第 26 卷 第 2 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 26 No. 2
2003 年 4 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Apr., 2003

二阶微分方程边值问题的多重正解 *

程建纲

(烟台大学数学系，烟台 264005)

摘　要　基于 Leray-Schauder 度理论和上下解方法讨论非线性边值问题 $y''(t)+g(t,y)=0$, $y'(0)=0$, $y(1)=b\geq 0$ 的正解存在性，其中 g 局部 Lipschitz 连续，$g(t,0)\geq 0$, 但是可以是变号函数. 主要结论是：如果 $g(t,y)$ 在 $y=+\infty$ 满足一个超线性增长条件，并且存在使得 $\beta(1)>0$ 的非负上解 β, 则存在正数 B 使得当 $0<b<B$ 时，至少存在两个正解；当 $b=0$ 或 $b=B$ 时，至少存在一个正解；而当 $b>B$ 时，不存在正解.

关键词　边值问题，正解，存在性，上下解，拓扑度

1　问题的提出与主要结论

本文考虑二阶非线性微分方程边值问题

$$\begin{cases} y''(t)+g\big(t,y(t)\big)=0, & t\in(0,1), \\ y'(0)=0, \quad y(1)=b\geq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

的正解存在性，其中函数 g 不一定是非负函数，并且可能在 $t=1$ 附近具有奇异性，但满足

(H_1)　$g:[0,1)\times[0,\infty)\to(-\infty,\infty)$ 是连续函数，当 $t\in(0,1)$ 时 $g(t,0)\geq 0$.

(H_2)　对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$ 及 $m>0$, 存在 $L>0$ 使得

$$\big|g(t,z_1)-g(t,z_2)\big|\leq L|z_1-z_2|, \qquad t\in[0,1-\varepsilon], \qquad z_1,z_2\in[0,m]. \tag{1.2}$$

(H_3)　存在连续函数 $f:[0,+\infty)\to(-\infty,\infty)$ 使得 $\inf\limits_{t\in(0,1)} g(t,z)\geq f(z)$, $z\geq 0$.

(H_4)　对任意的 $m>0$, $\int_0^1(1-s)\max\limits_{z\in[0,m]}\big|g(s,z)\big|\,\mathrm{d}s<\infty$.

问题 (1.1) 来自于数学和应用的许多领域. 当 $g\geq 0$ 时，可以利用许多结论和方法来讨论其正解的存在性，唯一性，多解性等问题 [1−3]. 当 $g\leq 0$ 时，也可以利用与 [4] 所类似的方法来讨论当 b 比较大时正解的存在性. 但对 g 是变号函数的一般情形，对正解的存在性问题，目前所能使用的方法和已知的结论却很少. 本文的主要目的是对 g 仅可能在某个有界区域上改变符号的情形，利用拓扑度理论和上下解方法来讨论正解的存在性. 在本文中始终记集合

$$X=C[0,1]\cap C^1[0,1)\cap C^2(0,1), \qquad X^+=\big\{y\in X;\ y(t)\geq 0,\ t\in[0,1]\big\}. \tag{1.3}$$

本文 2000 年 12 月 15 日收到.
* 国家自然科学基金 (10071066, 10251002 号) 和山东省自然科学基金 (Y2002A10 号) 资助项目.

并且恒假设 f 由条件 (H_3) 给出．为了使得讨论方便起见，首先给出一个简单结论．

定理 1.1 设 $b\ge 0$，g 满足条件 (H_1) 与 (H_2)．若 $y\in X^+$ 是边值问题 (1.1) 的非负解，并且在 $[0,1]$ 上 $y(t)$ 不恒为零，则在 $[0,1)$ 上 $y(t)>0$．

证 记 $E=\{t\in[0,1);\ y(t)=0\}$．显然 E 是 $[0,1)$ 的闭集．因此由 $[0,1)$ 的连通性，仅需验证 E 也是 $[0,1)$ 的开集．对任意的 $r\in E$, 取 $m=1+\max\limits_{t\in[0,1]}y(t)$，$\varepsilon>0$ 满足 $r+\varepsilon<1-\varepsilon$, $L>0$ 由 (H_2) 给出，则由 (H_1), (H_2) 及 $y(r)=y'(r)=0$ 可知

$$
\begin{aligned}
0\le& y(t)=-\int_t^r \mathrm{d}s\int_s^r g\big(v,y(v)\big)\,\mathrm{d}v\le\int_t^r \mathrm{d}s\int_s^r \big[g(v,0)-g(v,y(v))\big]\,\mathrm{d}v\\
\le& L\int_t^r \mathrm{d}s\int_s^r y(v)\,\mathrm{d}v\le L\varepsilon\int_t^r y(v)\,\mathrm{d}v,\qquad t\in(r-\varepsilon,r]\cap[0,1),\\
0\le& y(t)=-\int_r^t \mathrm{d}s\int_r^s g\big(v,y(v)\big)\,\mathrm{d}v\le\int_r^t \mathrm{d}s\int_r^s \big[g(v,0)-g(v,y(v))\big]\,\mathrm{d}v\\
\le& L\int_r^t \mathrm{d}s\int_r^s y(v)\,\mathrm{d}v\le L\varepsilon\int_r^t y(v)\,\mathrm{d}v,\qquad t\in[r,r+\varepsilon).
\end{aligned}
$$

