第 26 卷 第 3 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 26 No. 3
2003 年 7 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA July, 2003

多重网格插值算子的改进算法 *

黄朝晖 常谦顺
(中国科学院数学与系统科学研究院，北京 100080)

摘 要 本文在多重网格法 Gauss-Seidel 型插值算子的基础上，再用 Jacobi 松弛予以修正得到高精度算法，多重网格法的两层收敛性也获得了证明，数值例子进一步证实了新算法的效率.

关键词 多重网格法， Gauss-Seidel 解法， Jacobi 松弛，插值算子，渐近收敛率

1 引言

一般认为，多重网格法是求解偏微分方程的最快的数值方法，它通过粗细网格的迭代过程，使达到预定精度所需要的工作量降到最低数量级，即仅与未知数的个数 N 成正比 [1].

代数多重网格法是一种很稳健的求解方法，它最实用的好处是能应用到复杂几何情形和根本无几何或连续背景的问题. AMG 法针对尽可能大的一类问题一致地选择分量，在此基础上形成多重网格循环过程 [2].

2 AMG 分量

AMG 方法分两步进行，首先在准备阶段，构造五个分量： $\Omega^m, I^m_{m+1}, I^{m+1}_m, A^m$ 和 G^m, 然后按通常 MG 法的程序进行求解.

粗网格 Ω^m $(m=1,\cdots,n)$, 这里最细网格 -Ω^1 必须选得足够好能提供所需精度，而粗网格 Ω^{m+1} 选作 Ω^m 的子集，用 C^m 定义，余集 Ω^m-C^m 用 F^m 定义，当 $|a^m_{ij}|\geq\theta\cdot\max\limits_{k\neq i}|a^m_{ik}|$, $0<\theta\leq 1$ 时，称点 i 强连接到 j. 设 S^m_i 定义点 i 的所有强连接点之集，$C^m_i=C^m\cap S^m_i$.

插值算子 I^m_{m+1}, 当点 $i\in C^m$ 时，它从粗网格 Ω^{m+1} 相应点以权重 1 直接插值得出；当点 $i\in F^m$ 时，则由点集 C^m_i 插值得出.

在 [3–7] 中， Chang 给出下面的插值公式：

$$e^m_i=\sum_{j\in C^m_i}w^m_{ij}e^{m+1}_j,\qquad\forall\, i\in F^m, \tag{2.1}$$

本文 2001 年 3 月 26 日收到.
* 国家自然科学基金 (19931030 号) 资助项目.

其中

$$w_{ik}^m = \frac{-\overline{a}_{ik}^m}{\overline{a}_{ii}^m}, \qquad k \in C_i^m, \tag{2.2}$$

$$\overline{a}_{ii}^m = a_{ii}^m - \sum_{j\in D_i^{(1)}} |a_{ij}^m| - \sum_{j\in D_i^{(3)}} a_{ij}^m + 0.5 \sum_{j\in D_i^{(4)}} a_{ij}^m,$$

$$\overline{a}_{ik}^m = a_{ik}^m + \sum_{j\in D_i^{(2)}} a_{ij}^m g_{jk}^m + 2 \sum_{j\in D_i^{(3)}} a_{ij}^m g_{jk}^m + 0.5 \sum_{j\in D_i^{(4)}} a_{ij}^m g_{jk}^m,$$

这里

$$g_{jk}^m = \frac{|a_{jk}^m|}{\sum\limits_{k\in C_i^m} |a_{jk}^m|}, \qquad j \in D_i^m,\ k \in C_i^m,\ D_i^{(1)} = \{j : j \in D_i^w,\ l_{ij}^m = 0,\ a_{ij}^m \neq 0\},$$

$$D_i^{(3)} = \{j : j \in D_i^w,\ l_{ij}^m > 0,\ \xi_{ij}^m \geq 0.5,\ a_{ij}^m < 0\}$$
$$\cup \{j : j \in D_i^s,\ \eta_{ij}^m < 0.75,\ \xi_{ij}^m \geq 0.5,\ a_{ij}^m < 0\},$$
$$D_i^{(4)} = \{j : j \in D_i^s,\ \eta_{ij}^m > 2,\ \xi_{ij}^m \geq 0.5,\ a_{ij}^m < 0\},$$
$$D_i^{(2)} = \big\{j : j \in D_i^m \backslash \big(D_i^{(1)} \cup D_i^{(3)} \cup D_i^{(4)}\big)\big\};$$

