第 26 卷 第 2 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 26 No. 2
2003 年 4 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Apr., 2003

不允许卖空证券组合选择的有效子集 *

史树中
(北京大学光华管理学院金融系，北京 100871)
杨　杰
(南开大学数学研究所，天津 300071)

摘　要　证券组合选择的有效子集是指它可取代原有的基本证券集来生成 Markowitz 有效组合前沿。本文给出一个证券集的子集在不允许卖空的条件下是全集的有效子集的充要条件。

关键词　Markowitz 组合选择理论，卖空，均值—方差分析，有效组合前沿，有效子集

1　引言

本文继续 [1] 讨论 Markowitz 意义下的证券组合选择的有效子集. 与 [1] 不同的是本文讨论不允许卖空的情形. 尽管 Markowitz 当年提出证券组合选择理论时 (见 [2, 3]) 是不允许卖空的，即投资组合中的各证券价值的比例 (权重) 不可以是负值，但目前流行的教科书 (例如， [4]) 中的 Markowitz 理论都是允许卖空的，这是因为发达国家的证券市场中都允许卖空，并且允许卖空在理论上要简单得多. 然而，中国股市至今还不允许卖空. 因此，讨论不允许卖空的条件下的有效子集问题对我们来说更有现实意义.

对于不允许卖空的 Markowitz 理论来说，基本思想仍然在于把证券投资的收益率看作随机变量. 该收益率的期望值就是该证券的 (期望) 收益，其标准差则可看作证券投资风险的一种度量；但不允许卖空的证券组合的收益率将是组合中所包含的证券的收益率的凸组合. 这样，在不允许卖空的情形下，证券组合的期望收益等于该凸组合的期望收益，它就等于各种证券的期望收益的凸组合，其投资风险则是该收益率凸组合作为随机变量的标准差. 对凸组合的系数求解期望收益固定，使其标准差或方差最小的最优化问题，就形成 Markowitz 理论的基本问题. 基本问题的解称之为 **极小风险组合**, 也称为 **前沿组合**. 前沿组合的全体或其在风险 (收益率的标准差) 和收益 (收益率的期望) 坐标平面上对应的点集称为 **组合前沿**. 在风险 — 收益坐标平面上，以 “收益大，风险小” 作为半序，那么所有组合的风险和收益对该半序来说的极大元全体就形成这一证券组合选择问题的 **有效** (**组合**) **前沿** (efficient (portfolio) frontier). 有效前沿中的点所对应的组合则称为证券集的 **有效组合**. 确定证券投资组合的有效前沿对投资者来说，显然是十分重要的.

在允许卖空的情形下，如果一个证券集的有效组合前沿非空，那么它或是一个孤立点 (所有证券的期望收益都相等), 或是双曲线的右上半部 (证券集的组合中不包括无风

本文 2000 年 12 月 25 日收到.
* 国家自然科学基金重点项目 “金融数学”(10131030 号) 资助项目.

险资产), 或是起点在纵轴上的射线 (证券集的组合中包含无风险资产). 不过有时有效前沿可能为空集, 这时后两者会退化为与收益轴平行的直线 (参看 [5]). 这一结论在不允许卖空的情形下不再成立. 在不允许卖空的情形下, 与上述不同的是, 如果证券集非空, 那么其有效组合前沿也一定非空. 同时, 两个证券集的有效前沿一样不再蕴含它们的组合前沿也一样. 在证券集的所有证券的期望收益都相等时, 证券集的组合前沿显然仍然是一个孤立点. 从而有效前沿也是一个孤立点. 但有时会发生有效前沿是一个孤立点, 而组合前沿不是孤立点. 一个简单的例子就是由一个无风险证券与一个收益率期望比无风险收益率要低的风险证券所组成的集合. 它们的组合前沿将是一个一端在收益轴上的斜率为负的线段, 但其有效前沿则是收益轴上的一个点. 这样一来, 我们必须把有关组合前沿和有关有效前沿的结果分开来讨论. 对于证券的期望收益不全相等的证券集来说, 我们可以指出, 其组合前沿由有限条双曲线段联结组成. 但是其中有些双曲线段可能退化为直线段. 直线段的起点可以在收益轴上, 也可以不在收益轴上. 同时, 风险作为收益的函数是凸函数, 而有效前沿在风险 — 收益平面上构成一个有限区间上的凹函数的图象. 这一结果本质上已在 [3] 中给出, 我们将在第二节中基于允许卖空的组合前沿的结果, 给出一个新证明.

本文的中心内容则要讨论这样的一个问题: 实际应用中可以发现, 在有效组合前沿中被选中的证券数目与备选的证券总数相比, 往往数量很小, 这是否意味着大部分证券实际上在这一组合选择问题中是冗余的? 如果确是这样, 那么对于某个证券集的一个子集来说, 子集的有效前沿恒同于全体的有效前沿的条件是什么? 这样的子集我们就称它为原证券集的 **有效子集**. 对于允许卖空的情形, 我们在 [1] 中给出了一个证券集的子集是原证券集的有效子集的充要条件, 本文要给出同样的问题在不允许卖空条件下有解的充要条件. 与允许卖空情形相比较, 不允许卖空情形下的数学困难在于我们不能再通过强有力的线性方程组理论来得到结果, 因为我们将面临一些线性不等方程组.

正如我们在 [1] 中所指出, 在允许卖空的情形下, 这个问题并不完全是新的, 它紧密联系着共同基金 (mutual-fund) 分离问题. 我们的问题实际上是要在 Markowitz 有效意义下找出 k 基金分离的充要条件. 它可以与已知的在 Rothschild–Stiglitz 风险度量 [6,7] 意义下的 Ross 的 k 基金分离的充要条件相比较. 尤其是二基金情形, CAPM (资本资产定价模型) 式的公式对于 Ross 的情形是必要条件, 而对我们来说却是充要条件. 这使我们在那里进一步揭示了 CAPM 的本质. 此外, 我们还可看到 [8, 9] 中也研究过同样的问题, 并在假定收益率协方差矩阵正定时得到充要条件. 他们的结果都是我们的特例. 然而, 在不允许卖空的条件下, 类似的问题还没有看到有人考虑过. 尤其是, 在这里将涉及不允许卖空条件下的 CAPM 问题. 在一定意义下, 它并不与允许卖空的情形一样 (参看第五节).

现在我们来把这个问题形式化, 假定 S_n 为 n 种证券的集合, 这里我们对证券编号, 而 S_n 就是编号的集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$. 证券的收益率分别为随机变量 $r_1, r_2, \cdots, r_n$, 一般假设它们的方差有限. 它们的全体构成随机向量 $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)^T$.

$$W_+ = \big\{w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n_+ \,|\, w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1\big\}$$

表示这 n 种证券的收益率凸组合全体, 其中 $\mathbb{R}_+$ 表示非负实数全体. 对于任何 $w \in W_+$, 其对应的组合的收益率将是随机变量 $r_w = w^T r = w_1 r_1 + w_2 r_2 + \cdots + w_n r_n$. 又设 $S_k \subset S_n$ 为 k 种证券的集合, 不妨假定 $S_k = \{1, 2, \cdots, k\}$. 则它们的收益率恰好为 $r_1, r_2, \cdots, r_k$. 记 $r^k = (r_1, r_2, \cdots, r_k)^T$. 同时, 又记

$$W^k_+ = \big\{w^k = (w_1, w_2, \cdots, w_k)^T \in \mathbb{R}^k_+ \,|\, w_1 + w_2 + \cdots + w_k = 1\big\}.$$

我们称 S_k 为 S_n 的 **有效子集** 是指对于任何 $w \in W_+$, 总存在 $w^k \in W^k_+$, 使得

$$E[w^T r] \le E\big[(w^k)^T r^k\big], \qquad \mathrm{Var}\,[w^T r] \ge \mathrm{Var}\,\big[(w^k)^T r^k\big].$$

它等价于 S_k 的有效前沿恒同于 S_n 的有效前沿. 对比允许卖空时的有效子集定义 [1], 我们这里只是将 w 及 w^k 限制为非负组合. 同时, 正如我们已经提到的, 与允许卖空的情形的不同在于, 如果 S_k 的有效前沿恒同于 S_n 的有效前沿, 那么它不一定再等价于 S_k 的组合前沿恒同于 S_n 的组合前沿. 因此, 我们有必要再提出 **极小风险子集** 的概念: S_k 是 S_n 的极小风险子集是指 S_k 的组合前沿恒同于 S_n 的组合前沿.