由此利用 Gronwall 不等式推得 $(r-\varepsilon,r+\varepsilon)\cap[0,1)\subset E$, 即 E 是 $[0,1)$ 的开集．

在定理 1.1 的基础上，本文的主要结论是

定理 1.2 设 g 满足条件 (H_1)–(H_4). 若存在 $M>0$，$\beta\in X^+$ 满足条件

(A_1) 当 $u>M$, $u>v\ge 0$ 时，$f(u)>0$，$\int_v^u f(z)\,\mathrm{d}z>0$，

(A_2) 当 $u>M$ 时，$\int_0^u\big(\int_v^u f(z)\,\mathrm{d}z\big)^{-1/2}\mathrm{d}v<\sqrt{2}$，

(A_3) $\beta'(0)\le 0$，$\beta''(t)+g\big(t,\beta(t)\big)\le 0$，$t\in(0,1)$．$\beta(1)>0$，

则存在正常数 $B\in\big[\beta(1),M\big]$ 使得当 $0\le b<B$ 时，边值问题 (1.1) 至少存在两个非负解；当 $b=B$ 时，边值问题 (1.1) 至少存在一个非负解；当 $b>B$ 时，边值问题 (1.1) 不存在非负解.

定理 1.2 的证明将在本文的第 3 节中给出．而为了便于证明此定理，在第 2 节中给出一些预备引理．下面作为定理 1.2 的补充，来讨论条件 (A_1), (A_2) 及 (A_3) 的某些特殊情形.

定理 1.3 若 $\lim\limits_{z\to+\infty}f(z)/z=+\infty$, 则存在 $M>0$ 满足条件 (A_1) 与 (A_2).

证 取 $c>0$, 使得当 $z\ge c$ 时 $f(z)\ge 2\pi^2 z$. 取 $M>c$, 使得当 $u\ge M$ 时 $\int_c^u f(z)\,\mathrm{d}z-\int_0^c\big|f(z)\big|\,\mathrm{d}z\ge 4c^2$, 则当 $u>M$，$u>v\ge 0$ 时，

$$\int_v^u f(z)\,\mathrm{d}z\ge\int_v^u 2\pi^2 z\,\mathrm{d}z=\pi^2(u^2-v^2)>0,\qquad v>c,\tag{1.4}$$

$$\int_v^u f(z)\,\mathrm{d}z\ge\int_c^u f(z)\,\mathrm{d}z-\int_0^c\big|f(z)\big|\,\mathrm{d}z\ge 4c^2>0,\qquad v\in[0,c].\tag{1.5}$$

并且由 (1.4), (1.5) 推得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^u\Big(\int_v^u f(z)\,\mathrm{d}z\Big)^{-1/2}\mathrm{d}v=\int_0^c\Big(\int_v^u f(z)\,\mathrm{d}z\Big)^{-1/2}\mathrm{d}v+\int_c^u\Big(\int_v^u f(z)\,\mathrm{d}z\Big)^{-1/2}\mathrm{d}v\\
\le&\frac12+\frac1\pi\int_c^u(u^2-v^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}v<\frac12+\frac1\pi\int_0^u(u^2-v^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}v=1<\sqrt2.
\end{aligned}\tag{1.6}
$$

由此可知对此 $M>0$ 条件 (A_1) 与 (A_2) 满足.

定理 1.4 若存在 $b_0>0$ 使得 $g(t,b_0)\le 0,\ t\in(0,1)$, 则存在 $\beta\in X^+$ 满足条件 (A_3).

证 取 $\beta(t)\equiv b_0$, 则显然 $\beta\in X^+$ 满足条件 (A_3).

定理 1.5 若存在单调递增连续函数 $a:(0,1)\to(0,+\infty)$, 连续函数 $h:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 及 $c>0$ 使得

$$g(s,z)\le a(s)h(z),\qquad s\in(0,1),\quad z\in(0,c), \tag{1.7}$$

$$\int_0^c\Big(\int_v^c h(z)\,\mathrm{d}z\Big)^{-1/2}\mathrm{d}v>\int_0^1\sqrt{2a(s)}\,\mathrm{d}s, \tag{1.8}$$

则存在 $\beta\in X^+$ 满足条件 (A_3).