其中

$$\xi_{ij}^m = -\frac{\sum\limits_{k\in C_i^m} a_{jk}^m}{\sum\limits_{k\in C_i^m} |a_{jk}^m|}, \quad \eta_{ij}^m = \frac{|a_{ji}^m| l_{ij}^m}{\sum\limits_{k\in C_i^m} |a_{jk}^m|}, \quad l_{ij}^m = |S_{ij}^m|, \quad S_{ij} = \{k : k \in C_i^m,\ a_{jk}^m \neq 0\},$$

$$D_i^m = N_i^m - C_i^m,\ D_i^s = D_i^m \cap S_i^m,\ D_i^w = D_i^m - D_i^s,\ N_i^m = \{j : j \in \Omega^m,\ j \neq i,\ a_{ij}^m \neq 0\}.$$

在粗网格 Ω^m 和插值算子 I_{m+1}^m 得出之后,限制算子 I_m^{m+1} 和粗网算子 A^{m+1} 能用 Galerkin 方式构造: $I_m^{m+1} = {I_{m+1}^m}^T,\ A^{m+1} = I_m^{m+1} A^m I_{m+1}^m$.

光滑算子 G^m 选作 Gauss-Seidel 迭代或阻尼 Jacobi 迭代.

3 AMG 方法

我们这里描述 AMG 方法, 关键在于插值算子的改进, 因为它在整个 AMG 法收敛性分析中起着非常重要的作用.

由于在 AMG 法中误差 e_i^m 产生于一个光滑过程之后, 即

$$a_{ii}^m e_i^m + \sum_{j\in N_i^m} a_{ij}^m e_j^m = d_i^m \approx 0, \qquad \forall\, i \in F^m. \tag{3.1}$$

(3.1) 能改写成:

$$a_{ii}^m e_i^m + \sum_{k\in C_i^m} a_{ik}^m e_k^m + \sum_{j\in D_i^m} a_{ij}^m e_j^m \approx 0, \qquad \forall\, i \in F^m. \tag{3.2}$$

对点 $i \in F^m$, 当我们用上式计算插值公式时, 对所有点 $j \in D_i^m$ 用下面两个式子来近似:

(1) 对点 $j \in D_i^w$, 我们用

$$e_j^m = \begin{cases} e_i^m, & \text{if } l_{ij}^m = 0,\ a_{ij}^m < 0, \\ -e_i^m, & \text{if } l_{ij}^m = 0,\ a_{ij}^m > 0, \\ 2\sum\limits_{k\in C_i^m} g_{jk}^m e_k^m - e_i^m, & \text{if } l_{ij}^m > 0,\ \xi_{ij}^m \geq 0.5,\ a_{ij}^m < 0, \\ \sum\limits_{k\in C_i^m} g_{jk}^m e_k^m, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.3}$$

(2) 对点 $j \in D_i^s$, 采用更准确的近似

$$e_j^m = \begin{cases} 2\sum\limits_{k\in C_i^m} g_{jk}^m e_k^m - e_i^m, & \text{if } \eta_{ij}^m < 0.75,\ \xi_{ij}^m \geq 0.5,\ a_{ij}^m < 0, \\ \dfrac{1}{2}\Big(\sum\limits_{k\in C_i^m} g_{jk}^m e_k^m + e_i^m\Big), & \text{if } \eta_{ij}^m > 2,\ \xi_{ij}^m \geq 0.5,\ a_{ij}^m < 0, \\ \sum\limits_{k\in C_i^m} g_{jk}^m e_k^m, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.4}$$

