N 指标 d 维广义 Wiener 过程像集的一致维数 *

陈振龙
(西安电子科技大学应用数学系，西安 710071; 荆州师范学院数学系，荆州 434104)

徐赐文
(中央民族大学数学系，北京 100081)

摘　要　研究了 N 指标 d 维广义 Wiener 过程像集的一致维数和测度，得到了其像集的一致 Hausdorff 维数和一致 Packing 维数.

关键词　广义 Wiener 过程，像集， Hausdorff 维数， Packing 测度， Packing 维数

1　引言

一个 N 指标 d 维 Wiener 过程 $W=\{W(t)=(W_1(t),\cdots,W_d(t)),\ t\in R_+^N\}$ 是一个定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的具有零均值的 Gauss 场，并且 $\{W_i(t),\ t\in R_+^N,\ 1\le i\le d\}$ 是独立同分布的，其协方差函数满足： $\forall\, s=(s_1,\cdots,s_N),\ t=(t_1,\cdots,t_N)\in R_+^N$,

$$E\{W_i(t)W_i(s)\}=\prod_{j=1}^N(s_j\wedge t_j),\qquad 1\le i\le d. \tag{1.1}$$

用下式代替 (1.1) 式

$$E\{W_i(t)W_i(s)\}=\prod_{j=1}^N F_j(0,s_j\wedge t_j],\qquad 1\le i\le d, \tag{1.2}$$

其中 F_j $(1\le j\le N)$ 是 R_+^N 中相对于 Lebesgue 测度绝对连续的 Lebesgue-stieljes 测度，而其它条件不变，称这个过程为 N 指标 d 维广义 Wiener 过程，记之为 $\widetilde{W}=\{\widetilde{W}(t)=(\widetilde{W}_1(t),\cdots,\widetilde{W}_d(t)),\ t\in R_+^N\}$, 易知 $\widetilde{W}$ 具有独立增量性，但不具有平稳增量性.

张润楚 [1] 引进了 N 指标 d 维广义 Wiener 过程，并研究了它的马氏性. 庄兴无等 [2,3] 研究了它的样本轨道的某些分形性质. 关于随机场像集一致维数的问题，已有一些结果，如 Mountford[4] 研究了布朗单像集的一致 Hausdorff 维数的问题，乐成雄得到了

本文 2001 年 3 月 5 日收到. 2002 年 7 月 18 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (69972036 号) 和湖北省教育厅重点基金 (2003A005 号) 资助项目.

布朗单像集的一致 Packing 维数. 本文得到了 N 指标 d 维广义 Wiener 过程像集的一致 Hausdorff 维数及一致 Packing 维数, 所得结果包含并推广了布朗单的结果.

本文假设 F_j $(1 \le j \le N)$ 满足如下条件: 存在 $\delta > 0$ 和两常数 C_1, $C_2 > 0$, 当 $|t_k - s_k| < \delta$ $(1 \le k \le N)$ 时, 有

$$C_1|t_k - s_k|^{\beta} \le F_k(s_k, t_k] \le C_2|t_k - s_k|^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha \le 1, \ \ \beta \ge 1, \tag{1.3}$$

即使 $\alpha = \beta = 1$, $\widetilde{W}$ 比 W 还要广, 条件 (1.3) 的解释见 [3], 本文 $|\cdot|$ 既表绝对值, 也表示范数; $C_1, C_2, \cdots$ 均表示正常数, 每一行不尽相同, 但不影响结果.

2 一些引理

为了证明后面的定理, 这里先证明一些引理. 设 $\widetilde{B}(t)$ $(t \in R^1_+)$ 为 d 维广义 Wiener 过程, $\alpha d > 4$, 并定义随机变量 (p 为待定的正数):

$$A(\omega) \widehat{=} \int_0^1 \left(\max\left\{\|\widetilde{B}(t)\|, \, n^p 2^{-n\beta/2}\right\}\right)^{-(d-2)} \mathrm{d}F(0,t].$$

引理 1 $\forall s < t$, 存在常数 $C > 0$, 使

$$\begin{aligned} &E\left\{ \min\left(\|\widetilde{B}(t)\|^{-(d-2)}, \, n^{-p(d-2)} 2^{n\beta(d-2)/2}\right) / \widetilde{B}(u), \ 0 \le u \le s\right\} \\ \le &\min\left\{C\big(F(s,t]\big)^{-(d-2)/2}, \, n^{-p(d-2)} 2^{n\beta(d-2)/2}\right\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

证 因为

$$\begin{aligned} &E\left\{ \min\left(\|\widetilde{B}(t)\|^{-(d-2)}, \, n^{-p(d-2)} 2^{n\beta(d-2)/2}\right) / \widetilde{B}(s) = x\right\} \\ =&E\left\{ \min\left(\|\widetilde{B}(t) - \widetilde{B}(s) + x\|^{-(d-2)}, \, n^{-p(d-2)} 2^{n\beta(d-2)/2}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

令 $Y_i \triangleq \widetilde{B}_i(t) - \widetilde{B}_i(s) + x_i$ $(1 \le i \le d)$, 其中 $\widetilde{B}(t) = \big(\widetilde{B}_1(t), \cdots, \widetilde{B}_d(t)\big)$, $x = (x_1, \cdots, x_d) \in R^d$, 则 $EY_i = x_i$, $\operatorname{Var} Y_i = F(s,t]$; 又令 $Y \widehat{=} \sum\limits_{i=1}^{d} Y_i^2 / \operatorname{Var} Y_i = \sum\limits_{i=1}^{d} Y_i^2 / F(s,t]$, 则有 $Y \sim \chi^2(d,\delta) = e^{-\delta/2} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \big((\delta/2)^m/m!\big)\chi^2(2m+d)$, 其中 $\delta = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i^2/F(s,t]$, $\chi^2(d,\delta)$ 为自由度为 d 的非中心 χ^2- 分布, $\chi^2(2m+d)$ 是自由度为 $2m+d$ 的中心 χ^2 分布, 因此

$$\begin{aligned} E\left\{Y^{-(d-2)/2}\right\} =& e^{-\delta/2} 2^{-(d+2)/2} \sum_{m=0}^{\infty} \big((\delta/2)^m / m! \, \Gamma(m+d/2)\big)\Gamma(m+1) \\ \le& 2^{-(d+2)/2}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 Γ 表示嘎玛函数, 而

$$\begin{aligned} E\big(\|\widetilde{B}(t) - \widetilde{B}(s) + x\|^{-(d-2)}\big) =& \big(F(s,t]\big)^{-(d-2)/2} E\Big(\sum_{i=1}^{d} Y_i^2 / F(s,t]\Big)^{-(d-2)/2} \\ =& \big(F(s,t]\big)^{-(d-2)/2} E\left(Y^{-(d-2)/2}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

令 $C\widehat{=}2^{-(d+2)/2}$, 由 (2.2)–(2.4) 及 $\widetilde{B}(t)$ 的马氏性 [1] 得

$$
\begin{aligned}
&E\big\{\min\big(\|\widetilde{B}(t)\|^{-(d-2)},\, n^{-p(d-2)}2^{n\beta(d-2)/2}\big)/\widetilde{B}(u),\ 0\le u\le s\big\}\\
\le&E\big\{\min\big(\|\widetilde{B}(t)\|^{-(d-2)},\, n^{-p(d-2)}2^{n\beta(d-2)/2}\big)/\widetilde{B}(s)\big\}\\
\le&\min\big\{C\big(F(s,t]\big)^{-(d-2)/2},\, n^{-p(d-2)}2^{n\beta(d-2)/2}\big\}.
\end{aligned}
$$

引理 2 存在正常数 C_3, 使得

$$
E\left\{\exp\left(C_3An^{p(d-4)}2^{-n\beta(d-4)/2}\right)\right\}\le 2. \tag{2.5}
$$

证 因 $\widetilde{B}_i(t)\sim N\big(0,F(0,t]\big)$, 且 $\{\widetilde{B}_i(t),\ 1\le i\le d\}$ 独立, 所以 $X(t)\widehat{=}\sum\limits_{i=1}^{d}\frac{B_i^2(t)}{F(0,t]}\sim\chi^2(d)$, 因此 $E\big(\|\widetilde{B}\|^{-(d-2)}\big)=E\big\{\big(X(t)\cdot F(0,t]\big)^{-(d-2)/2}\big\}=C\big(F(0,t]\big)^{-(d-2)/2}$ (C 同引理 1).

