第 26 卷 第 2 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 26 No. 2
2003 年 4 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Apr., 2003

超线性时滞微分方程解的振动性 *

唐先华
(中南大学应用数学系，长沙 410083)
庾建设
(湖南大学数学与计量经济学院，长沙 410082)

摘 要 研究一阶超线性时滞微分方程 $x'(t)+p(t)[x(t-\tau)]^\alpha=0$ $(\alpha>1)$ 解的振动性及非振动性，获得了保证其所有解振动的 "almost sharp" 准则，并应用所得结果于混合型时滞微分方程

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)[x(t-\tau_i)]^{\alpha_i}=0,$$

得到一族振动准则.

关键词 超线性，时滞微分方程，振动

1 引言

考虑一阶时滞微分方程

$$x'(t)+p(t)\big[x(t-\tau)\big]^\alpha=0, \qquad t\ge t_0, \tag{1.1}$$

其中 $p\in C\big([t_0,\infty),[0,\infty)\big)$，$\tau\in(0,\infty)$，$\alpha\in(0,\infty)$ 是分子与分母均为奇数的有理数.

当 $0<\alpha<1$ 时，方程 (1.1) 称为次线性方程，现已知道 [1]，其所有解振动的充分必要条件是

$$\int_{t_0}^{\infty}p(s)\,\mathrm{d}s=\infty. \tag{1.2}$$

(1.2) 表明：对次线性方程 (1.1) 而言，时滞 τ 的大小不影响其解的振动性.

当 $\alpha=1$ 时，方程 (1.1) 退化为线性时滞微分方程

$$x'(t)+p(t)x(t-\tau)=0, \qquad t\ge t_0, \tag{1.3}$$

但其解的振动性反而变得复杂起来. 在近二十年中，人们充分地讨论了方程 (1.3) 解的振动性，并获得了许多有趣的振动及非振动准则 [2−6]，一个经典的 "sharp" 准则是 [3]:

本文 2001 年 1 月 13 日收到. 2001 年 9 月 17 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 95 重点资助项目 (19831030 号).

如果

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s > \frac{1}{e}, \tag{1.4}$$

则方程 (1.3) 所有解振动；如果

$$\int_{t-\tau}^{t} p(s)ds \le \frac{1}{e}, \tag{1.5}$$

最终成立，则方程 (1.3) 存在最终正解．但遗憾的是，至今未能得到保证方程 (1.3) 所有解振动显式的充分必要条件．

当 $\alpha > 1$ 时，方程 (1.1) 称为超线性时滞微分方程，由于一些常规的方法，诸如处理线性及次线性方程的方法，均无法应用于超线性方程 (1.1) $(\alpha > 1)$，迄今还没有保证超线性方程所有解振动或存在非振动解的任何条件，并且，[7] 还举例说明，即使

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s = \infty \tag{1.6}$$

也不足以保证超线性方程所有解振动．因此获得超线性方程 (1.1) $(\alpha > 1)$ 的振动或非振动准则是一件非常有意义的工作．

本文第 3 节首先建立超线性方程 (1.1) $(\alpha > 1)$ 振动及非振动 "almost sharp" 准则，然后将其推广到下述多时滞超线性 $(\alpha_i > 1,\ i = 1, 2, \cdots, n)$ 微分方程

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\big[x(t-\tau_i)\big]^{\alpha_i} = 0, \qquad t \ge t_0, \tag{1.7}$$

其中 $p_i \in C\big([t_0,\infty),[0,\infty)\big)$，$\tau_i \in (0,\infty)$，$\alpha_i \in (0,\infty)$ 是分子与分母均为奇数的有理数，$i = 1, 2, \cdots, n$. 第 4 节主要利用第 3 节的结论及一些已知的事实讨论混合型 ($\alpha_i - 1$ 不同号，$i = 1, 2, \cdots, n$) 方程的振动性．