这种方法可被称为是 Jacobi 型解法，实际上，对点 $j \in F^m$, 只有当点 $j \in D_i^m$, 且 $j > i$ 时，才必须用上面近似，这是因为当点 $j \in D_i^m$ 且 $j < i$ 时，已通过以前的计算得出了其插值公式 $e_i^m = \sum\limits_{j\in C_i^m} \overline{w}_{ik}^m e_k^{m+1}$, 同时对点 $k \in C_j^m$, $j \in D_i^m$, $j < i$, 但 $k \overline{\in} C_i^m$, 我们近似认为： $e_k^{m+1} \approx e_i^{m+1}$, 于是我们得出：

$$e_i^m = -\frac{\sum\limits_{k\in C_i^m} a_{ik}^m e_k^{m+1} + \sum\limits_{j\in D_i^m,\, j<i}\ \sum\limits_{k\in C_j^m\cap C_i^m} a_{ij}^m w_{jk}^m e_k^{m+1} + \sum\limits_{j\in D_i^m,\, j\geq i}\ \sum\limits_{k\in C_i^m} a_{ij}^m \overline{w}_{jk}^m e_k^{m+1}}{a_{ii}^m + \sum\limits_{j\in D_i^m,\, j<i}\ \sum\limits_{k\in C_j^m\setminus C_i^m} a_{ij}^m w_{jk}^m}.$$

在上面 Gauss-Seidel 型插值 [8] 的基础上，为了进一步改进收敛，我们再执行一次如下 Jacobi 松弛步，于是有：

$$e_i^m = \sum_{k\in C_i^m} W_{ik}^m e_k^{m+1}, \qquad \forall\, i \in F^m, \tag{3.5}$$

其中

$$\begin{aligned} W_{ik}^m = -\frac{1}{a_{ii}^m}\Bigg[a_{ik}^m + \sum_{j\in F^m\cap N_i^m} & \frac{a_{ij}^m}{a_{ii}^m + \sum\limits_{j\in D_i^m,\, j<i}\ \sum\limits_{k\in C_j^m\setminus C_i^m} a_{ij}^m w_{jk}^m} \\ & \cdot \Big(a_{ik}^m + \sum_{j\in D_i^m, j<i} a_{ij}^m w_{jk}^m + \sum_{j\in D_i^m,\, j\geq i} a_{ij}^m \overline{w}_{jk}^m \Big) \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

4 收敛性证明

设 G^m, $A^{m+1} = I_m^{m+1} A^m I_{m+1}^m$ 和 $T^m = I^m - I_{m+1}^m (A^{m+1})^{-1} I_m^{m+1} A^m$ 分别定义光滑算子，粗网算子和 $(m, m+1)$ 两层网格校正算子，另外用 Euclidean 内积定义下面三种

不同的内积 $(u,v)_0=(Du,v)$, $(u,v)_1=(Au,v)$, $(u,v)_2=(D^{-1}Au,Av)$ 以及它们相应的范数 $\|\cdot\|_i$ $(i=0,1,2)$, $D=\mathrm{diag}\,(A)$.

定理 1 设 $A^m>0$, 且对任意正向量 $W^m=(w_i^m)$, 定义

$$r_-^m=\max_i\Big\{\frac{1}{w_i^m a_{ii}^m}\sum_{j<i}w_j^m|a_{ij}^m|\Big\},\qquad r_+^m=\max_i\Big\{\frac{1}{w_i^m a_{ii}^m}\sum_{j>i}w_j^m|a_{ij}^m|\Big\}.$$

那么 Gauss-Seidel 松弛满足

$$\|G^m e^m\|_1^2\le\|e^m\|_1^2-\alpha_m\|e^m\|_2^2,\qquad \alpha_m>0. \tag{4.1}$$

定理 2 设 $A^m>0$, 且 $\gamma_0^m\ge\rho\big((D^m)^{-1}A\big)^m$. 那么带参数 $0<\omega^m<2/\gamma_0^m$ 的阻尼 Jacobi 松弛满足 (4.1), 这里 $\alpha_m=\omega^m(2-\omega^m\gamma_0^m)$.