由 Fubini 定理及上式得

$$
\begin{aligned}
E\big(A(\omega)\big)&=\int_0^1E\big\{\min\big(\|\widetilde{B}(t)\|^{-(d-2)},\,(n^p2^{-n\beta/2})^{-(d-2)}\big)\big\}\,\mathrm{d}F(0,t]\\
&\le\int_0^1\min\big(C\big(F(0,t]\big)^{-(d-2)/2},\,n^{-p(d-2)}2^{n\beta(d-2)/2}\big)\,\mathrm{d}F(0,t]\\
&=\int_0^{F(0,1]}\min\big(Cx^{-(d-2)/2},n^{-p(d-2)}2^{n\beta(d-2)/2}\big)\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{cn^{2p}2^{-n\beta}}\big(n^{-p(d-2)}2^{n\beta(d-2)/2}\big)\,\mathrm{d}x+\int_{cn^{2p}2^{-n\beta}}^{F(0,1]}x^{-(d-2)/2}\,\mathrm{d}x\\
&\le c_4n^{-p(d-4)}2^{n\beta(d-4)/2},
\end{aligned}
$$

对任意正整数 $r\ge1$, 有

$$
\begin{aligned}
E\big(A(\omega)\big)^r&=\int_0^1\cdots\int_0^1E\Big\{\prod_{i=1}^r\min\big(\|\widetilde{B}(t_i)\|^{-(d-2)},\,n^{-p(d-2)}2^{n\beta(d-2)}\big)\Big\}\prod_{i=1}^r\mathrm{d}F(0,t_i]\\
&\le r!\int\cdots\int_{0<t_1<\cdots<t_r\le1}E\left\{\prod_{i=1}^r\min\big(\|\widetilde{B}(t_i)\|^{-(d-2)},\,n^{-p(d-2)}2^{n\beta(d-2)/2}\big)\right\}\prod_{i=1}^r\mathrm{d}F(0,t_i].
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
&\xi_i\widehat{=}\min\big(\|\widetilde{B}(t_i)\|^{-(d-2)},\,n^{-p(d-2)}2^{n\beta(d-2)/2}\big), && 1\le i\le r,\\
&f_j\widehat{=}\min\big(\big(F(t_j,t_{j+1}]\big)^{-(d-2)/2},\,n^{-p(d-2)}2^{n\beta(d-2)/2}\big), && 1\le j\le r-1.
\end{aligned}
$$

由引理 1 可得

$$
E(\xi_1\xi_2\cdots\xi_i)=E\big(\xi_1\cdots\xi_{i-1}E(\xi_i/\xi_1\cdots\xi_{i-1})\big)\le f_{i-1}E(\xi_1\cdots\xi_{i-1}),\qquad 2\le i\le r.
$$

因此

$$
E(A^r)\le r!\int_0^1E\xi_1\,\mathrm{d}F(0,t_1]\times\int_{t_1}^1f_1\,\mathrm{d}F(0,t_1]\times\cdots\times\int_{t_{r-1}}^1f_{r-1}\,\mathrm{d}F(0,t_r]\le r!\big(E(A)\big)^r.
$$

取 $0 < C_3 \le 1/2C_4$, 有

$$E\Big\{\exp(C_3 A n^{p(d-4)} 2^{-n\beta(d-4)/2})\Big\} = \sum_{m=0}^{\infty} E\Big\{\frac{C_3^m A^m n^{mp(d-4)} 2^{-mn\beta(d-4)/2}}{m!}\Big\}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} C_3^m n^{mp(d-4)} 2^{-mn\beta(d-4)/2} E(A^m) \le \sum_{m=0}^{\infty} C_3^m C_4^m = 1/(1-C_3C_4) \le 2.$$

推论 1 对任意固定 $s\in[1,2]$, 定义随机变量:

$$A_{1,s} = \int_1^2 \big(\max\big\{\|\widetilde{W}(s,t)-\widetilde{W}(s,1)\|,\, n^p 2^{-n\beta/2}\big\}\big)^{-(d-2)} F_1(0,s]\,\mathrm{d}F_2(1,t],$$

则

$$E\big\{\exp(C_5 A_{1,s} n^{p(\alpha d-4)} 2^{-n\beta(\alpha d-4)/2})\big\} \le 2. \tag{2.6}$$

凡涉及到引理 3 和引理 4 中的概念可参见 [5].

引理 3 对任意固定的 $t\in[1,2]$, 令 $\widetilde{B}_i^*(s) \widehat{=} \widetilde{W}_i(s,t) - \widetilde{W}_i(s,1),\ i=1,2,\cdots,d,\ s\in[1,2]$, 则有

$$\big\langle \widetilde{B}_i^*(s), \widetilde{B}_j^*(s)\big\rangle = \begin{cases} F_1(0,s]\times F_2(1,t], & \text{当 } i=j;\ i,j=1,\cdots,d,\\ 0, & \text{当 } i\ne j;\ i,j=1,2,\cdots,d. \end{cases} \tag{2.7}$$

这里 $\langle X,Y\rangle$ 为连续局部鞅 X 和 Y 的交互变差过程.

证 对于 s$\in[1,2]$, 设 $\pi_s^n \widehat{=} \{s_j^n,\ j=0,1,\cdots,k_n\}$ 为区间 $[0,s]$ 的一个分割序列: $\pi_s^n: 0 = s_0^n < s_1^n < \cdots < s_{k_n}^n = s,\ n\in N$. 令

$$\delta(\pi_s^n) \widehat{=} \max_{1\le j\le k_n} (s_j^n - s_{j-1}^n),$$

$$\pi_s^n\big(\widetilde{B}_i^*(\cdot)\big) \widehat{=} \sum_{j=1}^{k_n} \big[\widetilde{B}_i^*(s_j^n) - \widetilde{B}_j^*(s_{j-1}^n)\big]^2, \qquad j=1,2,\cdots,d,$$

$$\Delta_i^n(j) \widehat{=} \big[\widetilde{B}_i^*(s_j^n) - \widetilde{B}_i^*(s_{j-1}^n)\big]^2 - F_1(s_{j-1}^n, s_j^n]\times F_2(1,t], \qquad i=1,\cdots,d;\quad j=0,\cdots,k_n.$$

经过简单的计算可得: $E\big[\Delta_i^n(j)\big]=0,\ E\big[(\Delta_i^n(j))^2\big] = 2\big(F_1(s_{j-1}^n,s_j^n]\times F_1(1,t]\big)^2$. 因此

$$E\Big[\big(\pi_s^n(\widetilde{B}_i^*(\cdot) - F_1(0,s]\times F_2(1,t]\big)^2\Big] = \sum_{j=1}^{k_n} E\big[(\Delta_i^n(j))^2\big] = 2\sum_{j=1}^{k_n}\big(F_1(s_{j-1}^n,s_j^n]\times F_2(1,t]\big)^2$$

$$\le 2C_2F_2^2(1,t]\big(\delta(\pi_s^n)\big)^\alpha \sum_{j=1}^{k_n} F_1(s_{j-1}^n,s_j^n] = 2C_2F_2^2(1,t]\times F_1(0,s]\big(\delta(\pi_s^n)\big)^\alpha \to 0, \qquad n\to\infty.$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\pi_s^n\big(\widetilde{B}_i^*(\cdot)\big) \overset{L^2}{=} F_1(0,s]\times F_2(1,t]$. 易证, 对固定的 $t, \widetilde{B}_i^*(s)$ 为初值为零的连续有界鞅 [2], 由 [5, 定理 12.1] 知:

$$\big\langle \widetilde{B}_i^*(\cdot), \widetilde{B}_i^*(\cdot)\big\rangle = \lim_{n\to\infty}\pi_s^n\big(\widetilde{B}_i^*(\cdot)\big) = F_1(0,s]\times F_2(1,t]. \tag{2.8}$$