全文约定：一个函数不等式，如若未指明成立范围，均指对充分大的 t 成立．

2 比较定理

后面的讨论需要如下定理，其证明类似于 [4] 中定理 5.1.1, 这里略去其详细证明．

定理 2.1 记 $\tau^* = \max\{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n\}$. 假设对充分大的 t, 有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(s) \not\equiv 0, \qquad s \in [t, t+\tau^*], \tag{2.1}$$

则方程 (1.7) 存在最终正解当且仅当下述相应不等式

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\big[x(t-\tau_i)\big]^{\alpha_i} \le 0, \qquad t \ge t_0 \tag{2.2}$$

存在最终正解．

与方程 (1.7) 一起，同时考虑下述方程

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\big[x(t-\tau_i)\big]^{\alpha_i} = 0, \qquad t \ge t_0, \tag{2.3}$$

其中 τ_i,α_i 同方程 (1.7), $q_i\in\big([t_0,\infty],[0,\infty]\big)$, $i=1,2,\cdots,n$.

利用定理 2.1, 容易推出下述比较定理

定理 2.2 假设 (2.1) 成立，且

$$p_i(t)\le q_i(t),\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{2.4}$$

如果方程 (1.7) 所有解振动，则方程 (2.3) 所有解亦振动.

3 超线性方程

定理 3.1 假设 $\alpha>1$, 则下述结论成立:

(i) 如果存在 $\lambda>\tau^{-1}\ln\alpha$ 使得

$$\liminf_{t\to\infty}\big[p(t)\exp\left(-e^{\lambda t}\right)\big]>0, \tag{3.1}$$

则方程 (1.1) 所有解振动;

(ii) 如果对充分大 t, $p(s)\not\equiv 0$, $s\in[t,t+\tau]$, 且存在 $\mu<\tau^{-1}\ln\alpha$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\big[p(t)\exp(-e^{\mu t})\big]<\infty, \tag{3.2}$$

则方程 (1.1) 存在最终正解.

证 (i) 取 λ_1,λ_2 使得

$$\tau^{-1}\ln\alpha<\lambda_2<\lambda_1<\lambda, \tag{3.3}$$

$$p(t)\ge\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\exp\Big(\frac{\alpha-1}{2}\,e^{\lambda_1 t}\Big),\qquad t\ \text{充分大}. \tag{3.4}$$

记 $q(t)=\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\exp\big(\frac{\alpha-1}{2}e^{\lambda_1 t}\big)$. 由定理 2.2, 只需证明方程

$$x'(t)+q(t)\big[x(t-\tau)\big]^\alpha=0,\qquad t\ge t_0 \tag{3.5}$$

所有解振动.

不失一般性，反设方程 (3.5) 存在最终正解 $x(t)$, 则存在 $T_1>t_0$ 使得

$$1>x(t-\tau)>0,\qquad x'(t)<0,\qquad t\ge T_1.$$

令 $y(t)=-\ln x(t)$, $t\ge T_1-\tau$, 则 $y(t)>0, t\ge T_1-\tau$, 且

$$y'(t)=q(t)e^{y(t)-\alpha y(t-\tau)},\qquad t\ge T_1. \tag{3.6}$$

记 $l=\alpha e^{-\lambda_2\tau}$, 则 $0<l<1$. 下面分 3 种情况讨论:

情况 1 $y(t)\le\alpha e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau}y(t-\tau)$ 最终成立. 取 $T_2>T_1$ 使得

$$y(t)\le\alpha e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau}y(t-\tau),\qquad t\ge T_2,$$

于是

$$\frac{y(t)}{e^{\lambda_1 t}}\le\frac{\alpha e^{\lambda_1 t-\lambda_2\tau}}{e^{\lambda_1 t}}\,\frac{y(t-\tau)}{e^{\lambda_1(t-\tau)}}=l\,\frac{y(t-\tau)}{e^{\lambda_1(t-\tau)}},\qquad t\ge T_2.$$