定理 3 设 $A^m>0$, 且 $G^m>0$ 满足 $\|G^m e^m\|_1^2\le\|e^m\|_1^2-\alpha_m\|e^m\|_2^2$, $\alpha_m>0$. 假设插值算子 I_{m+1}^m 有满秩，且对 $\forall\, e^m$, 有

$$\min\|e^m-I_{m+1}^m e^{m+1}\|_0^2\le\beta_m\|e^m\|_1^2, \tag{4.2}$$

其中 $\beta_m>0$, 且不依赖于 e^m, 那么 $\beta_m\ge\alpha_m$, 且 $(m,m+1)$ 两层收敛因子满足 $\|G^mT^m\|_1\le\sqrt{1-\alpha_m/\beta_m}$.

定理 4 设 $A^m>0$, 且有弱对角优势， $0\le\gamma^m<1$ 是固定常数，假设选择 C 点使得对 $\forall\, i\in F^m$, $j\in C_i^m$, 有 $\sum\limits_{j\in D_i^m}|a_{ij}^m|\le\gamma^m a_{ii}^m$, 那么插值公式 (2.1), (2.2) 满足 (4.2), 其中 $\beta_m=\frac{2}{1-\gamma^m}>\alpha_m$, α_m 如定理 1 或 2 中所给.

在上述定理的基础上，我们给出一个两层网格收敛的一般性定理：

定理 5 设 $A^m>0$, 且有弱对角优势， $0\le\gamma^m<1$ 是固定常数，假设选择 C 点使得对 $\forall\, i\in F^m$, 有 $\sum\limits_{j\in D_i^m}|a_{ij}^m|\le\gamma^m a_{ii}^m$, $a_{ii}^m-\sum\limits_{j\ne i,\,j\in F^m}|a_{ij}^m|\ge\delta^m a_{ii}^m(\delta^m>0)$. 记插值公式 (2.1), (2.2) 为

$$I_{m+1}^m=\begin{bmatrix}I_{FC}\\ I_{CC}\end{bmatrix},\qquad \overline{I}_{m+1}^m=\begin{bmatrix}\overline{I}_{FC}\\ I_{CC}\end{bmatrix}$$

为其 Jacobi 松弛修正算子，如果在一个 AMG 法中用 $\overline{I}_{m+1}^m$ 作插值算子， Gauss-Seidel 松弛或带参数 $0<\omega^m<2/\gamma_0^m\big(\gamma_0^m\ge\rho((D^m)^{-1}A^m)\big)$ 的阻尼 Jacobi 松弛作光滑算子，那么两层 AMG 算法是收敛的，即收敛因子满足 $\|G^mT^m\|_1\le\sqrt{1-\alpha_m/\overline{\beta}_m}$, 这里 $\overline{\beta}_m=\frac{4(\delta^m+4\gamma_0^m)}{\delta^m(1-\gamma^m)}>\alpha_m$, α_m 如定理 1 或 2 中所给.

证 根据定理 3, 我们只须证明 $\overline{I}_{m+1}^m$ 满足 (4.2) 即可.