再由 $\widetilde{B}_i^*$ 和 $\widetilde{B}_j^*$ 独立 $(i\ne j)$ 及 [5, 定理 12.6] 知:

$$\big\langle \widetilde{B}_i^*(\cdot), \widetilde{B}_j^*(\cdot)\big\rangle = 0, \qquad i\ne j;\quad i,j=1,2,\cdots,d. \tag{2.9}$$

由 (2.8) 和 (2.9) 即得 (2.7) 成立.

引理 4 令 $\mathcal{F}_s=\sigma\big\{\widetilde{W}(\upsilon,t)\big|t\in[1,2],\ \upsilon\le s\big\}$, 那么 $\{A_{1,s},\ \mathcal{F}_s,\ s\ge 1\}$ 是一个鞅.

证　考虑函数： $f(x)=\max\big\{\|x\|,\,2^{-n\beta/2}n^p\big\}^{-(d-2)},\ x=(x_1,\cdots,x_d)\in R^d$, 作函数 $f_k(x)$ 如下： $a\hat{=}n^p2^{-n\beta/2}$,

$$f_k(x)=\begin{cases}\|x\|^{-(d-2)}, & \text{当 } |x\|\ge a+1/k,\\ a^{-(d-2)}, & \text{当 } \|x\|\le a,\\ a^{-(d-2)}\exp\big\{-\big(\|x\|-a-1/k\big)^{-2}\exp\big\{-\big(a-\|x\|\big)^{-2}\big\}\big\}+\|x\|^{-(d-2)} & \\ \times\exp\big\{-\big(\|x\|-a\big)^{-2}\exp\big\{-\big(a+1/k-\|x\|\big)^{-2}\big\}\big\}, & \text{当 } a<\|x\|<a+1/k.\end{cases}$$

经过计算知 $\mathrm{f}_k(x)$ 是二阶连续可微的，且当 $\|x\|\ne a$ 时，有

$$\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_i}\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i},\qquad \frac{\partial^2 f_k(x)}{\partial x_i dx_j}\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i dx_j},\qquad i,j=1,2,\cdots,d$$

且

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\Big|_{\|x\|=a}=\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i^2}\Big|_{\|x\|=a}=0,\qquad i=1,2,\cdots,d. \tag{2.10}$$

由多微 Itô 公式 (见 [5, 定理 13.4]) 得：

$$\begin{aligned}f_k\big(\widetilde{B}^*(s)\big)=&f_k\big(\widetilde{B}^*(1)\big)+\sum_{i=1}^d\int_1^s\frac{\partial f_k\big(\widetilde{B}^*(\upsilon)\big)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\widetilde{B}_i^*(\upsilon)\\&+\frac12\sum_{i,j=1}^d\int_1^s\frac{\partial^2 f_k(\widetilde{B}^*(\upsilon))}{\partial x_i\partial x_j}\,\mathrm{d}\big\langle\widetilde{B}_i^*(\upsilon),\widetilde{B}_j^*(\upsilon)\big\rangle,\qquad \text{a.s}\end{aligned}$$

其中

$$\widetilde{B}^*(\cdot)=\big(\widetilde{B}_1^*(\cdot),\cdots,\widetilde{B}_d^*(\cdot)\big). \tag{2.11}$$

由引理 3 及 (2.10) 和 (2.11) 得

$$\begin{aligned}f_k\big(\widetilde{B}^*(s)\big)=&f_k\big(\widetilde{B}^*(1)\big)+\sum_{i=1}^d\int_1^s\frac{\partial f_k\big(\widetilde{B}^*(\upsilon)\big)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\widetilde{B}_i^*(\upsilon)\\&+\frac12\sum_{i=1}^d\int_1^s\frac{\partial^2 f_k\big(\widetilde{B}^*(\upsilon)\big)}{\partial x_i^2}\,\mathrm{d}\big\langle\widetilde{B}_i^*(\upsilon),\widetilde{B}_i^*(\upsilon)\big\rangle\\=&f_k\big(\widetilde{B}^*(1)\big)+\sum_{i=1}^d\int_1^s\frac{\partial f_k\big(\widetilde{B}^*(\upsilon)\big)}{\partial x_i}\,1_{\{\|\widetilde{B}^*(\upsilon)\|\ne a\}}\,\mathrm{d}\widetilde{B}^{\bullet}(\upsilon)\\&+\frac12\sum_{i=1}^d\int_1^s\frac{\partial^2 f_k\big(\widetilde{B}^*(\upsilon)\big)}{\partial x_i^2}\,1_{\{\|\widetilde{B}^*(\upsilon)\|\ne a\}}\,\mathrm{d}\big\langle\widetilde{B}_i^*(\upsilon),\widetilde{B}_i^*(\upsilon)\big\rangle.\end{aligned} \tag{2.12}$$

令 $\Re\hat{=}\big\{[0]\times F_0:\ F_0\in\mathcal{F}_0\big\}\cup\big\{(s,t]\times F:F\in\mathcal{F}s,\ s<t\big\}$, $\mathcal{P}\hat{=}\sigma(\Re)$, 则 $\mathcal{P}$ 为 $\widetilde{B}_i^*(\cdot)$ 产生的可料 σ- 代数 (见 [5]), 由 [5, 定理 6.13] 知： $\widetilde{B}_i^*$ 的 Doléans 测度存在且由 [5, 定义 6.7] 知：

$$\mu_{B_i^{*2}}\big((s_1,s_2]\times F\big)=E\big[1_F\big(\widetilde{B}_i^*(s_2)-\widetilde{B}_i^*(s_1)\big)^2\big]$$

$$
\begin{aligned}
&=E\big[1_F\big(\widetilde{B}_i^*(s_2)-\widetilde{B}_i^*(s_1)\big)^2\big]+2E\big[1_F\widetilde{B}_i^*(s_1)\big(\widetilde{B}_i^*(s_2)-\widetilde{B}_i^*(s_1)\big)\big]\\
&=P(F)F_1(s_1,s_2]\times F_2(1,t], \qquad (s_1,s_2]\times F\in\Re,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\forall\, A\in\Re, \qquad \mu_{\widetilde{B}_i^{*2}}(A)=F_2(1,t]P\times F_1(A), \tag{2.13}
$$

由开拓的唯一性可知， $\forall\, A\in\mathcal{P}$, (2.13) 也成立，所以

$$
\begin{aligned}
&\int_{(1,s]\times\Omega}\Big[\frac{\partial f(\widetilde{B}^*(\upsilon))}{\partial x_i}1_{\{\|\widetilde{B}^*(\upsilon)\|\neq a\}}\Big]^2\,\mathrm{d}\mu_{\widetilde{B}_i^{*2}}\\
\leq&(d-2)^2F_2(1,t]\int_{(1,s]\times\Omega}\widetilde{B}_i^{*2}(\upsilon)\Big[\sum_{i=1}^d\widetilde{B}_i^{*2}(\upsilon)\Big]^{-d}\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}F_1(0,\upsilon]\\
\leq&\frac{(d-2)^2}{d}F_2(1,t]\int_{(1,s]}E\Big[\sum_{i=1}^d\widetilde{B}_i^{*2}(\upsilon)\Big]^{-(d-1)}\,\mathrm{d}F(0,\upsilon]\\
\leq&C_6F_2(1,t]\int_{(1,s]}\big(F_1(0,\upsilon]\times F_2(1,t]\big)^{-(d-1)/2}\,\mathrm{d}F_1(0,\upsilon]\\
\leq&C_6\big(F_2(1,t]\big)^{-(d-3)/2}\int_{F_{1(0,1]}}^{F_{1(0,s]}}x^{-(d-1)/2}\,\mathrm{d}x<+\infty.
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