令 $z(t)=y(t)e^{-\lambda_1 t}$, $t\ge T_1$, 则

$$z(t)\le lz(t-\tau),\qquad t\ge T_2. \tag{3.7}$$

下证

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0. \tag{3.8}$$

事实上，如若 $\limsup_{t\to\infty} z(t) = \infty$, 则存在单调递增趋于 ∞ 的序列 $\{s_n\}$ 使得 $z(s_n) = \max\big\{z(t):\ T_2 \le t \le s_n\big\}$. 于是由 (3.7) 得

$$z(s_n) \le lz(s_n - \tau) \le lz(s_n), \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

矛盾; 如若 $0 < \limsup_{t\to\infty} z(t) = \beta < \infty$, 则存在单调递增趋于无穷序列 $\{\overline{s}_n\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} z(\overline{s}_n) = \beta$. 于是再由 (3.7) 得

$$z(\overline{s}_n) \le lz(\overline{s}_n - \tau) \le l\Big[\beta + \frac{(1-l)\beta}{2l}\Big], \qquad n \text{ 充分大},$$

在上式中令 $n \to \infty$, 则得 $(1-l)\beta \le \frac{1}{2}(1-l)\beta$, 矛盾.

上述矛盾表明 (3.8) 成立. 由 (3.8) 知存在 $T_3 > T_2$ 使得

$$y(t) \le \frac{1}{2} e^{\lambda_1 t}, \qquad t \ge T_3 - \tau. \tag{3.9}$$

将此式代入 (3.6) 得

$$y'(t) \ge q(t) e^{-(\alpha-1)y(t-\tau)} \ge q(t)\exp\Big(-\frac{\alpha-1}{2}e^{\lambda_1 t}\Big) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad t \ge T_3,$$

进而有

$$y(t) \ge y(t_3) + e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_1 t_3}, \qquad t \ge T_3,$$

此与 (3.9) 矛盾.

情况 2 $y(t) - \alpha e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau} y(t-\tau)$ 振动. 此时存在单调递增趋于无穷的序列 $\{t_n\}$ 使得

$$y(t_n) = \alpha e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau} y(t_n - \tau), \qquad n = 1, 2, \cdots, \tag{3.10}$$

$$y(t) > \alpha e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau} y(t - \tau), \qquad t \in (t_{2n-1}, t_{2n}). \tag{3.11}$$

令

$$u(t) = y(t) - \alpha e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau} y(t-\tau),$$

则 $u(t)$ 振动，且存在单调递增趋于无穷的序列 $\{\xi_n\}$ 使得 $u(\xi_n) = \max\{u(t):\ t_{2n-1} \le t \le t_{2n}\}$, $u'(\xi_n) = 0$, $n = 1, 2, \cdots$. 注意到

$$u'(\xi_n) = y'(\xi_n) - \alpha e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau} y'(\xi_n - \tau)$$

和

$$y'(t) = q(t)\exp\big[u(t) + \alpha(e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau} - 1)y(t-\tau)\big], \qquad t \ge T_1, \tag{3.12}$$

容易推得

$$\begin{aligned}
&q(\xi_n)\exp\big[u(\xi_n) + \alpha(e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau} - 1)y(\xi_n-\tau)\big]\\
=&\alpha e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau} q(\xi_n - \tau)\exp\big[u(\xi_n-\tau) + \alpha(e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau} - 1)y(\xi_n - 2\tau)\big]\\
<&\lambda_1 e^{\lambda_1\xi_n}\exp\Big[\frac{1}{2}(\alpha-1)e^{\lambda_1(\xi_n-\tau)}\Big]\exp\big[u(\xi_n-\tau) + \alpha(e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau} - 1)y(\xi_n - 2\tau)\big].
\end{aligned}$$

由此,

$$\begin{aligned}&u(\xi_n)+\alpha(e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau}-1)y(\xi_n-\tau)\\ <&u(\xi_n-\tau)+\alpha(e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau}-1)y(\xi_n-2\tau)\\ &-\frac{1}{2}(\alpha-1)(1-e^{-\lambda_1\tau})e^{\lambda_1\xi_n},\qquad n=1,2,3,\cdots.\end{aligned}\tag{3.13}$$