本文的第二节将先简要讨论不允许卖空的 Markowitz 理论. 第三节给出本文关于极小风险子集的主要定理及其证明. 第四节把关于极小风险子集的定理改进为对于有效子集适用的定理. 第五节是关于 CAPM 型的结果和结语.

2 不允许卖空的 Markowitz 理论

沿用上节中的符号, 不允许卖空的 Markowitz 问题可叙述为如何确定 $w \in W_+$, 使得证券组合在期望收益率一定时, 风险 (收益率的方差或标准差) 最小. 令

$$\begin{aligned}
&e = (1, 1, \cdots, 1)^T \in \mathbb{R}^n,\\
&\mu_i = E[r_i], \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \quad \mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^T,\\
&V = (V_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,n} = \left(\mathrm{Cov}\,[r_i, r_j]\right)_{i,j=1,2,\cdots,n},
\end{aligned}$$

并不妨称 w 为 **组合**, $\mu_w = w^T\mu$ 为 **组合的收益**, $\sigma_w = (w^TVw)^{1/2}$ 为 **组合的风险**. 这样, 不允许卖空的 Markowitz 均值 — 方差组合选择问题为

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sigma_w^2 = w^TVw = \sum_{i,j=1}^{n} V_{ij} w_i w_j \\
\text{s.t.} \quad & w^Te = w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1, \\
& \mu_w = w^T\mu = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + \cdots + w_n\mu_n = \overline{\mu}, \\
& w_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{1}$$

而允许卖空 (即不要求 $w_i \geqslant 0$) 的 Markowitz 均值–方差组合选择问题为

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sigma_w^2 = w^TVw = \sum_{i,j=1}^{n} V_{ij} w_i w_j \\
\text{s.t.} \quad & w^Te = w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1, \\
& \mu_w = w^T\mu = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + \cdots + w_n\mu_n = \overline{\mu}.
\end{aligned} \tag{2}$$

对于所有可能的组合收益 $\overline{\mu}$ 得到的问题 (1) 的解的全体就是 S_n 的 (不卖空) **极小风险组合** 全体. 如所周知, 一个证券集的有效组合一定是极小风险组合, 但反之不然. 与允许卖空的情形有所不同的是目前的极小风险组合的收益只可能在区间 $[\min_i \mu_i, \max_i \mu_i]$ 中来取, 而有效前沿组合组合的收益更是只能在区间 $[\mu^n_{\min \sigma_w}, \max_i \mu_i]$ 中来取, 这里 $\mu^n_{\min \sigma_w}$ 是对应 S_n 的组合的最小风险 $\min \sigma_w$ 的最大收益 (在极端情形下, 对应最小风险的组合可能有许多, 且它们的收益形成一个区间), 它是问题 (1) 中去掉第二个等式约束以后所得到的解组合所对应的最大收益.

问题 (1) 是一个带线性等式和不等式约束的二次凸规划问题. 其 Lagrange 乘子总存在 (见 [10, 279 页]). 因此, 它可用 Lagrange 乘子法 (或者说 Kuhn-Tucker 条件) 来求解, 即 $\overline{w} = (\overline{w}_1, \overline{w}_2, \cdots, \overline{w}_n)^T$ 和 λ_1, λ_2, $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)^T$ 是其解和 Lagrange 乘子的充

要条件为它们满足

$$\begin{cases} 2V\overline{w} - \lambda_1\mu - \lambda_2 e - \nu = 0, \\ \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \cdots + \overline{w}_n = 1, \\ \overline{w}_1\mu_1 + \overline{w}_2\mu_2 + \cdots + \overline{w}_n\mu_n = \overline{\mu}, \\ \nu_i \geqslant 0, \quad \overline{w}_i \geqslant 0, \quad \nu_i\overline{w}_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \tag{3}$$

而允许卖空的问题 (2) 仅仅是一个带线性等式约束的二次凸规划问题. 对它用 Lagrange 乘子法来求解，可得 $\overline{w}'$ 和 λ_1', λ_2' 是其解和 Lagrange 乘子的充要条件为它们满足

$$\begin{cases} 2V\overline{w}' - \lambda_1'\mu - \lambda_2' e = 0, \\ \overline{w}_1' + \overline{w}_2' + \cdots + \overline{w}_n' = 1, \\ \overline{w}_1'\mu_1 + \overline{w}_2'\mu_2 + \cdots + \overline{w}_n'\mu_n = \overline{\mu}. \end{cases} \tag{4}$$

(3) 在表面上看来似乎是一个非线性不等方程组，但是我们以后可以看到，它们可归结为一些线性不等方程来处理.

除了不允许卖空与允许卖空的两种情形以外, 还有一部分证券允许卖空，另一部分证券不允许卖空的中间情形. 不妨设 $S_{k'} \subset S_n$ 是 S_n 中允许卖空的证券集. 那么相应问题的解和 Lagrange 乘子仍然可以表达为 (3) 的形式，但是其中的 ν_i 要改成满足下列条件：

$$\nu_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k'; \qquad \nu_i \geqslant 0, \quad \overline{w}_i \geqslant 0, \quad \nu_i\overline{w}_i = 0, \quad i = k'+1, \cdots, n.$$

然而， (3) 的每一个解 $\overline{w}$ 总有一些分量 $\overline{w}_i > 0$, 从而其相应的 ν_i 为零，于是我们立即可以得到下列命题：

命题 2.1 设 $\overline{w} = (\overline{w}_1, \overline{w}_2, \cdots, \overline{w}_n)^T$ 为问题 (1) 对于收益为 $\overline{\mu}$ 的一个解，且在其充要条件 (3) 的表达中，满足

$$\overline{w}_i \begin{cases} > 0, \qquad i \in S_J = \{j_1, j_2, \cdots, j_l\} \subset S_n, \\ = 0, \qquad i \notin S_J, \end{cases} \tag{5}$$

那么 $\overline{w}$ 也是对 S_J 中的证券允许卖空，而对 $S_n \setminus S_J$ 不允许卖空的极小风险组合. 特别是， $\overline{w}' = (\overline{w}_{j_1}, \overline{w}_{j_2}, \cdots, \overline{w}_{j_l})^T$ 是 S_J 上的允许卖空的 Markowitz 问题 (2) 的解.

我们不妨称满足条件 (5) 的 S_J 为组合 $\overline{w}$ 的 **指标集**. 由这一定义和 (3) 的线性性，我们立即可得下列命题.