由

$$
\Big|\Big(\frac{\partial f_k(\widetilde{B}^*(\upsilon))}{\partial x_i}-\frac{\partial f(\widetilde{B}^*(\upsilon))}{\partial x_i}\Big)1_{\{\|\widetilde{B}^*(\upsilon)\|\neq a\}}\Big|^2\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0
$$

及控制收敛定理得

$$
\int_{(1,s]\times\Omega}\Big|\Big(\frac{\partial f_k(\widetilde{B}^*(\upsilon))}{\partial x_i}-\frac{\partial f(\widetilde{B}^*(\upsilon))}{\partial x_i}\Big)1_{\{\|\widetilde{B}^*(\upsilon)\|\neq a\}}\Big|^2\,\mathrm{d}\mu_{\widetilde{B}_i^{*2}}\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0,
$$

所以

$$
\int_{(1,s]\times\Omega}\Big[\frac{\partial f_k(\widetilde{B}(\upsilon))}{\partial x_i}\Big]^2\,\mathrm{d}\mu_{\widetilde{B}_i^{*2}}<+\infty.
$$

由此，由 [5, 推论 1] 知：

$$
\int_1^s\frac{\partial f_k(\widetilde{B}^*(\upsilon))}{\partial x_i}1_{\{\|\widetilde{B}^*(\upsilon)\|\neq a\}}\,\mathrm{d}\widetilde{B}_i^*(\upsilon)\xrightarrow[k\to\infty]{L^2}\int_1^s\frac{\partial f(\widetilde{B}^*(\upsilon))}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\widetilde{B}_i^*(\upsilon).
$$

由 (2.12) 式两边取极限 $k\to\infty$ 得：

$$
\begin{aligned}
f\big(\widetilde{B}^*(s)\big)=&f\big(\widetilde{B}^*(1)\big)+\sum_{i=1}^d\int_1^s\frac{\partial f(\widetilde{B}^*(\upsilon))}{\partial x_i}1_{\{\|\widetilde{B}^*(\upsilon)\|\neq a\}}\,\mathrm{d}\widetilde{B}_i^*(\upsilon)\\
&+\frac12\sum_{i=1}^d\int_1^s\frac{\partial^2 f(\widetilde{B}^*(\upsilon))}{\partial x_i}1_{\{\|\widetilde{B}^*(\upsilon)\|\neq a\}}\,\mathrm{d}\big\langle\widetilde{B}_i^*(\upsilon),\widetilde{B}_i^*(\upsilon)\big\rangle.
\end{aligned}
$$

通过计算可得：

$$\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}1_{\{\|x\|\neq a\}}=0,\qquad \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 f(\widetilde{B}^*(v))}{\partial x_i^2}1_{\{\|\widetilde{B}^*(v)\|\neq a\}}=0.$$

由引理 3 知 $\langle\widetilde{B}_i^*,\widetilde{B}_i^*\rangle$ 与 i 无关，所以

$$f\big(\widetilde{B}^*(s)\big)=f\big(\widetilde{B}^*(1)\big)+\sum_{i=1}^{d}\int_1^s\frac{\partial f(\widetilde{B}^*(v))}{\partial x_i}1_{\{\|\widetilde{B}^*(v)\|\neq a\}}\,\mathrm{d}\widetilde{B}_i^*(v).$$

由 (2.14) 及 [5, 定理 10.9] 知 $\int_1^s\frac{\partial f(\widetilde{B}^*(v))}{\partial x_i}1_{\{\|\widetilde{B}^*(v)\|\neq a\}}\,\mathrm{d}\widetilde{B}_i^*(v)$ 是一个 L^2 鞅, 从而 $f\big(\widetilde{B}^*(s)\big)$ 是一个 L^2- 鞅，由 Fubini 定理知 $\{A_{1,s},\mathcal{F}_s,\ s\geq 1\}$ 是一个鞅.

引理 5　$\forall q>0$, 存在常数 $C_7>0$, 使

$$P\Big\{\sup_{s\geq 1}A_{1,s}\geq 2^{n\beta(d-4)/2}n^{q-p(d-4)}\Big\}\leq e^{-c_7n^q}.\tag{2.15}$$

证　由引理 4 知 $\exp\big\{C_6A_{1,s}n^{p(d-4)}2^{-n\beta(d-4)/2}\big\}$ 是下鞅，由下鞅不等式得：

$$\begin{aligned}2\geq&E\Big\{\exp\{C_6A_{1,s}n^{p(d-4)}2^{-n\beta(d-4)/2}\Big\}\\ \geq&P\Big\{\sup_{s\geq 1}\exp\{C_6A_{1,s}n^{p(d-4)}2^{-n\beta(d-4)/2}\}>\exp(C_6n^q)\Big\}\exp\{C_6n^q\},\end{aligned}$$

故引理 5 得证.

引理 6　设

$$A_{r,s}=\int_1^2\big(\max\big\{\big\|\widetilde{W}(s,t)-\widetilde{W}(s,r)\big\|,\ n^p2^{-n\beta/2}\big\}\big)^{-(d-2)}F_1(0,s]\,\mathrm{d}F_2(1,t].$$

对 $\forall s,r\geq 1$, $q>0$, 存在 $C_8>0$, 亦有

$$P\Big\{\sup_{s\geq 1}A_{r,s}\geq 2^{n\beta(d-4)/2}n^{q-p(d-4)}\Big\}\leq 2e^{-C_8n^q}.\tag{2.16}$$

引理 7[6]　设 $\widetilde{W}$ 是满足 (1.3) 的 N 指标 d 维广义 Wiener 过程，则对 $E_a=[a,a+1]^N$, $a>0$, 存在一个 a.s. 有限的正随机变量 B_a, 使得 $\forall s,t\in E_a$, 当 $\|s-t\|<h$ 充分小时，有

$$\big\|\widetilde{W}(t)-\widetilde{W}(s)\big\|\leq B_a\sqrt{h^\alpha\log h^{-1}}.\tag{2.17}$$

引理 8　若 $p>\frac{1}{2}$, $\forall q>0$, 则有

$$P\Big\{\sup_{(s,r)\in[1,2]^2}A_{r,s}\geq 2^{n\beta(d-4)}n^{q-p(d-4)}2^{(d-2)}\Big\}\leq 2\cdot 2^{\beta n/\alpha}e^{-C_8n^q}.\tag{2.18}$$

证　由引理 7 知，对充分大的 n, 当 $|r-v|<2^{-n\beta/\alpha}$ 时，有 $\big\|\widetilde{W}(s,v)-\widetilde{W}(s,r)\big\|\leq C_9\sqrt{n}\,2^{-n\beta/2}$.