如果 $\limsup\limits_{t\to\infty}u(t)=\limsup\limits_{n\to\infty}u(\xi_n)=\infty$, 则存在 $\{\xi_n\}$ 的子序列 $\{\xi_{n_k}\}$ 使得 $u(\xi_{n_k})=\max\left\{u(t):\ T_2\le t\le\xi_{n_k}\right\}$, $k=1,2,\cdots$. 于是, 从 (3.13) 得

$$\begin{aligned}0<&\alpha(e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau}-1)\left[y(\xi_{n_k}-\tau)-y(\xi_{n_k}-2\tau)\right]\\ <&-\frac{1}{2}(\alpha-1)(1-e^{-\lambda_1\tau})e^{\lambda_1\xi_{n_k}}<0,\qquad k=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

矛盾. 如果 $\limsup\limits_{t\to\infty}u(t)=\limsup\limits_{n\to\infty}u(\xi_n)<\infty$, 则从 (3.13) 导出

$$\begin{aligned}0<&\limsup_{n\to\infty}\left\{u(\xi_n)+\alpha(e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau}-1)\left[y(\xi_n-\tau)-y(\xi_n-2\tau)\right]\right\}\\ \le&\limsup_{n\to\infty}\left\{u(\xi_n-\tau)-\frac{1}{2}(\alpha-1)(1-e^{-\lambda_1\tau_1})e^{\lambda_1\xi_n}\right\}=-\infty.\end{aligned}$$

矛盾.

情况 3 $y(t)\ge\alpha e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau}y(t-\tau)$ 最终成立. 此时取 $T_4>T_2$ 使得

$$y(t)\ge\alpha e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau}y(t-\tau),\qquad t\ge T_4,$$

于是由 (3.6) 得

$$y'(t)=q(t)e^{y(t)-\alpha y(t-\tau)}\ge q(t)\exp\left[(1-e^{(\lambda_2-\lambda_1)\tau})y(t)\right],\qquad t\ge T_4.$$

记 $a=1-e^{(\lambda_2-\lambda_1)\tau}$, 则 $0<a<1$, 且化上式为

$$y'(t)e^{-ay(t)}\ge q(t),\qquad t\ge T_4,$$

再从 T_4 到 ∞ 积分上式, 得

$$\int_{T_4}^{\infty}q(t)\,\mathrm{d}t\le\int_{T_4}^{\infty}y'(t)e^{-ay(t)}\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{a}e^{-ay(T_4)}<\infty,$$

此与 $q(t)$ 的定义矛盾.

综合情况 1, 2 和 3 知方程 (3.5) 的所有解振动, 从而方程 (1.1) 所有解振动.

(ii) 取 μ_1, $T_5>t_0$ 使得 $\mu<\mu_1<\tau^{-1}\ln\alpha$ 且

$$p(t)\le\mu_1e^{\mu_1t}\exp\left[(\alpha e^{-\mu_1\tau}-1)e^{\mu_1t}\right],\qquad t\ge T_5.\tag{3.14}$$

令 $\varphi(t)=e^{\mu_1t}$, $x(t)=e^{-\varphi(t)}$, 则

$$\begin{aligned}x'(t)+p(t)[x(t-\tau)]^{\alpha}=&-\varphi'(t)e^{-\varphi(t)}+p(t)e^{-\alpha\varphi(t-\tau)}\\ =&e^{-\alpha\varphi(t-\tau)}\left\{p(t)-\mu_1e^{\mu_1t}\exp\left[(\alpha e^{-\mu_1\tau}-1)e^{\mu_1t}\right]\right\}\\ \le&0,\qquad t\ge T_5.\end{aligned}$$

根据定理 2.1, 方程 (1.1) 存在最终正解，证毕.

