, CNN(1) 有四个平衡点: 一个稳定结点 K , 一个鞍点 E , 一个不稳定结点 (或不稳定焦点) O , 一个平衡点 D (与 G 重合) 位于 $\{X, 1\}$ 与 $\{-1, 1\}$ 的边界上; 当 (u_1, u_2) 在 G_{12} 与 G_{21} 的边界上取值时, CNN(1) 有两个平衡点: 一个稳定结点 K , 一个平衡点 D (与 G 重合); 当 (u_1, u_2) 是 \overline{ab} 与直线 l_9 的交点时, CNN(1) 有三个平衡点: 一个稳定结点 K , 两个平衡点 E (与 O 重合) 和 D (与 G 重合). 由类似的讨论, 可知 (1) 是完全稳定的.

类八: 取点 a 来考虑, 则

$$u_1 = a_{11} - 1 - a_{12}, \quad u_2 = 1 - a_{22} - a_{21}. \quad (15)$$

由 (7) 和 (15) 可知, 当点 a 位于直线 l_9 的下方时, CNN(1) 有五个平衡点: 一个稳定结点 K , 一个鞍点 E , 一个不稳定结点 (或不稳定焦点) O , 两个平衡点 B (与 F 重合) 和 D (与 G 重合); 当点 a 在直线 l_9 的上方时, CNN(1) 有三个平衡点: 一个稳定结点 K , 两个平衡点 B (与 F 重合) 和 D (与 G 重合); 当点 a 在直线 l_9 上时, CNN(1) 有四个平衡点: 一个稳定结点 K , 三个平衡点 B (与 F 重合), D (与 G 重合) 和 O (与 E 重合). 通过类似的关于向量场的分析, 可知 (1) 是完全稳定的. 证毕.

参 考 文 献

- 1 Chua L O, Yang L. Cellular Neural Networks: Theory. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1988, 35: 1257-1272
- 2 Chua L O, Yang L. Cellular Neural Networks: Applications. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1988, 35: 1273-1290
- 3 Civalleri P P, Gilli M. On the Dynamic Behaviour of Two-cell Cellular Neural Networks. *Int. J. Circuit Theory Appl.*, 1993, 21: 451-471
- 4 Civalleri P P, Gilli P. Global Dynamic Behaviour of a Three-cell Connected Component Detector CNN. *Int. J. Circuit Theory Appl.*, 1995, 23: 117-135
- 5 Thiran P, Setti G, Hasler M. An Approach to Information Propagation in 1-D Cellular Neural Networks—Part 1: Local Diffusion. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1998, 45: 777-789
- 6 Zou F, Nossek J A. Stability of Cellular Neural Networks with Opposite-sign Templates. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1991, 38: 675-677
- 7 Toy M P, Tavsanoğlu V. A New Parameter Range for the Stability of Opposite-sign Cellular Neural Networks. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1993, 40: 204-207
- 8 Savaci F A, Vandewalle J. On the Stability Analysis of Cellular Neural Networks. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1993, 40: 213-215
- 9 Takahashi N, Chua L O. On the Complete Stability of Nonsymmetric Cellular Neural Networks. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1998, 45: 754-758
- 10 Arik S, Tavsanoğlu V. Equilibrium Analysis of Non-symmetric CNNs. *Int. J. Circuit Theory Appl.*, 1996, 24: 269-274
- 11 Gilli M. Stability of Cellular Neural Networks and Delayed Cellular Neural Networks with Nonpositive Templates and Nonmonotonic Output Functions. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1994, 41: 518-528
- 12 Takahashi N, Chua L O. A New Sufficient Condition for Nonsymmetric CNN's to have a Stable Equilibrium Point. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1997, 44: 1092-1095
- 13 Lin S, Shih C. Complete Stability for Standard Cellular Neural Networks. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1999, 9: 909-918
- 14 Forti M, Tesi A. A New Method to Analyze Complete Stability of PWL Cellular Neural Networks. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2001, 11: 655-676
- 15 Li Xuemei, Huang Lihong, Wu Jianhong. External Inputs, Stable Equilibria and Complete Stability of CNNs. *Int. J. Circuit Theory Appl.*, 2003, 31(2): 133-138

-
- 16 Guckenheimer J, Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer-Verlag, 1983
- 17 Liao Xiaoxin. Mathematical Theory of Cellular Neural Networks (II). *Science in China (Series A)*, 1994, 24: 1037–1046
- 18 Berman A, Plemmons R J. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. New York: Academic, 1979

ON THE COMPLETE STABILITY OF CELLULAR NEURAL NETWORKS WITH EXTERNAL INPUTS AND BIAS

LI XUEMEI

(*Department of Mathematics, Hunan Normal University, Changsha 410081*)

HUANG LIHONG

(*College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha 410082*)

Abstract It is presented that if a two-cell CNN without external inputs and bias has a stable equilibrium point, then the corresponding CNN (with the same feedback template) for any external inputs and bias has a stable equilibrium point, and is completely stable.

Key words Cellular neural networks, complete stability, equilibrium points, saturation regions, external inputs