若 $p>\frac{1}{2}$, 那么, 对充分大的 n 有

$$\begin{aligned}&\max\left\{\|\widetilde{W}(s,t)-\widetilde{W}(s,r)\|,\,n^p2^{-n\beta/2}\right\}\\ \geq&\max\left\{\|\widetilde{W}(s,t)-\widetilde{W}(s,\upsilon)\|-\|\widetilde{W}(s,\upsilon)-\widetilde{W}(s,r)\|,\,n^p2^{-n\beta/2}\right\}\\ \geq&\max\left\{\|\widetilde{W}(s,t)-\widetilde{W}(s,\upsilon)\|-C_9\sqrt{n}\,2^{-n\beta/2},\,n^p2^{-n\beta/2}\right\}\\ \geq&\frac{1}{2}\max\left\{\|\widetilde{W}(s,t)-\widetilde{W}(s,\upsilon)\|,\,n^p2^{-n\beta/2}\right\}.\end{aligned}$$

因此, 对每个 $\upsilon=1+i2^{-\beta n/\alpha}$, $|\upsilon-r|<2^{-n\beta/\alpha}$, 若 $A_{\upsilon,s}\leq 2^{n\beta(d-4)/2}n^{q-p(d-4)}$, 那么 $A_{r,s}\leq 2^{(d-2)}2^{n\beta(d-4)/2}n^{q-p(d-4)}$. 故

$$\begin{aligned}&P\Big\{\sup_{(s,r)\in[1,2]^2}A_{r,s}\geq 2^{d-2}2^{n\beta(d-4)/2}n^{q-p(d-4)}\Big\}\\ \leq&\sum_{i=0}^{2^{n\beta/\alpha}-1}P\Big\{\sup_{s\in[1,2],\,r\in[1+i2^{-n\beta/\alpha},\,1+(i+1)2^{-n\beta/\alpha}]}A_{r,s}\geq 2^{d-2}2^{n\beta(d-4)/2}n^{q-p(d-4)}\Big\}\\ \leq&\sum_{i=0}^{2^{n\beta/\alpha}-1}P\Big\{\sup_{s\in[1,2],\,r=1+i2^{-n\beta/\alpha}}A_{r,s}\geq 2^{d-2}2^{n\beta(d-4)/2}n^{q-p(d-4)}\Big\}\leq 2\cdot 2^{\beta n/\alpha}\cdot e^{-C_8n^q}.\end{aligned}$$

由引理 8 及 Borel-Cantelli 引理, 当 $q>1$ 时有:

推论 2 对充分大的 n, 若 $p>\frac{1}{2}$, $q>1$ 时有:

$$\sup_{(r,s)\in[1,2]^2}A_{r,s}\leq n^{q-p(d-4)}2^{n\beta(d-4)/2}2^{(d-2)}\qquad\text{a.s.}\tag{2.19}$$

设 $\Phi=\left\{\varphi:\varphi:(0,\delta)\to(0,\infty),\ \varphi\text{ 单调上升, 右连续且 }\varphi(0+)=0;\ \exists C,\ \forall s\in\left(0,\frac{1}{2}\delta\right),\right.$ 使 $\left.\frac{\varphi(2s)}{\varphi(s)}\leq C\right\}$.

引理 9[8] $\psi,h\in\Phi$, $\varphi(s)=\psi(s)h(s)$ 且 $\int_{0+}\frac{h(s)}{s}\,\mathrm{d}s<+\infty$, 则 $\forall E\in\mathcal{B}(R_+^N)$,

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}M_i(\varepsilon,E)\,\psi(2\varepsilon)<+\infty\Rightarrow\varphi-p(E)=0,\qquad i=1,2,$$

其中 $M_1(\varepsilon,E)$ 表示复盖 E 的半径为 ε 的开球的最小个数; $M_2(\varepsilon,E)$ 表示球心在 E 中, 半径为 ε 的互不相交的开球的最大个数.

注 将开球换成二进制立方体, 引理 9 亦成立.

3 像集的一致 Hausdorff 维数

定理 1 设 $\widetilde{W}$ 是满足 (1.3) 的 N 指标 d 维广义 Wiener 过程, 若 $\alpha d>2N$, 则对 $[0,1]^d$ 中任一 $[n\beta/2]$ 阶二进制立方体 I, $\widetilde{W}^{-1}(I)\cap[1,2]^N$ 至多被 $[1,2]^N$ 中 $C_Nn^{\ell N}$ 个与 $\widetilde{W}^{-1}(I)\cap[1,2]^N$ 相交的 n 阶二进制立方体所复盖. 其中 ℓ 是只与 α 和 β 有关的有限正常数.

证 先证 $N=2$ 时定理结论成立. 对任意固定的中心在 $x,[\beta n/2]$ 阶二进立方体 $I\in[0,1]^d$, 考虑过程

$$g_{x,s}\widehat{=}\int_1^2\left(\max\left\{\|\widetilde{W}(s,r)-x\|,\,n^p2^{-n\beta/2}\right\}\right)^{-(d-2)}F_1(0,s]\,\mathrm{d}F_2(1,r],\qquad s\geq 1.$$

若 $\widetilde{W}(s,t)\in I$, 则由引理 7, 对充分小的 h 有：

$$\big\|\widetilde{W}(s,t+h)-x\big\|<C_{10}\sqrt{h^{\alpha}\log h^{-1}}+2^{-n\beta/2}. \tag{3.1}$$

令

$$E_s\widehat{=}\big\{t\in[1,2]:\widetilde{W}(s,t)\in I\big\},\quad E_s=\big(E_s\cap[1-h,2-h]\big)\cup\big(E_s\cap[2-h,2]\big)\widehat{=}E_s^0\cup E_s^2.$$

所以

$$\begin{aligned} g_{x,s}=&\int_{1-h}^{2-h}\big(\max\big\{\big\|\widetilde{W}(s,y+h)-x\big\|,\,n^p2^{-n\beta/2}\big\}\big)^{-(d-2)}F_1(0,s]\,\mathrm{d}F_2(1,y+h]\\ \geq&\int_{E_s^o}\big(\max\big\{\big\|\widetilde{W}(s,y+h)-x\big\|,\,n^p2^{-n\beta/2}\big\}\big)^{-(d-2)}F_1(0,s]\,\mathrm{d}F_2(1-h,y]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

由 [5] 或 [6] 知 $\widetilde{W}(s,t)$ 是 a.s. 连续的, 因此在闭集 E_s^0 中存在一点 y_0, 使 $\|\widetilde{W}(s,y_0+h)-x\|$ 达到最大，即有：

$$\begin{aligned} g_{x,s}\geq&\int_{E_s^0}\big(\max\big\{\big\|\widetilde{W}(s,y_0+h)-x\big\|,\,n^p2^{-n\beta/2}\big\}\big)^{-(d-2)}F_1(0,s]\,\mathrm{d}F_2(1-h,y]\\ \geq&F_1(0,s]F_2(E_s^0)\big(\max\big\{\big\|\widetilde{W}(s,y_0+h)-x\big\|,\,n^p2^{-n\beta/2}\big\}\big)^{-(d-2)}\\ \geq&F_1(0,1]F_2(E_s^0)\big(C_{10}\sqrt{h^{\alpha}\log h^{-1}}\big)^{-(d-2)}\qquad(\text{取}\quad h=2^{-n\beta/\alpha}n^{2p/\alpha})\\ \geq&C_{11}F_2(E_s^0)2^{n\beta(d-2)/2}n^{-(2p+1)(d-2)/2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

若 $\exists a>0,\ \forall n\geq 1$ 有 $\lambda(E_s^0)\geq a$, 则存在仅与 a 有关的常数 $b>0$, 使得 $\forall n\geq 1$ 都有 $F_2(E_s^0)\geq b$, 从而 (3.3) 式变为：

$$\begin{aligned} g_{x,s}\geq&C_{11}b2^{n\beta(d-4)/2}n^{-(d-2)/2}(2^{n\beta}n^{-p(d-2)})\\ \geq&C_{12}2^{n\beta(d-4)/2}n^{-(d-2)/2}\qquad(\text{当 } n \text{ 充分大}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

若 n 充分大时， $\lambda(E_s^0)$ 充分小，则由 (1.3) 式将 (3.3) 式变成：

$$g_{x,s}\geq C_{13}\big(\lambda(E_s^o)\big)^{\beta}2^{n\beta(d-2)/2}n^{-(2p+1)(d-2)/2}. \tag{3.5}$$