例 3.1 考虑超线性方程

$$x'(t)+C\exp(e^{\lambda t})\big[x(t-\tau)\big]^{\alpha}=0,\qquad t\geq 0,\tag{3.15}$$

其中 $C\in(0,\infty)$, $\lambda\in(-\infty,\infty)$, $\alpha\in(1,\infty)$ 是分子与分母均为奇数的有理数．根据定理 3.1, 当 $\lambda>\tau^{-1}\ln\alpha$ 时，方程 (3.15) 所有解振动；当 $\lambda<\tau^{-1}\ln\alpha$ 时，方程 (3.15) 存在最终正解.

例 3.2 由定理 3.1 知，一阶超线性时滞微分方程

$$x'(t)+e^{2t-3}\big[x(t-1)\big]^{3}=0,\qquad t\geq 0\tag{3.16}$$

存在最终正解．事实上， $x(t)=e^{-t}$ 就是这样一个解.

定理 3.2 假设 $\alpha_i>1$, $i=1,2,\cdots,n$, 则下述结论成立：

(i) 如果存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 及 $\lambda>\tau_i^{-1}\ln\alpha_i$, 使得

$$\liminf_{t\to\infty}\big[p_i(t)\exp(-e^{\lambda t})\big]>0,\tag{3.17}$$

则方程 (1.7) 所有解振动；

(ii) 如果 (2.1) 成立，且存在 $\mu<\min\{\tau_i^{-1}\ln\alpha_i:\ i=1,2,\cdots,n\}$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\big[p_i(t)\exp(-e^{\mu t})\big]<\infty,\qquad i=1,2,\cdots,n,\tag{3.18}$$

则方程 (1.7) 存在最终正解.

证 (i) 不失一般性，反设方程 (1.7) 存在最终正解 $x(t)$, 则由 (1.7) 得

$$x'(t)+p_i(t)\big[x(t-\tau_i)\big]^{\alpha_i}\leq 0,$$

据此及定理 2.1, 定理 3.1 即可导出矛盾．证毕.

(ii) 取 μ_1 使得 $\mu<\mu_1<\tau_i^{-1}\ln\alpha_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 且

$$p_i(t)\leq\frac{\mu_1}{n}e^{\mu_1 t}\exp\big[(\alpha_i e^{-\mu_1\tau_i}-1)e^{\mu_1 t}\big],\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

令 $\varphi(t)=e^{\mu_1 t}$, $x(t)=e^{-\varphi(t)}$, $t\geq t_0$, 则

$$\begin{aligned}x'(t)+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)\big[x(t-\tau_i)\big]^{\alpha_i}&=-\varphi'(t)e^{-\varphi(t)}+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)\,e^{-\alpha_i\varphi(t-\tau_i)}\\&=\sum_{i=1}^{n}e^{-\alpha_i\varphi(t-\tau_i)}\Big\{p_i(t)-\frac{\mu_1}{n}e^{\mu_1 t}\exp\big[(\alpha_i e^{-\mu_1\tau_i}-1)e^{\mu_1 t}\big]\Big\}\leq 0,\end{aligned}$$

根据定理 2.1, 方程 (1.7) 亦存在最终正解，证毕.

4　混合型方程

定理 4.1 假设存在 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 使得

$$\sum_{j=1}^{r}\alpha_{i_j}<r,\tag{4.1}$$

且

$$\int_{t_0}^{\infty}\Big[\prod_{j=1}^{r}p_{i_j}(s)\Big]^{1/r}\mathrm{d}s=\infty, \tag{4.2}$$

则方程 (1.7) 所有解振动.

证 不失一般性, 反设方程 (1.7) 存在最终正解 $x(t)$, 则由 (1.7) 知

$$x'(t)+\sum_{j=1}^{r}p_{i_j}(t)\big[x(t-\tau_{i_j})\big]^{\alpha_{i_j}}\leq 0,$$

进而有

$$x'(t)+r\Big[\prod_{j=1}^{r}p_{i_j}(t)\Big]^{1/r}\big[x(t-\tau_*)\big]^{(\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_r})/r}\leq 0, \tag{4.3}$$

这里 $\tau_*=\min\{\tau_{i_1},\tau_{i_2},\cdots,\tau_{i_r}\}$. 从 (4.2) 容易推出不等式 (4.3) 无最终正解, 矛盾. 证毕.