命题 2.2 设 $\overline{w}^m = (\overline{w}_1^m, \overline{w}_2^m, \cdots, \overline{w}_n^m)^T$ 为问题 (1) 对于收益为 $\overline{\mu}^m$ 的解， $m = 1, 2$, 且它们都以 S_J 为指标集. 那么对于任何 $\alpha \in (0, 1)$, $\overline{w}^\alpha = (1-\alpha)\overline{w}^1 + \alpha\overline{w}^2$ 是问题 (1) 对于收益为 $\overline{\mu}^\alpha = (1-\alpha)\overline{\mu}^1 + \alpha\overline{\mu}^2$ 的解，并且 $\overline{w}^\alpha$ 也以 S_J 为指标集.

这样一来，在 S_n 中至少有两种收益不同的证券时，问题 (1) 可能有解的收益 $\overline{\mu}$ 可分为两类，一类形成 $[\min_i \mu_i, \max_i \mu_i]$ 中的一个区间，在这个区间上，对于每一个 $\overline{\mu}$, 都存在有同样指标集 S_J 的问题 (1) 的解，以至它们都是同一个指标集 S_J 上的允许卖空的问题 (2) 的解. 这个 S_J 至少包含两种收益不同的证券，否则 S_J 上的允许卖空问题的解不可能对 $\overline{\mu}$ 在一个区间上的值都存在. 另一类则形不成区间, 但对应的解也是某个指标集的允许卖空问题的解. 因为 S_n 只有有限个子集 S_J, 所以 $[\min_i \mu_i, \max_i \mu_i]$ 一定是有限个这样的区间和有限个点的并集. 即存在 $\overline{\mu}^l \in [\min_i \mu_i, \max_i \mu_i]$, $l = 1, \cdots, p$, 满足

$$\min_i \mu_i = \overline{\mu}^1 < \overline{\mu}^2 < \cdots < \overline{\mu}^p = \max_i \mu_i,$$

使得在区间 $(\overline{\mu}^l,\overline{\mu}^{l+1})$ 中，对应这一区间中的 $\overline{\mu}$ 的解可以有同样的指标集 S_J. 也就是说，对于这一区间中的 $\overline{\mu}$ 来说，所对应的解也一定是 S_J 上的允许卖空的问题的 (2) 的解. 至于对于区间的端点 $\overline{\mu}^l$ 和 $\overline{\mu}^{l+1}$ 来说，它们对应的前沿组合被 Markowitz 称为 **拐角组合** (corner portfolio), 具有很特殊的意义.

众所周知，在允许卖空的情形下，如果 S_n 的组合前沿非空，那么它或是一个孤立点 (所有 μ_i 都相等), 或是双曲线的右半部 (S_n 的组合中不包括无风险资产), 或是起点在纵轴上的两条斜率相反的射线 (S_n 的组合中包含无风险资产). 这样一来，在上述以 S_J 为指标集的解所对应的 $\overline{\mu}$ 的区间中，其不允许卖空的组合前沿必定与 S_J 上允许卖空的组合前沿重合，即它或者是一段双曲线，或者是一段直线. 而以 $\overline{\mu}$ 为自变量，问题 (1) 的值 σ 为因变量的函数 $\sigma(\overline{\mu})$ 的整个图象将是这种双曲线段或直线段拼接而成的 $[\min_i \mu_i, \max_i \mu_i]$ 上的连续凸函数的图象. 这里连续性和凸性不难直接证明. 尽管利用指标集来对区间 $[\min_i \mu_i, \max_i \mu_i]$ 进行上述分割的方法可能不唯一，但形成的函数 $\sigma(\overline{\mu})$ 是没有区别的. 综上所述，我们就得到下列定理

定理 2.1 设 S_n 为一个非空证券集. 那么它的不允许卖空条件下的组合前沿非空，并且它或是一个孤立点 (所有 μ_i 都相等), 或是有限段双曲线段或直线段的联结. 问题 (1) 的值

$$\sigma(\overline{\mu}) = \min_{w\in\mathbb{R}^n_+,\, w^Te=1,\, w^T\mu=\overline{\mu}} (w^TVw)^{1/2},$$

关于收益 $\overline{\mu}$ 的函数 σ 在 $(\overline{\mu},\sigma_1)$ 平面上的图象是由有限段双曲线段或直线段联结而成的连续凸函数图象；从而当 $\overline{\mu} \geqslant \mu_{\min\sigma_w}$ 时，其反函数图象 (即有效前沿) 在 $(\sigma_w,\overline{\mu})$- 平面上形成一个有限闭区间上的连续凹函数的图象.

注 这里所说的直线段在 S_n 中的证券的收益率之间存在完全相关的情形下，就会出现，并且这种直线段可能多于一段.

定理 2.1 是对于组合前沿而言的，对于有效前沿来说，结论类似. 但有效前沿归结为一点时并不能导得所有 μ_i 相等，还有可能是最小风险组合的收益最大.

3 关于极小风险子集的主要定理及其证明

在 [1] 中我们已经证明了下列定理 (表达形式不同):

定理 3.1 设 S_n 为 n 种证券的集合 $\{1,2,\cdots,n\}$. $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 为其相应的收益率. $\mu_i = E[r_i]$, $V_{ij} = \mathrm{Cov}\,[r_i,r_j]$, $i,j=1,2,\cdots,n$. $S_k=\{1,2,\cdots,k\}\subset S_n$. 那么在允许卖空的条件下，$S_k$ 是 S_n 的有效子集的充分必要条件为对于任何 $i>k$, 存在 $t^i_1,t^i_2,\cdots,t^i_k\in\mathbb{R}$ 满足：

1. $t^i_1+t^i_2+\cdots+t^i_k=1$, $t^i_1\mu_1+t^i_2\mu_2+\cdots+t^i_k\mu_k=\mu_i$,
2. 对于任何 $j\in S_k$, $V_{ij}=t^i_1V_{1j}+t^i_2V_{2j}+\cdots+t^i_kV_{kj}$.

这一定理的证明中对证券集的收益率协方差矩阵是否正定没有作任何假定. 因此，它既适用于不带无风险证券情形，也适用于带无风险证券情形. 定理的成立在很大程度上依赖于允许卖空的问题 (2) 有解的充要条件是一个线性方程组. 而不允许卖空的问题 (1) 有解的充要条件不再是线性方程组，类似的结果就不再成立.

为证明我们的主要定理，先指出下列关键命题.

命题 3.1 设下列线性不等方程组：

$$\begin{aligned}
&w_1+w_2+\cdots+w_{k'}=1,\\
&V_{11}w_1+V_{12}w_2+\cdots+V_{1k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_1-\frac{1}{2}\lambda_2=0,\\
&V_{21}w_1+V_{22}w_2+\cdots+V_{2k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_2-\frac{1}{2}\lambda_2=0,
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$V_{k'1}w_1+V_{k'2}w_2+\cdots+V_{k'k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_2=0, \tag{6}$$

$$V_{k'+1,1}w_1+V_{k'+1,2}w_2+\cdots+V_{k'+1,k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_{k'+1}-\frac{1}{2}\lambda_2\geq 0,$$

$$\vdots$$

$$V_{k1}w_1+V_{k2}w_2+\cdots+V_{kk'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_k-\frac{1}{2}\lambda_2\geq 0,$$

$$w_1,w_2,\cdots,w_{k'}>0$$

存在解 $(w_1,\cdots,w_{k'},\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^{k'+2}$. 那么它的每个解 $(w_1,\cdots,w_{k'},\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^{k'+2}$ 都满足

$$V_{i1}w_1+V_{i2}w_2+\cdots+V_{ik'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_i-\frac{1}{2}\lambda_2\geq 0 \tag{7}$$

的充要条件为：存在 $t_1^i,t_2^i,\cdots,t_k^i\in\mathbb{R}$ 满足

1. 对于任何 $l>k'$, $t_l^i\geq 0$,
2. $t_1^i+t_2^i+\cdots+t_k^i=1$, $t_1^i\mu_1+t_2^i\mu_2+\cdots+t_k^i\mu_k=\mu_i$,
3 对于任何 $j=1,\cdots,k'$, $V_{ij}\geqslant t_1^iV_{1j}+t_2^iV_{2j}+\cdots+t_k^iV_{kj}$.