若 $\lambda(E_s^o)\leq n^{p(d-2)/\beta}2^{-n}$, 又由 $\lambda(E_s^2)\leq\lambda\big([2-h,2]\big)=n^{2p/\alpha}2^{-n\beta/\alpha}\leq n^{2p/\alpha}2^{-n}$, 则定理 1 成立．若 $\lambda(E_s^o)>n^{p(d-2)/\beta}2^{-n}$, 则

$$g_{x,s}\geq C_{13}(n^{p(d-2)}2^{-n\beta})\cdot 2^{n\beta(d-2)/2}n^{-(2p+1)(d-2)/2}\geq C_{13}2^{n\beta(d-4)/2}n^{-(d-2)/2}. \tag{3.6}$$

综上所述，对 $\widetilde{W}(s,t)\in I,\ \exists C_{14}>0$, 使

$$g_{x,s}\geq C_{14}2^{n\beta(d-4)/2}\cdot n^{-(d-2)/2}. \tag{3.7}$$

$\forall\varepsilon>0$, 现取 $p=3/2+\varepsilon,\ q=(2+\varepsilon)(d-9/2)$, 由 $\alpha d>4$ 知 $d>4$, 即 $d-9/2\geq 1/2$, 所以 $q\geq 1+\varepsilon/2$, 故由推论 2 知： a.s. $\forall(r,s)\in[1,2]^2$ 有

$$A_{r,s}\leq 2^{(d-2)}2^{n\beta(d-4)/2}n^{-(d-2)/2-\varepsilon/2}. \tag{3.8}$$

又若 $\widetilde{W}(s,t)\in I$, 与引理 8 证法类似可证:

$$\max\left\{\|\widetilde{W}(s,r)-x\|,\, n^p2^{-n\beta/2}\right\}\ge\frac{1}{2}\max\left\{\|\widetilde{W}(s,r)-\widetilde{W}(s,t)\|,\, n^p2^{-n\beta/2}\right\}.$$

因此，对充分大的 n, 由 (3.8) 式得

$$g_{x,s}\le 2^{(d-2)}A_{r,s}\le 2^{2(d-2)}2^{n\beta(d-4)/2}n^{-(d-2)/2-\varepsilon/2}. \tag{3.9}$$

对于固定的 t, $\{\widetilde{W}(s,t),\ s\ge 1\}$ 是鞅，类似引理 4 可证 $\{g_{x,s},\ s\ge 1\}$ 是鞅，所以若 $\widetilde{W}(s,t)\in I$, 由 (3.9) 式得:

$$E\big[g_{x,s+n^{5+2\varepsilon}2^{-n}}/\mathcal{F}_s\big]=g_{x,s}\le 2^{2(d-2)}2^{n\beta(d-4)/2}\,n^{-(d-2)/2-\varepsilon/2}. \tag{3.10}$$

令

$$\begin{aligned}
&T_1\hat{=}\inf\left\{s\ge 1:\widetilde{W}(s,t)\in I,\ \text{对某}\ t\in[1,2]\right\},\\
&T_{i+1}\hat{=}\inf\left\{s\ge T_i+n^{5+2\varepsilon}2^{-n}:\widetilde{W}(s,t)\in I,\ \text{对某}\ t\in[1,2]\right\},\qquad i=1,2,\cdots.
\end{aligned}$$

由 [7, 定理 13.2](Doob 停时定理) 知:

$$\begin{aligned}
g_{x,T_1}&=E(g_{x,T_{i+1}}/\mathcal{F}_{T_i})\ge E\big(g_{x,T_{i+1}}1_{\{T_{i+1}<2\}}\big|\mathcal{F}_{T_i}\big)\\
&\ge E\big(1_{\{T_{i+1}<2\}}\big|\mathcal{F}_{T_i}\big)\,C_{14}n^{-(d-2)/2}2^{n\beta(d-4)/2}\\
&=P\{T_{i+1}<2/\mathcal{F}_{T_i}\}\,C_{14}n^{-(d-2)/2}2^{n\beta(d-4)/2}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

由 (3.10) 和 (3.11) 得 $P\{T_{i+1}<2/\mathcal{F}_{T_i}\}\le C_{15}n^{-\varepsilon/2}$, 从而

$$P\{T_{n+1}<2\}\le C_{15}n^{-\varepsilon n/2}. \tag{3.12}$$

设 $N_I=\#\{D: D$ 为 [1,2] 中 n 阶二进立方体，使得存在 $(s,t)\in D\times[1,2]$, 有 $\widetilde{W}(s,t)\in I\}$, 则

$$P\{N_I\ge n^{6+2\varepsilon}\}\le P\{T_{n+1}<2\}\le C_{15}n^{-\varepsilon n/2}.$$

由 Bore1-Cantelli 引理知，对充分大的 n, 有 $N_I\le n^{6+2\varepsilon}$, a.s. 同理可得 $N_I'\le n^{6+2\varepsilon}$, a.s., 其中 $N_I'\hat{=}\#\{D:D$ 为 [1,2] 中 n 阶二进立方体, 使得存在 $(s,t)\in[1,2]\times D$ 有 $\widetilde{W}(s,t)\in I\}$.

综上所述，定理 1 对 $N=2$ 成立.

下证 $N>2$ 时定理 1 也成立. 对 $N>2$, 设

$$\begin{aligned}
A(\omega)\hat{=}&\int_{[1,2]^{N-1}}\big(\max\left\{\|\widetilde{W}(t_1,\cdots t_{N-1})-\widetilde{W}(\langle 1\rangle)\|,\, n^p2^{-n\beta/2}\right\}\big)^{-(d-2)}\,\mathrm{d}F_1(1,t_1]\\
&\times\cdots\times F_{N-1}(1,t_{N-1}],
\end{aligned}$$

其中 $\langle 1\rangle=(1,\cdots,1)\in R_+^{N-1}$, 通过计算可得: $\forall\, r\in N,\ EA^r\le r!\big(M(n^{-p}2^{n\beta/2})^{d-4}\big)^r$, 其中

$$\begin{aligned}
M\hat{=}&\sup_{t\in[1,2]^{N-1}}(n^p2^{-n\beta/2})^{d-4}E\int_{[1,2]^{N-1}}\big(\max\left\{\|\widetilde{W}(t)-\widetilde{W}(s)\|,\, n^p2^{-n\beta/2}\right\}\big)^{-(d-2)}\,\mathrm{d}F_1(1,s_1]\\
&\times\cdots\times F_{N-1}(1,s_{N-1}].
\end{aligned}$$

为计算 M, 只须证明 $\forall s,t\in[1,2]^{N-1}$, $s<t$ 有

$$\begin{aligned}&E\Big\{\min\big\{\big\|\widetilde{W}(t)-\widetilde{W}\big(\langle 1\rangle\big)\big\|^{-(d-2)},\ n^{-p(d-2)}2^{n\beta(d-2)/2}\big\}\big|\widetilde{W}(u),\ 0\le u\le s\Big\}\\ \le&\min\big\{C\big(F(s,t]\big)^{-(d-2)/2},\ n^{-p(d-2)}2^{n\beta(d-2)/2}\big\},\end{aligned}$$

其中 $F(s,t)\widehat{=}F_1(s_1,t_1]\times\cdots\times F_{N-1}(s_{N-1},t_{N-1}]$, 由此可计算得到 M 是与 n 无关的常数，余下的证明与上面方法同理可证．故定理 1 得证.