推论 4.1 如果 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n<n$, 且

$$\int_{t_0}^{\infty}\Big[\prod_{j=1}^{n}p_j(s)\Big]^{1/n}\mathrm{d}s=\infty, \tag{4.4}$$

则方程 (1.7) 所有解振动.

注 4.1 条件 (4.4) 大大地改进了 [8] 中定理 1 的如下条件

$$\liminf_{t\to\infty}\Big[\prod_{j=1}^{n}p_j(t)\Big]^{1/n}>0$$

和

$$\liminf_{t\to\infty}\Big[\Big(\prod_{j=1}^{n}p_j(t)\Big)^{1/n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\tau_j\Big]>\frac{1}{e}.$$

例 4.1 考虑混合型时滞微分方程

$$x'(t)+\frac{1}{t^3}\big[x(t-1)\big]^{1/3}+t^2\big[x(t-2)\big]^{7/5}+t^3\big[x(t-3)\big]^{5/3}=0,\qquad t\geq 1, \tag{4.5}$$

根据定理 4.1, 方程 (4.5) 所有解振动.

定理 4.2 如果 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n$, 且

$$\liminf_{t\to\infty}\Big[\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\int_{t-\tau_j}^{t}\Big(\prod_{j=1}^{n}p_j(s)\Big)^{1/n}\mathrm{d}s\Big]>\frac{1}{e} \tag{4.6}$$

或

$$\liminf_{t\to\infty}\Big[\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\int_{t}^{t+\tau_j}\Big(\prod_{j=1}^{n}p_j(s)\Big)^{1/n}\mathrm{d}s\Big]>\frac{1}{e}, \tag{4.7}$$

则方程 (1.7) 所有解振动.

证 不失一般性，反设 (1.7) 存在最终正解 $x(t)$, 则由 (1.7) 及算术 - 几何不等式得

$$x'(t)+n\Big(\prod_{j=1}^{n}p_j(t)\Big)^{1/n}\big[x(t-\tau_j)\big]^{\alpha_j/n}\le 0. \tag{4.8}$$

根据 [9] 中的注 1, (4.6) 或 (4.7) 蕴含不等式 (4.8) 无最终正解，矛盾，证毕.

注 4.2 条件 (4.6) 实际上已在 [8] 中得到，较 (4.6) 和 (4.7) 更好的条件见 [9].

定理 4.3 如果 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n$, 且

$$\limsup_{t\to\infty}\Big(\prod_{j=1}^{n}\int_t^{t+\tau_j}p_j(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{1/n}>\frac{1}{n}, \tag{4.9}$$

则方程 (1.7) 所有解振动.

证 不失一般性，反设 (1.7) 存在最终正解 $x(t)$, 则由 (1.7) 知 $x(t)$ 最终单调不增，且

$$\begin{aligned}x(t)&\ge\sum_{j=1}^{n}\int_t^{\infty}p_j(s)\big[x(s-\tau_j)\big]^{\alpha_j}\,\mathrm{d}s\ge\sum_{j=1}^{n}\int_t^{t+\tau_j}p_j(s)\big[x(s-\tau_j)\big]^{\alpha_j}\,\mathrm{d}s\\&\ge\sum_{j=1}^{n}\big[x(t)\big]^{\alpha_j}\int_t^{t+\tau_j}p_j(s)\,\mathrm{d}s\ge nx(t)\Big(\prod_{j=1}^{n}\int_t^{t+\tau_j}p_j(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{1/n},\end{aligned}$$

由此得

$$\limsup_{t\to\infty}\Big(\prod_{j=1}^{n}\int_t^{t+\tau_j}p_j(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{1/n}\le\frac{1}{n},$$

此与 (4.9) 矛盾．证毕.