证 **必要性** 我们用反证法. 如果这样的 $t_1^i,t_2^i,\cdots,t_k^i$ 不存在，我们指出存在 (6) 的解，使得 (7) 不成立. 为此，对于 $i>k$, 定义 $\mathbb{R}^{k'+2}$ 上的闭凸集 A 为满足下列条件的 $x=(x_1,\cdots,x_{k'+1},x_{k'+2})^T\in\mathbb{R}^{k'+2}$ 全体：

$$\begin{aligned}
&x_j=t_1V_{1j}+t_2V_{2j}+\cdots+t_kV_{kj}+u_j-s^iV_{ij},\qquad j=1,\cdots,k';\\
&x_{k'+1}=t_1\mu_1+t_2\mu_2+\cdots+t_k\mu_k-s^i\mu_i;\\
&x_{k'+2}=t_1+t_2+\cdots+t_k-s^i;\\
&\qquad t_1,\cdots,t_{k'}\in\mathbb{R},\qquad t_{k'+1},\cdots,t_k,u_1,\cdots,u_{k'},\ s^i\in\mathbb{R}_+,\\
&u_1+u_2+\cdots+u_{k'}+s^i\geq 1.
\end{aligned}$$

那么我们可以指出 $0\notin A$. 事实上，如果存在

$$\begin{aligned}
&\bar{t}_1,\cdots,\bar{t}_{k'}\in\mathbb{R},\qquad \bar{t}_{k'+1},\cdots,\bar{t}_k,\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_{k'},\bar{s}^i\in\mathbb{R}_+,\\
&\bar{u}_1+\bar{u}_2+\cdots+\bar{u}_{k'}+\bar{s}^i\geq 1,
\end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned}
&\bar{t}_1V_{1j}+\bar{t}_2V_{2j}+\cdots+\bar{t}_kV_{kj}+\bar{u}_j-\bar{s}^iV_{ij}=0,\qquad j=1,\cdots,k';\\
&\bar{t}_1\mu_1+\bar{t}_2\mu_2+\cdots+\bar{t}_k\mu_k-\bar{s}^i\mu_i=0;\qquad \bar{t}_1+\bar{t}_2+\cdots+\bar{t}_k-\bar{s}^i=0;
\end{aligned}$$

那么当 $\bar{s}^i>0$ 时，这显然意味着有上述性质的 $t_1^i,\cdots,t_k^i$ 存在. 而当 $\bar{s}^i=0$ 时，可得 $\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_{k'}$ 不全为零. 这时对于任何 $w_1,\cdots,w_k'>0$, 有

$$\sum_{j=1}^{k'}\sum_{l=1}^{k}w_jV_{lj}\bar{t}_l=\sum_{j=1}^{k'}w_j(-\bar{u}_j)<0.$$

但是，另一方面存在满足（ 6 ）的 $w_1,\cdots,w'_k>0$, 而对 (6) 第 $l+1$ 个方程两端乘上 $\bar{t}_l$, 并把所有方程相加，我们得到

$$\sum_{j=1}^{k'}\sum_{l=1}^{k} w_j V_{lj}\bar{t}_l \geq 0.$$

这一矛盾说明 $\bar{s}^i=0$ 的情形也不能成立．因此， $0\notin A$.

这样，由凸集分离定理，存在 $v^i=(v_1^i,\cdots,v_{k'+1}^i,v_{k'+2}^i)^T$ 满足

$$\forall\, x\in A,\qquad (v^i)^T x>0. \tag{8}$$

取 $s^i=1,\ t_1=\cdots=t_k=u_1=\cdots=u_{k'}=0$, 我们得到

$$a=v_1^iV_{i1}+v_2^iV_{i2}+\cdots+v_{k'}^iV_{ik'}+v_{k'+1}^i\mu_i+v_{k'+2}^i<0. \tag{9}$$

另一方面，取 $t_1\neq 0,\ t_2=\cdots=t_{k'}=0,\ u_1=\cdots=u_{k'}=0,\ s^i=1$, 则得

$$(v^i)^Tx=t_1(v_1^iV_{11}+v_2^iV_{12}+\cdots+v_{k'}^iV_{1k'}+v_{k'+1}^i\mu_1+v_{k'+2}^i)-a>0.$$

但 t_1 可取任意实数，这仅当

$$v_1^iV_{11}+v_2^iV_{12}+\cdots+v_{k'}^iV_{1k'}+v_{k'+1}^i\mu_1+v_{k'+2}^i=0$$

时才有可能．同理可得

$$v_1^iV_{j1}+v_2^iV_{j2}+\cdots+v_{k'}^iV_{jk'}+v_{k'+1}^i\mu_j+v_{k'+2}^i=0,\qquad j=1,\cdots,k'. \tag{10}$$

而由 $t_{k'+1},\cdots,t_k\geqslant 0$, 则同样的推理还可导得

$$v_1^iV_{j1}+v_2^iV_{j2}+\cdots+v_{k'}^iV_{jk'}+v_{k'+1}^i\mu_1+v_{k'+2}^i\geq 0,\qquad j=k'+1,\cdots,k. \tag{11}$$

此外，对 $x\in A$, 取 $t_1=\cdots=t_k=0,\ u_1\geqslant 1,\ u_2=\cdots=u_{k'}=0,\ s^i=0$, 则得 $v_1^iu_1>0$. 这仅当 $v_1^i>0$ 时才有可能．同理可得

$$v_j^i>0,\qquad j=1,\cdots,k'.$$

不妨假设 $v_1^i+\cdots+v_k^i=1$. 于是由 (10), (11), 线性不等方程组 (6) 有解

$$w_1=v_1^i,\cdots,w_{k'}=v_{k'}^i,\qquad \lambda_1=-2v_{k'+1}^i,\qquad \lambda_2=-2v_{k'+2}^i.$$

但由 (9), 不等式 (7) 不满足.

充分性 如果存在这样的 $t_1^i,t_2^i,\cdots,t_k^i\in\mathbb{R}$, 由 (6) 和 t_l^i 的性质可知,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k'}V_{ij}w_j-\frac12\lambda_1\mu_i-\frac12\lambda_2 &\geq \sum_{j=1}^{k'}\sum_{l=1}^{k}t_l^i\Big(V_{lj}w_j-\frac12\lambda_1\mu_l-\frac12\lambda_2\Big)\\ &=\sum_{l=1}^{k}t_l^i\Big(\sum_{j=1}^{k'}V_{lj}w_j-\frac12\lambda_1\mu_l-\frac12\lambda_2\Big)\geq 0,\end{aligned}$$

即 (7) 成立.