推论 3　设 $\widetilde{W}$ 是满足 (1.3) 的 N 指标 d 维广义 Wiener 过程．若 $\alpha d>2N$, 则对 R^d 中任一 $[n\beta/2]$ 阶二进制立方体 I, 集合 $\widetilde{W}^{-1}(I)$ 至多被 R_+^N 中 $C_N n^{\ell N}$ 个与 $\widetilde{W}^{-1}(I)$ 相交的 n 阶二进制立方体所复盖，其中 C_N 为正常数， l 是一只与 α 和 β 有关的有限正常数.

定理 2　设 $\widetilde{W}$ 是满足 (1.3) 的 N 指标 d 维广义 Wiener 过程，若 $\alpha d>2N$, 则 a.s. $\forall E\in\mathcal{B}(R_+^N)$ 有

$$\frac{2}{\beta}\dim E\le\dim\big(\widetilde{W}(E)\big)\le\frac{2}{\alpha}\dim E,\tag{3.13}$$

其中 $\widetilde{W}(E)\widehat{=}\big\{y\in R^d:\widetilde{W}^{-1}(y)\in E\big\}$ 表示 $\widetilde{W}$ 在 E 上的像集，$\dim E$ 表示 E 的 Hausdorff 维数.

证　由引理 7 可得， $\widetilde{W}$ 在 E 上满足小于 $\alpha/2$ 阶一致 Hölder 条件，从而 (3.13) 右边不等式成立.

下证 (3.13) 式的下界成立．记 $\eta=\frac{2}{\beta}\dim E$, 若存在 $\varepsilon>0$, 使得 $\dim\widetilde{W}(E)<\eta-\varepsilon$, 则对任意 $\delta>0$, 存在充分大的 n 及一列直径不超过 2^{-n} 的球 $\{I_{n,i}^d\}_{i=1}^{\infty}$, 使得

$$\widetilde{W}(E)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_{n,i}^d\qquad\text{且}\qquad\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam}I_{n,i}^d)^{\eta-\varepsilon}<\delta.$$

定义 n_i 满足：　$2^{-(n_i+1)\beta/2}\le\operatorname{diam}(I_{n,i}^d)<2^{-n_i\beta/2}$.

令 $\widetilde{I}_{n,i}^d$ 是与 $I_{n,i}^d$ 同中心，直径为 $2^{-[n_i\beta/2]}$ 的球，则 $\{\widetilde{I}_{n,i}^d\}$ 亦是 $\widetilde{W}(E)$ 的一个复盖．由推论 3 得

$$\begin{aligned}E&\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{W}^{-1}(\widetilde{I}_{n,i}^d)\\ &\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\{R_+^N\text{ 中至多 }C_Nn_i^{lN}\text{ 个与 }\widetilde{W}^{-1}(\widetilde{I}_{n,i}^d)\text{ 相交的 }n_i\text{ 阶二进制立方体之并}\}\\ &\widehat{=}\bigcup_{i,j}\mathcal{Q}_{ij},\qquad j=1,\cdots,C_Nn_i^{lN}.\end{aligned}$$

记上式右端的小立方体为 $\mathcal{Q}_{ij}$, 则当 n 充分大时

$$\begin{aligned}\sum_i\sum_j(\operatorname{diam}\mathcal{Q}_{ij})^{\frac{\beta}{2}(\eta-\frac{\varepsilon}{2})}\le&C_{16}\sum_iC_Nn_i^{lN}(2^{-n_i})^{\frac{\beta}{2}(\eta-\frac{\varepsilon}{2})}\le C_{17}\sum_in_i^{lN}2^{-\frac{\beta\varepsilon n_i}{4}}(2^{-n_i})^{\frac{\beta}{2}(\eta-\varepsilon)}\\ \le&C_{18}\sum_i2^{-(n_i+1)\beta(\eta-\varepsilon)/2}\le C_{19}\sum_i(\operatorname{diam}I_{n,i}^d)^{\eta-\varepsilon}<C_{19}\delta.\end{aligned}$$

因此

$$\dim E\le\frac{\beta}{2}\Big(\eta-\frac{\varepsilon}{2}\Big)<\frac{\beta}{2}\eta=\dim E,$$

矛盾，故对任意 $\varepsilon>0$, 有 $\dim\widetilde{W}(E)\geq\eta-\varepsilon$. 由 ε 的任意性知 (3.13) 式左边不等式成立.

4 像集的一致 Packing 测度和维数

定理 3 设 $\widetilde{W}$ 是满足 (1.3) 的 N 指标 d 维广义 Wiener 过程,

$$g(s)=s^{2/\alpha}\Big(\frac{4}{\alpha^2C_{20}^2}\log s^{-1}\Big)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

$\forall\psi\in\Phi$. 若 $\varphi(2s)=\psi\big(g(s)\big)$, 则 a.s. $\forall E\in\mathcal{B}(R_+^N)$ 有

$$\varphi-p\big(\widetilde{W}(E)\big)\leq\psi-p(E), \tag{4.1}$$

其中 $C_{20}\geq B_a$, B_a 同引理 7 的记号.

证 因为

$$\varphi-p(E)=\inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\varphi-P(E_i): E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\ E_i\in\mathcal{B}(R_+^N)\Big\},$$

所以，为证 (4.1) 式只须证对任一 Borel 集 $E\in\mathcal{B}(R_+^N)$, 下式成立即可:

$$\varphi-P\big(\widetilde{W}(E)\big)\leq\psi-P(E). \tag{4.2}$$

若 $\varphi-P\big(\widetilde{W}(E)\big)=0$, (4.2) 式显然成立. 下设 $0<\varphi-P\big(\widetilde{W}(E)\big)<+\infty$.

由 $\varphi-P$ 的定义知: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta_0>0$, 使 $\forall\eta: 0<\eta<\eta_0$, 有 $\widetilde{W}(E)$ 的一个填充 $\{B(x_i,\eta_i):\eta_i\leq\eta,\ x_i=\widetilde{W}(t_i),\ t_i\in E\}$ 使得

$$(1-\varepsilon)\varphi-P\big(\widetilde{W}(E)\big)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(2\eta_i). \tag{4.3}$$

取 $\{B(t_i,r_i)\}^{\infty}$ 为以 t_i 为中心, $r_i=g(\eta_i)$ 为半径的一列开球, 则 $\{B(t_i,\frac{1}{2}r_i)\}_1^{\infty}$ 两两不交. 否则, 若 $B\big(t_i,\frac{1}{2}r_i\big)\cap B\big(t_j,\frac{1}{2}r_j\big)\neq\phi(i\neq j)$, 不妨设 $r_j<r_i$, 则有 $\|t_i-t_j\|<r_i=g(\eta_i)$; 由引理 7 知:

$$\begin{aligned}&\big|\widetilde{W}(t_i)-\widetilde{W}(t_j)\big|\leq C_{20}\|t_i-t_j\|^{\alpha/2}\big(\log\|t_i-t_j\|^{-1}\big)^{1/2}\\ \leq&C_{20}\big(g(\eta_i)\big)^{\alpha/2}\big(\log(g(\eta_i))^{-1}\big)^{1/2}=\eta_i+0\,(\eta_i),\end{aligned}$$

这与 $\{B(x_i,\eta_i)\}_1^{\infty}$ 是 $\widetilde{W}(E)$ 的一个填充矛盾，故 $\{B\big(t_i,\frac{1}{2}r_i\big)\}$ 为 E 的一个填充，所以

$$\sum_{i=1}^{\infty}\psi(r_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\psi\big(g(\eta_i)\big)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(2\eta_i)\geq(1-\varepsilon)\varphi-P\big(\widetilde{W}(E)\big).$$

从而 $\psi-P(E)\geq(1-\varepsilon)\varphi-P\big(\widetilde{W}(E)\big)$, 由 ε 的任意性知 (4.2) 式成立.

若 $\varphi-P\big(\widetilde{W}(E)\big)=+\infty$, 同理可证 $\psi-P(E)=+\infty$, 故定理 3 得证.