定理 4.4 假设存在 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 使得

$$\sum_{j=1}^{r}\alpha_{i_j}>r, \tag{4.10}$$

且存在 $\lambda>\tau_*^{-1}\ln\big(\sum\limits_{j=1}^{r}\alpha_{i_j}/r\big)$ 使得

$$\liminf_{t\to\infty}\Big[\Big(\prod_{j=1}^{r}p_{i_j}(t)\Big)^{1/r}\exp\big(-e^{\lambda t}\big)\Big]>0, \tag{4.11}$$

这里 $\tau_*=\min\{\tau_{i_1},\tau_{i_2},\cdots,\tau_{i_r}\}$, 则方程 (1.7) 所有解振动.

证 不失一般性，反设方程 (1.7) 存在最终正解 $x(t)$, 则由 (1.7) 知

$$x'(t)+r\Big[\prod_{j=1}^{r}p_{i_j}(t)\Big]^{1/r}\big[x(t-\tau_*)\big]^{(\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_r})/r}\le 0, \tag{4.12}$$

上式表明不等式 (4.12) 存在最终正解，根据定理 2.1, 下述相应的方程

$$x'(t)+r\Big[\prod_{j=1}^{r}p_{i_j}(t)\Big]^{1/r}\big[x(t-\tau_*)\big]^{(\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_r})/r}=0 \tag{4.13}$$

亦存在最终正解，而由定理 3.1 及 (4.11) 知方程 (4.13) 所有解振动，矛盾．证毕．

参 考 文 献

1 Ladde G S, Lakshmikantham V, Zhang B G. Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments. New York: Dekker, 1987

2 Cyori I, Ladas G. Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications. Oxford: Charendon Press, 1991

3 Koplatadze R G, Chanturija T A. On the Oscillatory and Monotone Solutions of the First Order Differential Equations with Deviating Argument. *Differential'nye Uravnenija*, 1982, 18: 1463–1465

4 Erbe L H, Kong Qingkai, Zhang B G. Oscillation Theory for Functional Differential Equations. New York: Marcel Dekker, 1995

5 Li Bingtuan. Oscillation of First Order Delay Differential Equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1996, 124: 3729–3737

6 唐先华，庾建设，王志成．临界状态一阶时滞微分方程振动性比较定理． 科学通报, 1999, 44(1): 26–31 (Tang Xianhua, Yu Jianshe, Wang Zhicheng. Comparision Theorems of Oscillation of First Order Delay Differential Equations in a Critical State. *Chinese Sci. Bull.*, 1999, 44(1): 26–31)

7 Stavroulakis I P. Nonlinear Delay Differential Inequalities. *Nonlinear Analysis*, 1982, 6(4): 389–396

8 申建华，庾建设．一阶非线性时滞微分方程解的振动性． 数学物理学报, 1995, 15(4): 368–375 (Shen Jianhua, Yu Jianshe. Oscillation of Solutions of First Order Nonlinear Delay Differential Equations. *Acta. Math. Scientia.*, 1995, 15(4): 368–375)

9 Tang Xianhua, Yu Jianshe. First Order Nonlinear Differential Inequalities with Deviating Arguments. *Appl. Math. J. Chinese Univ.* (Series B), 2000, 15(1): 21–27

OSCILLATION OF SUPERLINEAR DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

TANG Xianhua

(*Department of Applied Mathematics, Central South University, Changsha* 410083)

YU Jianshe

(*College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha* 410082)

Abstract In this paper, we consider the oscillation of solutions for the first order superlinear delay differential equations $x'(t)+p(t)[x(t-\tau)]^{\alpha}=0$ $(\alpha>1)$, and obtain some "almost sharp" oscillation criteria. In the final, by applying the obtained results in this paper, we also obtain some oscillation conditions for the mixed type delay differential equations

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)[x(t-\tau_i)]^{\alpha_i}=0.$$

Key words Superlinear, delay differential equation, oscillation