首先引入如下记号 (忽略层数标记)：

$$A=\begin{bmatrix}A_{FF} & A_{FC}\\ A_{CF} & A_{CC}\end{bmatrix},\qquad e=\begin{bmatrix}e_F\\ e_C\end{bmatrix}.$$

接着定义 $(u_F,v_F)_{0,F}=(D_{FF}u_F,v_F)$, $(u_F,v_F)_{1,F}=(A_{FF}u_F,v_F)$, 以及它们相应的范数

$\|\cdot\|_{i,F}$ $(i=0,1)$, 其中 $D_{FF}=\mathrm{diag}\,(A_{FF})$. 于是有：

$$
\begin{aligned}
\min\|e^m-\overline{I}^m_{m+1}e^{m+1}\|_0^2 \leq & \frac{4}{1-\gamma^m}\|e^m\|_1^2+\frac{2}{\delta^m}\big\|(I_{FC}-\overline{I}_{FC})e_C\big\|^2_{1,F}\\
\leq & \frac{4}{1-\gamma^m}\|e^m\|_1^2+\frac{8}{\delta^m}\big\|(I_{FC}+A^{-1}_{FF}A_{FC})e_C\big\|^2_{1,F}\\
\leq & \frac{4}{1-\gamma^m}\|e^m\|_1^2+\frac{16\gamma_0^m}{\delta^m(1-\gamma^m)}\big\|(I_{FC}+A^{-1}_{FF}A_{FC})e_C\big\|^2_{0,F}\\
\leq & \frac{4(\delta^m+4\gamma_0^m)}{\delta^m(1-\gamma^m)}\|e^m\|_1^2.
\end{aligned}
$$

这样我们就完成了定理的证明.

从上面的证明过程很容易得出下面推论：

推论 在定理 5 的条件下，插值算子 (3.5), (3.6) 也满足 (4.2).

5 数值例子

本节，对不同的问题，我们给出上面改进算法的数值结果，并与标准 AMG 方法作比较以评价新算法的效绩，重点关注它们的收敛因子和所花费的 CPU 时间.

下面的记号为下面各表格所用：

ρ: 渐近收敛因子;

t_i: 一次 V-cycle 所花时间 (以秒计);

t_p: 准备阶段所花时间 (同上);

N: 达到收敛标准 $\|r^N\|/\|r^0\|\leq 10^{-6}$ 所需要的迭代次数，其中 r^N 为第 N 次迭代的残量;

EQ: 矩阵方程总数;

σ^A: 所有算子占用的与最细网格上的空间比;

σ^Ω: 所有网格的与最细网格的点数比.

方法 I: 用插值公式 (2.1), (2.2) 的 AMG 方法;

方法 Ⅱ: 用插值公式 (3.5), (3.6) 的 AMG 方法.

下面所用计算均取 [0,1] 中的随机数作为初始迭代 u^0, 用 Gauss-Seidel 松弛作光滑算子， $\theta=0.25$.

问题 1 单位正方形上带 Dirichlet 边界的 Poisson 问题.

首先，我们考虑用下面标准的五点微分形式

$$
L_h^{sd}=\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1\\ & -1 & \end{bmatrix}_h.
$$

接着采用九点微分形式

$$
L_h^{(9)}=\frac{1}{6h^2}\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1\\ -4 & 20 & -4\\ -1 & -4 & -1\end{bmatrix}_h.
$$

最后, 如果限制算子 I_m^{m+1} 和提升算子 I^m_{m+1} 分别选作全权算子和双线性插值算子, 从标准五点离散 A^m 算子，我们可得到粗网算子 $A^{m+1}=I^{m+1}A^mI^m_{m+1}$, 当 $m\to\infty$ 时,

A^m 收敛到下列九点微分形式

$$L_h^{(9-\text{limit})} = \frac{1}{3h^2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}_h,$$

它们的计算结果见表 1, 2 和 3.