定理 4 设 $\widetilde{W}$ 是满足 (1.3) 的 N 指标 d 维广义 Wiener 过程，$h,\psi\in\Phi$，且 $\int_{0+}\frac{h(s)}{s}\,\mathrm{d}s<+\infty$，若 $2N<\alpha d$，$\varphi(s)=\psi(s^{\beta/2})h(s)(\log s^{-1})^{-lN}$，则 a.s. $\forall E\in\mathcal{B}(R_+^N)$，$\varphi-p(E)>0\Rightarrow\psi-p\big(\widetilde{W}(E)\big)=+\infty$.

证　设 $R_+^N=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$，其中 $I_i(1\le i<+\infty)$ 是 R_+^N 中互不相交的单位立方体，若 $\forall E\in\mathcal{B}(R_+^N)$，$E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(E\cap I_i)$，有 $\varphi-p(E)>0$，则一定存在 I_{i_0} 使 $\varphi-p(E\cap I_{i_0})>0$，因此，只须证明 $\forall E\in\mathcal{B}([1,2]^N)$ 定理结论成立即可. 反证之，若 $\psi-p\big(\widetilde{W}(E)\big)<M_1<+\infty$，由 $\psi-p(E)=\inf\big\{\lim\limits_{n\to\infty}\psi-P(E_n):E_n\uparrow E\big\}$，那么，存在 $\{A_m,\ m\in N\}$，$A_m\uparrow\widetilde{W}(E)$，使 $\psi-P(A_m)\uparrow M_2\widehat{=}\lim\limits_{m\to\infty}\psi-P(A_m)<M_1+1$，而 $\widetilde{W}^{-1}(A_m)\uparrow E_0\supset E$，所以

$$\lim_{m\to\infty}\varphi-P\big(\widetilde{W}^{-1}(A_m)\big)=\varphi-P(E_0)\ge\varphi-p(E_0)\ge\varphi-p(E)>0.$$

故当 m 充分大时，同时成立：

$$\varphi-P\big(\widetilde{W}^{-1}(A_m)\big)>0\qquad\text{和}\qquad\psi-P(A_m)<M_1+1<+\infty.\tag{4.4}$$

下面说明 (4.4) 两式矛盾，$\forall A\subset R^d$，若 $\psi-P(A)<M_1+1<+\infty$. 由定义可得：当 n 充分大时，$M_2(2^{-n},A)\psi(\sqrt{d}2^{-n})<M_3<+\infty$，其中 $M_2(2^{-n},A)$ 表示中心在 A 中，边长为 2^{-n} 的互不相交的二进立方体的最大个数.

设 $E=\widetilde{W}^{-1}(A)\cap[1,2]^N$，由定理 1 知：$M_2(2^{-n},E)\le C_Nn^{\ell N}M_2(2^{-n\beta/2},A)$，所以

$$C_N^{-1}n^{-lN}M_2(2^{-n},E)\psi\big(\sqrt{d}\,2^{-n\beta/2}\big)\le M_2(2^{-n\beta/2},A)\psi(\sqrt{d}\,2^{-n\beta/2})<M_3,$$

即

$$M_2(2^{-n},E)\psi\big(\sqrt{d}\,(2^{-n})^{\frac{\beta}{2}}\big)(\log 2^n)^{-lN}<C_N'<+\infty.$$

由引理 9 知：$\psi-P(E)=0$，与假设矛盾，定理 4 得证.

定理 5 设 $\widetilde{W}$ 是满足 (1.3) 的 N 指标 d 维广义 Wiener 过程，若 $\alpha d>2N$，则 a.s. $\forall E\in\mathcal{B}(R_+^N)$ 有

$$\frac{2}{\beta}\mathrm{Dim}\,E\le\mathrm{Dim}\,\big(\widetilde{W}(E)\big)\le\frac{2}{\alpha}\mathrm{Dim}\,E.\tag{4.5}$$

其中 Dim E 表示 E 的 Packing 维数.

证　由引理 7 知，$\widetilde{W}$ 在 E 上满足小于 $\alpha/2$ 阶一致 Hölder 条件，从而 (4.5) 式右边不等式成立.

下证 (4.5) 式左边不等式成立. 设 $\eta=\mathrm{Dim}\,E$，在定理 4 中，令 $h(s)=s^{\delta}$ $(\delta>0)$，$\psi(s)=s^{2\eta/\beta-\varepsilon}$，其中 $\frac{\beta}{2}\varepsilon-\delta>0$，则 $\varphi(s)=s^{\eta-(\beta\varepsilon/2-\delta)}(\log s^{-1})^{-lN}$. 因为 $\beta\varepsilon/2-\delta>0$，所以 $\varphi-p(E)>0$. 由定理 4 知 $\psi-p\big(\widetilde{W}(E)\big)=+\infty$，所以 $\mathrm{Dim}\,\big(\widetilde{W}(E)\big)\ge2\eta/\beta-\varepsilon$. 由 ε 任意性知 $\mathrm{Dim}\,\big(\widetilde{W}(E)\big)\ge2\eta/\beta=\frac{2}{\beta}\,\mathrm{Dim}\,E$，从而 (4.5) 式左边不等式成立.

参　考　文　献

1 张润楚. 广义 Brownian Sheet 和广义 OUP_2 过程的马氏性. 中国科学, 1985, 25(5): 389–398
(Zhang Runchu. The Markov Properties of Generalized Brownian Sheet and Generalized OUP_2 Process. *Science in China* (Series A), 1985, 25(5): 389–398)

2 庄兴无, 李新春. 关于广义 Brownian Sheet 样本函数连续性. 应用概率统计, 1987, 16(3): 270–273

(Zhuang Xingwu, Li Xingchun. On the Continuity of Sample Functions of Generalized Brownian Sheet. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 1987, 16(3): 270–273)

3 林火南，庄兴无． N 指标 d 维广义 Wiener 过程的常返性． 数学年刊, 1992, 6(3): 344–352
(Lin Huonan, Zhuang Xingwu. The Recurrence Properties for Points of N-Parameter General Wiener Process Valued in R^d. *Chinese Annals of Mathematics*, 1992, 6(3): 344–352)

4 Mountford T S. Uniform Dimension Results for Brownian Sheet. *Ann. Probab.*, 1989, 4: 1454–1462

5 黄志远．随机分析学基础．武汉：武汉大学出版社， 1988
(Huang Zhiyun. Foundations of Stochastic Analysis. Wuhan: Wuhan University Publisher, 1988)

6 徐赐文． N 指标 d 维广义 Wiener 过程象集代数和性质． 数学杂志, 1997, 17(2): 199–206
(Xu Ciwen. The Properties of Algebraic Sum of Image Set of N-Parameter d-Dimension Generalized Wiener Process. *J. of Math.*, 1997, 17(2): 199–206)

7 胡迪鹤．随机过程概论．武汉：武汉大学出版社， 1986
(Hu Dihe. Essentials of stochastic Process. Wuhan: Wuhan University Publisher, 1986)

8 Peckins E A, Taylor S J. Uniform Measure Results for the Image of Subsets under Brownian Motion. *Probab. Th. Rel. Fields*, 1987, 76: 257–289

UNIFORM DIMENSION OF IMAGE SET OF N-PARAMETER d-DIMENSION GENERALIZED WIENER PROCESS

CHEN Zhenlong

(*Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an* 430072) &

Department of Mathematics, Jingzhou Normal University, Jingzhou 434104)

XU Ciwen

(*Department of Mathematics, the Central National University, Beijing* 100081)

Abstract In this article, we studied uniform dimension and uniform measure of image set of N-parameter d-dimension generalized Wiener process. We obtained uniform Hausdorff dimension and uniform Packing dimension of its image set.

Key words Generalized Wiener process, image set, Hausdorff dimension, Packing measure, Packing dimension