为便于表达主要定理，我们称 $S_J=\{j_1,\cdots,j_l\}\subset S_k$ 为 S_k 的前沿组合的 **构成集**，是指下列线性不等方程组有解 $(w_{j_1},\cdots,w_{j_l},\lambda_1,\lambda_2)$：

$$
\begin{aligned}
&w_{j_1}+w_{j_2}+\cdots+w_{j_l}=1,\\
&V_{j_1j_1}w_{j_1}+V_{j_1j_2}w_{j_2}+\cdots+V_{j_1j_l}w_{j_l}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_{j_1}-\frac{1}{2}\lambda_2=0,\\
&V_{j_2j_1}w_{j_1}+V_{j_2j_2}w_{j_2}+\cdots+V_{j_2j_l}w_{j_l}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_{j_2}-\frac{1}{2}\lambda_2=0,\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&V_{j_lj_1}w_{j_1}+V_{j_lj_2}w_{j_2}+\cdots+V_{j_lj_l}w_{j_l}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_{j_l}-\frac{1}{2}\lambda_2=0,\\
&V_{ij_1}w_{j_1}+V_{ij_2}w_{j_2}+\cdots+V_{ij_l}w_{j_l}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_{i}-\frac{1}{2}\lambda_2\geq 0,\qquad \forall\, i\in S_k\setminus S_J,\\
&\qquad w_{j_1},w_{j_2},\cdots,w_{j_l}>0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

在命题 3.1 的证明中，我们实际上同时也证明了下列

命题 3.2 $S_J=\{j_1,\cdots,j_l\}\subset S_k$ 为 S_k 的前沿组合的构成集的充要条件为：不存在 $t_1,\cdots,t_k\in\mathbb{R}$，使得

1. 对于任何 $l\in S_k\setminus S_J$，$t_l\geqslant 0$，
2. $t_1^i+t_2^i+\cdots+t_k^i=0$，$t_1^i\mu_1+t_2^i\mu_2+\cdots+t_k^i\mu_k=0$，
3. 对于某个 $j\in S_J$，$t_1^iV_{1j}+t_2^iV_{2j}+\cdots+t_k^iV_{kj}<0$.

这样，以后的有关构成集的叙述都可取代为用这一充要条件来叙述.

定理 3.2 设 S_n 为 n 种证券的集合 $\{1,2,\cdots,n\}$. $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 为其相应的收益率. $\mu_i=E[r_i]$，$V_{ij}=\mathrm{Cov}\,[r_i,r_j]$，$i,j=1,2,\cdots,n$. $S_k=\{1,2,\cdots,k\}\subset S_n$. 那么在不允许卖空的条件下，$S_k$ 是 S_n 的极小风险子集的充分必要条件为

i) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\mu_i=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\mu_i,\qquad \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\mu_i=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\mu_i.$

ii) 对于 S_k 的任何前沿组合的构成集 $S_J\subset S_k$ 和任何 $i>k$，存在 $t_{J1}^i,t_{J2}^i,\cdots,t_{Jk}^i\in\mathbb{R}$ 满足

1. 对于任何 $l\notin S_J$，$t_{Jl}^i\geqslant 0$，
2. $t_{J1}^i+t_{J2}^i+\cdots+t_{Jk}^i=1$，$t_{J1}^i\mu_1+t_{J2}^i\mu_2+\cdots+t_{Jk}^i\mu_k=\mu_i$，
3. 对于任何 $j\in S_J$，$V_{ij}\geqslant t_{J1}^iV_{1j}+t_{J2}^iV_{2j}+\cdots+t_{Jk}^iV_{kj}$.

证　*必要性* 设 S_k 是 S_n 的极小风险子集. 那么 i) 显然是必要的，否则 S_k 生成的组合前沿不可能张成 S_n 的组合前沿. 同时，S_k 的每个前沿组合都一定是 S_n 的前沿组合. 设 $S_J\subset S_k$ 为 S_k 的一个构成集. 不妨设 $S_J=S_{k'}=\{1,\cdots,k'\}$，并先假设 $\mu_1\neq\mu_2$. 那么当

$$
\begin{aligned}
&w_1+w_2+\cdots+w_{k'}=1,\\
&V_{11}w_1+V_{12}w_2+\cdots+V_{1k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_1-\frac{1}{2}\lambda_2=0,\\
&V_{21}w_1+V_{22}w_2+\cdots+V_{2k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_2-\frac{1}{2}\lambda_2=0,\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&V_{k'1}w_1+V_{k'2}w_2+\cdots+V_{k'k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_2=0,\\
&V_{k'+1,1}w_1+V_{k'+1,2}w_2+\cdots+V_{k'+1,k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_{k'+1}-\frac{1}{2}\lambda_2\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
&V_{k1}w_1+V_{k2}w_2+\cdots+V_{kk'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_k-\frac{1}{2}\lambda_2\geqslant 0,\\
&\quad w_1,w_2,\cdots,w_{k'}>0
\end{aligned}
$$

有解为 $(w_1,\cdots,w_{k'},\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^{k'+2}$ 时，一定存在 $\lambda_1',\lambda_2'\in\mathbb{R}$, 使得

$$
\begin{aligned}
&w_1+w_2+\cdots+w_{k'}=1,\\
&V_{11}w_1+V_{12}w_2+\cdots+V_{1k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1'\mu_1-\frac{1}{2}\lambda_2'=0,\\
&V_{21}w_1+V_{22}w_2+\cdots+V_{2k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1'\mu_2-\frac{1}{2}\lambda_2'=0,\\
&\vdots\\
&V_{k'1}w_1+V_{k'2}w_2+\cdots+V_{k'k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1'\mu_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_2'=0,\\
&V_{k'+1,1}w_1+V_{k'+1,2}w_2+\cdots+V_{k'+1,k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1'\mu_{k'+1}-\frac{1}{2}\lambda_2'\geqslant 0,\\
&\vdots\\
&V_{k1}w_1+V_{k2}w_2+\cdots+V_{kk'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1'\mu_k-\frac{1}{2}\lambda_2'\geqslant 0,\\
&V_{i1}w_1+V_{i2}w_2+\cdots+V_{ik'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda_1'\mu_k-\frac{1}{2}\lambda_2'\geqslant 0,\qquad i>k,\\
&\quad w_1,w_2,\cdots,w_{k'}>0.
\end{aligned}
$$

由 $\mu_1\neq\mu_2$ 和第二、三个方程，立即可得 $\lambda_1^{k'}=\lambda_1'$, $\lambda_2^{k'}=\lambda_2'$, 这说明由 (6) 可导出 (7). 因此，由命题 3.1 导得 ii) 成立. 如果 $S_{k'}$ 中所有证券的收益都等于 μ_0, 那么当 $\mu_i=\mu_0$ 时，任何问题

$$
\begin{aligned}
&w_1+w_2+\cdots+w_{k'}=1,\\
&V_{11}w_1+V_{12}w_2+\cdots+V_{1k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda=0,\\
&V_{21}w_1+V_{22}w_2+\cdots+V_{2k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda=0,\\
&\vdots\\
&V_{k'1}w_1+V_{k'2}w_2+\cdots+V_{k'k'}w_{k'}-\frac{1}{2}\lambda=0,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
w_1,w_2,\cdots,w_{k'}>0 \tag{14}
$$