表 1 L_h^{sd} 的数值结果

方法	EQ	ρ	N	t_p	t_I	σ^A	σ^Ω
Ⅰ	64×64	0.021	4	0.11	0.043	2.16	1.66
	128×128	0.022	4	0.50	0.138	2.18	1.67
Ⅱ	64×64	0.017	4	0.11	0.040	2.16	1.66
	128×128	0.017	4	0.61	0.138	2.18	1.67

表2 $L_h^{(9)}$ 的数值结果

方法	EQ	ρ	N	t_p	t_I	σ^A	σ^Ω
Ⅰ	64×64	0.076	6	0.16	0.037	1.32	1.33
	128×128	0.076	6	0.55	0.118	1.32	1.33
Ⅱ	64×64	0.061	5	0.16	0.044	1.32	1.33
	128×128	0.061	5	0.72	0.110	1.32	1.33

表3 $L_h^{(9-\text{limit})}$ 的数值结果

方法	EQ	ρ	N	t_p	t_I	σ^A	σ^Ω
Ⅰ	64×64	0.083	6	0.16	0.047	1.32	1.33
	128×128	0.081	6	0.55	0.118	1.32	1.33
Ⅱ	64×64	0.054	5	0.16	0.056	1.32	1.33
	128×128	0.054	5	0.71	0.100	1.32	1.33

问题 2 为了与 Poisson 问题作比较，我们考虑另一个五点微分形式

$$L_h^{hs} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & 1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & 1 & \end{bmatrix}_h,$$

它相应矩阵的代数光滑误差仅在 x 方向上是几何光滑的，而在 y 方向上则强烈振荡，其计算结果见表 4.

表4 L_h^{hs} 的数值结果

方法	EQ	ρ	N	t_p	t_I	σ^A	σ^Ω
Ⅰ	64×64	0.917	159	0.11	0.022	2.20	1.72
	128×128	0.938	216	0.55	0.090	2.22	1.72
Ⅱ	64×64	0.170	8	0.11	0.035	2.16	1.66
	128×128	0.213	9	0.60	0.116	2.18	1.67

问题 3 我们考虑单位正方形上带 Neumann 边界条件的微分形式

$$L_h^{e} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 4 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}_h,$$

它对应的系数矩阵类似 Poisson 方程的标准五点差分阵，只不过这里一些对角元要大些，且所有非对角元由负变正，与 Poisson 情形相比，其结果是几何光滑误差与非光滑误差的角色正好对换：代数光滑误差在几何上高度振荡；而代数不光滑误差却几何光滑，其计算结果见表 5.

表5　L_h^e 的数值结果

方法	EQ	ρ	N	t_p	t_I	σ^A	σ^Ω
Ⅰ	64×64	0.010	3	0.11	0.037	2.16	1.66
	128×128	0.010	3	0.55	0.167	2.18	1.67
Ⅱ	64×64	0.009	3	0.11	0.037	2.16	1.66
	128×128	0.008	3	0.66	0.127	2.18	1.67

问题 4　单位正方形上带 Dirichlet 边界条件的各向异性问题.

各向异性方程：$-\varepsilon u_{xx}-u_{yy}=f$ 在实际应用中起着非常重要的作用，因为许多物理问题本质上都是高度各向异性的. 当我们用标准五点差分算子离散时，便得到下面微分形式

$$L_h^{(5)}(\varepsilon)=\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & -1 & \\ -\varepsilon & 2(1+\varepsilon) & -\varepsilon \\ & -1 & \end{bmatrix}_h,$$

这里 $\varepsilon=0.01$, 它也可以通过在弹性网格 $h_x=h_y/\sqrt{\varepsilon}$ 上用标准五点差分算子离散 Poisson 算子得到.

对任何 $\varepsilon>0$, $L_h^{(5)}(\varepsilon)$ 是椭圆的，但关于 ε 不是一致椭圆的，而且它的 h- 椭圆性度量 $E_h\big(L_h^{(5)}(\varepsilon)\big)=\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\to0$ (当 $\varepsilon\to0$ 时). 然而 AMG 法执行基于算子的插值和粗化，能够调整粗化过程到强连接方向，即误差光滑的方向，因此获得了很好的结果，其计算结果见表 6.