的解 $(w_1,\cdots,w_{k'},\lambda)\in\mathbb{R}^{k'+1}$ 作为问题

$$
\begin{aligned}
\min\quad &\sigma_w^2=\sum_{l,j=1}^{k'}V_{lj}w_lw_j\\
\text{s.t.}\quad &w_1+w_2+\cdots+w_{k'}=1,\\
&w_l\geqslant 0,\qquad i=1,2,\cdots,k'
\end{aligned}
\tag{15}
$$

的解也一定是

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma_w^2 = \sum_{l,j=1}^{k'} (V_{lj} w_l w_j + V_{ij} w_i w_j) \\ \text{s.t.} \quad & w_1 + w_2 + \cdots + w_{k'} + w_i = 1, \\ & w_l \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, k' \end{aligned} \tag{16}$$

的解，否则会与 S_k 是 S_n 的极小风险子集矛盾．从而总有

$$V_{i1} w_1 + V_{i2} w_2 + \cdots + V_{ik'} w_{k'} - \frac{1}{2}\lambda \geqslant 0.$$

同样应用命题 3.1, 可得对于取 $t_{k'+1}^i = \cdots = t_k^i = 0$ (相当于对于任何 $j \in S_k \setminus S_J$, $t_j^i = 0$) 的 ii) 成立．如果 $\mu_i \neq \mu_0$, 那么我们总能找到 λ_1, 使得对于任何满足 (13) 的 $(w_1, \cdots, w_{k'}, \lambda) \in \mathbb{R}^{k'+1}$, 也满足

$$V_{i1} w_1 + V_{i2} w_2 + \cdots + V_{ik'} w_{k'} - \frac{1}{2}\lambda_1(\mu_i - \mu_0) - \frac{1}{2}\lambda \geqslant 0.$$

因此，作适当变换，同样可应用命题 3.1, 使得对于取 $t_{k'+1}^i = \cdots = t_k^i = 0$ 的 ii) 成立．

注 从以上证明还可看出，由于 "S_k 是 S_n 的极小风险子集" 这一条件比命题 3.1 的假设还要强，我们实际上可以指出在 ii) 中可对任何 $j \in S_k \setminus S_J$, 取 $t_j^i = 0$.

充分性　与命题 3.1 的证明基本一样，即如果 ii) 成立，那么对于任何满足 (12) 的 $(w_{j_1}, \cdots, w_{j_l}, \lambda_1, \lambda_2)$ 和 $i > k$, 一定也满足

$$V_{ij_1} w_{j_1} + V_{ij_2} w_{j_2} + \cdots + V_{ij_l} w_{j_l} - \frac{1}{2}\lambda_1 \mu_i - \frac{1}{2}\lambda_2 \geqslant 0.$$

因此， S_k 的每个前沿组合都一定也是 S_n 的前沿组合．再加上条件 i), 可知 S_k 是 S_n 的极小风险子集.

推论 满足条件 i) 的 S_k 是 S_n 的 (不允许卖空) 的极小风险子集的充分条件为对于任何 $i > k$, 存在 $t_1^i, t_2^i, \cdots, t_k^i \geqslant 0$ 满足

1. $t_1^i + t_2^i + \cdots + t_k^i = 1$, $t_1^i \mu_1 + t_2^i \mu_2 + \cdots + t_k^i \mu_k = \mu_i$,
2. 对于任何 $j = 1, \cdots, k$, $V_{ij} \geqslant t_1^i V_{1j} + t_2^i V_{2j} + \cdots + t_k^i V_{kj}$.

这一推论在形式上与定理 3.1 更为接近．人们似乎可以希望这里的 "充分" 能改进为 "充分必要"．但是推论中的条件不是必要的．事实上，用同样的方法可以证明下列结果：推论中的条件等价于不存在 $(w_1, \cdots, w_k, \lambda_1, \lambda_2)$ 是下列线性不等方程组的解：

$$\begin{aligned} & w_1 + w_2 + \cdots + w_k = 1, \\ & V_{11} w_1 + V_{12} w_2 + \cdots + V_{1k} w_k - \frac{1}{2}\lambda_1 \mu_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 \geqslant 0, \\ & V_{21} w_1 + V_{22} w_2 + \cdots + V_{2k} w_k - \frac{1}{2}\lambda_1 \mu_2 - \frac{1}{2}\lambda_2 \geqslant 0, \\ & \qquad \vdots \\ & V_{k1} w_1 + V_{k2} w_2 + \cdots + V_{kk} w_k - \frac{1}{2}\lambda_1 \mu_k - \frac{1}{2}\lambda_2 \geqslant 0, \\ & \qquad w_1, w_2, \cdots, w_k > 0, \\ & V_{i1} w_1 + V_{i2} w_2 + \cdots + V_{ik} w_k - \frac{1}{2}\lambda_1 \mu_i - \frac{1}{2}\lambda_2 < 0, \qquad \forall i > k. \end{aligned}$$

这样的表达形式与 Farkas 引理 (参看 [10]) 非常接近. 实际上，我们的主要命题 3.1 就是 Farkas 引理的一个推广. 从这一表达形式中，我们立即可以看出推论中的条件一般不可能为 “S_k 是 S_n 的 (不允许卖空) 的极小风险子集的必要条件”.

用同样的推理，我们也可知道，下列条件既不是必要条件也不是充分条件：对于任何 $i>k$, 存在 $t_1^i,t_2^i,\cdots,t_k^i\in\mathbb{R}$ 满足

1. $t_1^i+t_2^i+\cdots+t_k^i=1,\ t_1^i\mu_1+t_2^i\mu_2+\cdots+t_k^i\mu_k=\mu_i$,
2. 对于任何 $j=1,\cdots,k,\ V_{ij}\geqslant t_1^iV_{1j}+t_2^iV_{2j}+\cdots+t_k^iV_{kj}$.

事实上，它等价于：不存在 $(w_1,\cdots,w_k,\lambda_1,\lambda_2)$ 是下列线性不等方程组的解：

$$\begin{aligned}
&w_1+w_2+\cdots+w_k=1,\\
&V_{11}w_1+V_{12}w_2+\cdots+V_{1k}w_k-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_1-\frac{1}{2}\lambda_2=0,\\
&V_{21}w_1+V_{22}w_2+\cdots+V_{2k}w_k-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_2-\frac{1}{2}\lambda_2=0,\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&V_{k1}w_1+V_{k2}w_2+\cdots+V_{kk}w_k-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_k-\frac{1}{2}\lambda_2=0,\\
&V_{i1}w_1+V_{i2}w_2+\cdots+V_{ik}w_k-\frac{1}{2}\lambda_1\mu_i-\frac{1}{2}\lambda_2<0,\qquad\forall i>k,\\
&\qquad w_1,w_2,\cdots,w_k\geqslant 0.
\end{aligned}$$

因此，它是 “ S_k 的允许卖空的组合前沿恒同于在 S_k 上允许卖空，在 S_n 上不允许卖空的组合前沿” 的充要条件. 不过，当 S_k 是 S_n 的唯一的不允许卖空的前沿组合的构成集时，它也是 “ S_k 为 S_n 的不允许卖空的有效子集” 的充要条件.

4 关于有效子集的主要定理

上一节得到的都是有关 S_k 是 S_n 的极小风险子集的结果. 在不允许卖空的情形下，同样的结果对于有效子集不再成立. 问题在于两个证券集的有效前沿一致，并不意味着它们的组合前沿一致.