表　6 $L_h^{(5)}(\varepsilon)$ 的数值结果

方法	EQ	ρ	N	t_p	t_I	σ^A	σ^Ω
Ⅰ	48×48	0.024	4	0.06	0.028	2.74	1.96
	64×64	0.025	4	0.11	0.040	2.80	1.96
Ⅱ	48×48	0.010	3	0.11	0.017	3.18	1.96
	64×64	0.010	3	0.11	0.037	3.24	1.96

问题 5　单位正方形上的重调和方程.

设 $\Delta^2u=0,\ \text{in }\Omega;\ u=0,\quad \text{on }\partial\Omega;\ \frac{\partial u}{\partial n}=0,\quad \text{on }\partial\Omega.$

用下面的十三点有限微分形式

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix}.$$

进行离散，得计算结果如表 7.

问题 6　单位立方体上带 Dirichlet 边界条件的 Poisson 问题.

对三维问题，我们采用七点差分近似

$$\frac{1}{h^2}\left(6u_{i,j,k}-u_{i+1,j,k}-u_{i-1,j,k}-u_{i,j+1,k}-u_{i,j-1,k}-u_{i,j,k+1}-u_{i,j,k-1}\right)=f_{i,j,k},$$

其计算结果见表 8.

表7 重调和方程的数值结果

方法	EQ	ρ	N	t_p	t_I	σ^A	σ^Ω
I	32×32	0.788	58	0.11	0.015	2.13	1.65
	48×48	0.816	68	0.22	0.028	2.17	1.65
Ⅱ	32×32	0.665	34	0.17	0.016	2.48	1.70
	48×48	0.700	39	0.29	0.032	2.54	1.72

表8 三维问题的数值结果

方法	EQ	ρ	N	t_p	t_I	σ^A	σ^Ω
I	$16\times 16\times 16$	0.016	4	0.28	0.055	2.63	1.60
	$24\times 24\times 24$	0.017	4	1.05	0.110	2.73	1.60
Ⅱ	$16\times 16\times 16$	0.010	3	0.29	0.073	2.66	1.66
	$24\times 24\times 24$	0.016	4	1.05	0.123	2.73	1.60

6 结论

本文采用 Gauss-Seidel 型插值，简化了多重网格插值算子的求解过程，节省了 CPU 时间，同时 Jacobi 松弛进一步加速收敛，理论分析和数值例子都说明该改进算法实用且高效.

参 考 文 献

1 Hackbusch W. Multigrid Methods and Application. Berlin: Springer-Verlag, 1985
2 McCormick S, ed. Multigrid Method, SIAM, 1987
3 Chang Q, Wong Y. Recent Developments in Algebraic Multigrids. Copper Mountain Conference on Iterative Methods, Colorado. 1992, 1
4 Chang Q, Wong Y, Fu H. Algebraic Multigrid and Its Application to the Euler Equations. Second International Conference on Computational Physics, Singapore, World Scientific, 1993
5 Chang Q, Wong Y, Fu H. On Algebraic Multigrid Method. *J. Comput. Phys.*, 1996, 125: 279–292
6 Chan H, Chang Q, Sun H. Multigrid Method for Ill-conditioned Symmetric Toeplitz Systems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1998, 19(2): 516–529
7 Chang Q, Ma S, Lei G. Algebraic Multigrid for Queuing Networks. *Intern. J. of Computer Math.*, 1999, 70: 539–552
8 Huang Z, Chang Q. Gauss-Seidel-Type Multigrids. *J. Comput. Math.*, 2003, 21(4): 421–434

AN IMPROVED ALGORITHM FOR THE MG INTERPOLATION OPERATOR

HUANG Zhaohui CHANG Qianshun

(*Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract In this paper, based on Gauss-Seidel-type interpolation operator, an improved MG algorithm with high accuracy is obtained by performing Jacobi relaxation. We prove the two-level convergence of new MG method, and numerical examples further demonstrate the efficiency of new algorithm.

Key words Multigrid methods, Gauss-Seidel solution, Jacobi relaxation, interpolation operator, asymptotic convergence rate