下列定理的证明与定理 3.2 的证明基本一样，其中构成集的定义与前面类似.

定理 4.1 设 S_n 为 n 种证券的集合 $\{1,2,\cdots,n\}$. $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 为其相应的收益率. $\mu_i=E[r_i],\ V_{ij}=\mathrm{Cov}\,[r_i,r_j],\ i,j=1,2,\cdots,n.\ S_k=\{1,2,\cdots,k\}\subset S_n$. 那么在不允许卖空的条件下， S_k 是 S_n 的有效子集的充分必要条件为

i) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\mu_i=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\mu_i,\qquad \mu^k_{\min\sigma_w}=\mu^n_{\min\sigma_w}$.

ii) 对于 S_k 的任何有效组合的构成集 $S_J\subset S_k$ 和任何 $i>k$, 存在 $t^i_{J1},t^i_{J2},\cdots,t^i_{Jk}$ 满足

1. 对于任何 $l\notin S_J,\ t^i_{Jl}\geqslant 0$,
2. $t^i_{J1}+t^i_{J2}+\cdots+t^i_{Jk}=1,\ t^i_{J1}\mu_1+t^i_{J2}\mu_2+\cdots+t^i_{Jk}\mu_k=\mu_i$,
3. 对于任何满足 $\mu_j\geqslant\mu^n_{\min\sigma_w}$ 的 $j\in S_J,\ V_{ij}\geqslant t^i_{J1}V_{1j}+t^i_{J2}V_{2j}+\cdots+t^i_{Jk}V_{kj}$.

证 现在的情形与极小风险子集情形的不同就在于多了一个不等式：

$$w_{j_1}\mu_{j_1}+w_{j_2}\mu_{j_2}+\cdots+w_{j_l}\mu_{j_l}\geqslant\mu^n_{\min\sigma_w},$$

它也可改写为

$$w_{j_1}(\mu_{j_1}-\mu^n_{\min\,\sigma_w})+w_{j_2}(\mu_{j_2}-\mu^n_{\min\sigma_w})+\cdots+w_{j_l}(\mu_{j_l}-\mu^n_{\min\sigma_w})\geqslant 0.$$

从而在必要性证明中，用同样的方法，可以证得：

对于任何上述的证券集 $S_J \subset S_k$ 和任何 $i > k$, 存在 $t^i_{J0}, t^i_{J1}, t^i_{J2}, \cdots, t^i_{Jk}$ 满足

1. $t^i_{J0} \geqslant 0$, 对于任何 $l \notin S_J$, $t^i_{Jl} \geqslant 0$,
2. $t^i_{J1} + t^i_{J2} + \cdots + t^i_{Jk} = 1$, $t^i_{J1}\mu_1 + t^i_{J2}\mu_2 + \cdots + t^i_{Jk}\mu_k = \mu_i$,
3. 对于任何 $j \in S_J$, $V_{ij} \geqslant t^i_{J0}(\mu_j - \mu^n_{\min\sigma_w}) + t^i_{J1}V_{1j} + t^i_{J2}V_{2j} + \cdots + t^i_{Jk}V_{kj}$.

但是当 $\mu_j < \mu^n_{\min\sigma_w}$ 时，我们总可取足够大的 t^i_{J0} 使这一条件满足；而在 $\mu_j \geqslant \mu^n_{\min\sigma_w}$ 时，我们又总可取 $t^i_{J0} = 0$. 因此，定理中的条件 ii) 的必要性得证．其余部分的证明，或是显然，或是与原来一样.

推论　设两种证券的收益率分别为 r_1 和 r_2. 那么第二种证券不改变第一种证券的不允许卖空的“有效前沿”的充要条件为或者 $E[r_2] < E[r_1]$, 或者

$$E[r_2] = E[r_1], \qquad \mathrm{Cov}\,[r_1, r_2] \geqslant \mathrm{Var}[r_1].$$

在允许卖空的情形中, 这里的不等号都将改为等号. 由此可看出两种情形的根本不同.

定理 4.1 还可以推广到更一般的情形．为此，设

$$[\mu_a, \mu_b] \subset \Big[\min_{1\leqslant i\leqslant n} \mu_i, \max_{1\leqslant i\leqslant n} \mu_i\Big].$$

我们称 S_k 为 S_n 的 $[\mu_a, \mu_b]$-**极小风险子集**, 是指 S_k 的组合前沿与 S_n 的组合前沿在收益区间 $[\mu_a, \mu_b]$ 上一致．用同样的方法，我们立即可以证明下列定理.

定理 4.2　设 S_n 为 n 种证券的集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$. $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 为其相应的收益率. $\mu_i = E[r_i]$, $V_{ij} = \mathrm{Cov}\,[r_i, r_j]$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$. $S_k = \{1, 2, \cdots, k\} \subset S_n$. 那么在不允许卖空的条件下， S_k 是 S_n 的 $[\mu_a, \mu_b]$- 极小风险子集的充分必要条件为

i)　$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} \mu_i \geqslant \mu_b, \qquad \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} \mu_i \leqslant \mu_a.$

ii)　对于 S_k 的任何 $[\mu_a, \mu_b]$- 极小风险组合的构成集 $S_J \subset S_k$ 和任何 $i > k$, 存在 $t^i_{J1}, t^i_{J2}, \cdots, t^i_{Jk}$ 满足

1. 对于任何 $l \notin S_J$, $t^i_{Jl} \geqslant 0$,
2. $t^i_{J1} + t^i_{J2} + \cdots + t^i_{Jk} = 1$, $t^i_{J1}\mu_1 + t^i_{J2}\mu_2 + \cdots + t^i_{Jk}\mu_k = \mu_i$,
3. 对于任何满足 $\mu_j \in [\mu_a, \mu_b]$ 的 $j \in S_J$, $V_{ij} \geqslant t^i_{J1}V_{1j} + t^i_{J2}V_{2j} + \cdots + t^i_{Jk}V_{kj}$.

5　CAPM 型定理

把定理 3.1 与二基金分离定理结合起来，我们在 [1] 中还得到下列有趣的结果：

定理 5.1　设 S_n 为 n 种证券的集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$, 组合 w_p 和 w_q 分别是均值 — 方差组合选择问题 (1) 对于期望收益率 $\overline{\mu}$ 为 μ_p 和 μ_q 的解，并且 $\mu_p \neq \mu_q$. 它们所对应的收益率分别是 r_{w_p} 和 r_{w_q}. 那么任何收益率为 r' 的证券 u 不改变 S_n 的有效前沿的充分必要条件为存在 $w \in \mathbb{R}$, 使得

$$E[r'] = (1-w)E[r_{w_p}] + wE[r_{w_q}], \tag{17}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Cov}\,[r', r_{w_p}] = (1-w)\mathrm{Var}\,[r_{w_p}] + w\mathrm{Cov}\,[r_{w_p}, r_{w_q}] \\ \mathrm{Cov}\,[r', r_{w_q}] = (1-w)\mathrm{Cov}\,[r_{w_p}, r_{w_q}] + w\mathrm{Var}\,[r_{w_q}]. \end{array}\right. \tag{18}$$

特别是，如果 $\mathrm{Cov}\,[r_{w_p}, r_{w_q}] = 0$, 那么收益率为 r' 的证券 u 不改变 S_n 的有效前沿的充

分必要条件为下列“零 β CAPM ”成立：

$$E[r'] - E[r_{w_q}] = \beta'_{r'q}\big(E[r_{w_p}] - E[r_{w_q}]\big),$$
$$\beta'_{r'q} = \mathrm{Cov}\,[r', r_{w_p}]/\mathrm{Var}\,[r_{w_p}] = 1 - \mathrm{Cov}\,[r', r_{w_q}]/\mathrm{Var}\,[r_{w_q}].$$

如果收益率为常数 μ_0 的无风险资产与收益率为 r_m 的风险资产都为 S_n 的有效组合，那么充要条件为下列 CAPM 成立

$$E[r'] - \mu_0 = \beta'_{r'm}\big(E[r_m] - \mu_0\big), \qquad \beta'_{r'm} = \mathrm{Cov}\,[r', r_m]/\mathrm{Var}\,[r_m].$$

类似的结果对于不允许卖空的情形是不成立的．这不但是因为二基金定理不再成立，甚至在二基金定理仍然成立时，其结果也不再相同．事实上，由定理 3.3, 我们有下列定理：

定理 5.2 设 S_2 为 2 种证券的集合 $\{1,2\}$, 它们所对应的收益率分别是 r_1 和 r_2, 且 $E[r_1] \neq E[r_2]$. 那么任何收益率为 r 的证券 u 在不允许卖空的条件下不改变 S_2 的组合前沿的充分必要条件为存在 $w \in [0,1]$, 使得

$$E[r] = (1-w)E[r_1] + wE[r_2], \tag{19}$$
$$\begin{cases} \mathrm{Cov}\,[r, r_1] \geqslant (1-w)\mathrm{Var}\,[r_1] + w\mathrm{Cov}\,[r_1, r_2] \\ \mathrm{Cov}\,[r, r_2] \geqslant (1-w)\mathrm{Cov}\,[r_1, r_2] + w\mathrm{Var}\,[r_2]. \end{cases}$$

特别是，如果 $\mathrm{Cov}\,[r_1, r_2] = 0$, 那么收益率为 r 的证券 u 在不允许卖空的条件下不改变 S_2 的极小风险前沿的充分必要条件为下列拟“零 β CAPM ”成立：

$$E[r] - E[r_2] = \beta_{r2}\big(E[r_1] - E[r_2]\big),$$
$$\max\big\{0, 1 - \mathrm{Cov}\,[r, r_2]/\mathrm{Var}[r_2]\big\} \leqslant \beta_{r2} \leqslant \min\big\{1, \mathrm{Cov}\,[r, r_1]/\mathrm{Var}[r_1]\big\}.$$

如果 S_2 就包含收益率为常数 μ_0 的无风险资产与收益率为 r_m 的风险资产，那么相应的充要条件为下列“拟 CAPM ”成立

$$E[r] - \mu_0 = \beta_{rm}\big(E[r_m] - \mu_0\big), \qquad 0 \leqslant \beta_{rm} \leqslant \min\big\{1, \mathrm{Cov}\,[r, r_m]/\mathrm{Var}[r_m]\big\}.$$

当然，我们这里只是就定理 5.1 与定理 5.2 的比较而言，而提出 CAPM 对于不允许卖空的情形一般不再成立．对于一般均衡框架下的 CAPM (参看 [11]), r_m 为市场组合的收益率，而市场组合意味着每种证券都有正权重的组合．在市场组合为有效组合时，允许卖空与不允许卖空条件下的有效组合将是一样的．这时 CAPM 就没有区别．然而，一般均衡框架下的 CAPM 是理想状态．我们这里的讨论显然更有实际意义．实际计算 CAPM 时，常常用市场指数来代替市场组合，而市场指数组合绝非包含所有证券的市场组合．在这种情况下，上述结果显然对于不允许卖空的证券市场的分析更有意义．

对于不允许卖空的证券组合来说，最重要的还是二基金定理不再成立．正如，我们在第二节中所指出的那样，在不允许卖空的情形下，在风险 — 收益平面上，组合前沿一般将由若干段双曲线段或直线段组成．这时，最坏的可能为 n 种证券将都是“拐角组合”，以至整个组合前沿，甚至有效前沿将都要通过 n 种“基金”来生成．这时的“拟 CAPM ”就更为复杂．但是定理 5.1 有典型意义．一般的 S_n 的组合前沿可由若干拐角组合来决定．而每一种证券和每一种组合的期望收益都在某两个相邻的拐角组合的期望收益之间．于是这一证券或组合与这两个相邻拐角组合之间的关系就如同定理 5.1 中所说的那样．这一结果启示我们，对不允许卖空的证券市场，应该根据期望收益来分组，并且每一组中都有自己的拟 CAPM. 这样的思路看来值得进一步研究.

参 考 文 献

1 史树中，杨杰．证券组合选择的有效子集． *应用数学学报*, 2002, 25(1): 176–186
(Shi Shuzhong, Yang Jie. Efficient Subset for Portfolio Selection. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2002, 25(1): 176–186)
2 Markowitz H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 1952, 7: 77–91
3 Markowitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. Cambridge: Basil Blackwell, 1959, 1991 Second ed.
4 Huang Chi-fu, Litzenberger R H. Foundations for Financial Economics. NJ: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988
5 杨杰，史树中．证券集的组合前沿分类与有效子集． *经济数学*, 2001, 18(1): 8–18
(Yang Jie, Shi Shuzhong. Classification of Portfolio Frontiers and Efficient Subset for Portfolio Selection. *Mathematics in Economics*, 2001, 18(1): 8–18)
6 Rothschild M, Stiglitz J E. Increasing Risk I: A Definition. *Journal of Economic Theory,* 1970, 2: 225–243
7 Rothschild M, Stiglitz J E. Increasing Risk Ⅱ: Its Economic Consequences. *Journal of Economic Theory,* 1971, 3: 66–84
8 Huberman G, Kandel S. Mean-variance Spanning. *Journal of Finance*, 1987, 42: 873–888
9 Szegö G P. Portfolio Theory, with Application to Bank Asset Management. New York: Academic Press, 1980
10 Rockafellar R T. Convex Analysis. Princeton: Princeton University Press, 1970
11 Jarrow R A. Finance Theory. NJ: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988
12 Constantinides G M, Malliaris A G. Portfolio Theory. In: Jarrow R A, Maksimovic V, Ziemba W T eds. Finance, Amsterdam: Elsevier, 1995, 1–30
13 Michaud R O. Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation. Boston: Havard Business School Press, 1998
14 Merton R C. On the Microeconomic Theory of Investment under Uncertainty. In Arrow K J, Intriligator M, eds., Handbook of Mathematical Economics, Vol. Ⅱ, Amsterdam: North-Holland, 1982, 601–609
15 Merton R C. Continuous-time Finance, Rev. ed. Oxford: Blackwell, 1992
16 Ross S. Mutual Fund Separation in Financial Theory: The Separating Distributions. *Journal of Economic Theory*, 1978, 17: 254–286

EFFICIENT SUBSET FOR PORTFOLIO SELECTION WITHOUT SHORT SELLING

Shi Shuzhong
(*Department of Finance, Guanghua School of Management, Peking University, Beijing* 100871)

Yang Jie
(*Nankai Institute of Mathematics, Tianjin* 300071)

Abstract An efficient subset for portfolio selection means that it may replace the original security set to generate the Markowitz portfolio efficient frontier. This paper gives a necessary and sufficient condition for a subset to be efficient without short selling.

Key words Markowitz portfolio selection theory, short selling, mean-variance analysis, efficient portfolio frontier, efficient subset