证 对每个 $\delta\in(0,1/2)$, 记 $a_\delta(s)=\big[\delta(1-s)\big]^{-1}\int_s^{s+\delta(1-s)}a(r)\,\mathrm{d}r$, 则由 a 单调递增可知 $a(s)\le a_\delta(s)\le a\big((1+s)/2\big)$, $a_\delta'(s)\ge 0$. 利用控制收敛定理，取定 $\delta\in(0,1/2)$ 满足

$$\int_0^c\Big(\int_v^c h(z)\,\mathrm{d}z\Big)^{-1/2}\mathrm{d}v>\int_0^1\sqrt{2a_\delta(s)}\,\mathrm{d}s. \tag{1.9}$$

取 $\beta(t)$ 为积分方程

$$\int_{\beta(t)}^c\Big(\int_v^c h(z)\,\mathrm{d}z\Big)^{-1/2}\mathrm{d}v=\int_0^t\sqrt{2a_\delta(s)}\,\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,1] \tag{1.10}$$

满足条件 $\beta(t)\in(0,c]$ 的唯一解，则由 a_δ 是单调递增连续可微函数及 (1.9) 可知

$$\beta(0)=c;\qquad 0<\beta(t)<c,\quad t\in(0,1);\qquad \beta(1)>0, \tag{1.11}$$

$$\beta'(t)=-\Big(2a_\delta(t)\int_{\beta(t)}^c h(z)\,\mathrm{d}z\Big)^{1/2}<0,\qquad t\in(0,1), \tag{1.12}$$

$$\beta'(t)\big[\beta''(t)+a_\delta(t)h(\beta(t))\big]=a_\delta'(t)\int_{\beta(t)}^c h(z)\,\mathrm{d}z\ge 0,\qquad t\in(0,1). \tag{1.13}$$

进而结合 (1.7) 及 $a(t)\le a_\delta(t)$ 推得 $\beta\in X^+$ 满足条件 (A_3).

定理 1.6 若存在连续函数 $a:[0,1)\to(0,+\infty)$ 使得

$$\lim_{z\to0+}\sup_{s\in(0,1)}\frac{\max\{0,g(s,z)\}}{a(s)z}=0,\qquad \int_0^1\sqrt{\max_{r\in[0,s]}a(r)}\,\mathrm{d}s<\infty, \tag{1.14}$$

则存在 $\beta\in X^+$ 满足条件 (A_3).

证 记

$$\lambda=\pi^2\Big(4\int_0^1\sqrt{2\max_{r\in[0,s]}a(r)}\,\mathrm{d}s\Big)^{-2}.$$

取 $c>0$ 满足

$$g(s,z)\le 2\lambda z\max_{r\in[0,s]}a(r),\qquad s\in(0,1),\quad z\in(0,c). \tag{1.15}$$

记 $h(z)=2\lambda z$. 由 $\max\limits_{r\in[0,s]}a(r)$ 关于 $s\in[0,1)$ 是单调递增连续函数，且

$$\int_0^c\Big(\int_v^c h(z)\,\mathrm{d}z\Big)^{-1/2}\mathrm{d}v=\int_0^c\Big(\int_v^c 2\lambda z\,\mathrm{d}z\Big)^{-1/2}\mathrm{d}v=\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}=2\int_0^1\sqrt{2\max_{r\in[0,s]}a(r)}\,\mathrm{d}s,$$

利用定理 1.5 可知存在 $\beta \in X^+$ 满足条件 (A_3).

最后给出一个例子来简要地说明上述结论的应用.

例 1.1 设 $a_1, a_2 : [0,1) \to [0,+\infty)$ 是非负连续函数， $h_1, h_2 : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 是非负的局部 Lipschitz 连续函数，并且

$$\inf_{s\in[0,1)} a_1(s) > 0, \qquad \sup_{s\in[0,1)} a_2(s) < +\infty, \qquad \int_0^1 (1-s)a_1(s)\,\mathrm{d}s < \infty,$$
$$h_2(0) = 0, \qquad \lim_{z\to+\infty} h_1(z)/z = +\infty, \qquad \lim_{z\to+\infty} h_2(z)/z = 0.$$

若以下两条件之一满足：

(1) 存在 $b_0 > 0$ 使得 $h_1(b_0) = 0$;

(2) $\lim\limits_{z\to 0+} h_1(z)/z = 0$, $\int_0^1 \sqrt{\max\limits_{r\in[0,s]} a_1(r)}\,\mathrm{d}s < \infty$,

则对边值问题

$$\begin{cases} y''(t) + a_1(t)h_1\big(y(t)\big) - a_2(t)h_2\big(y(t)\big) = 0, & t \in (0,1), \\ y'(0) = 0, \quad y(1) = b \ge 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

存在 $B > 0$ 使得当 $b = 0$ 或 $b = B$ 时至少存在一个正解；当 $0 < b < B$ 时至少存在两个正解；当 $b > B$ 时不存在非负解.

证 取 $g(t,z) = a_1(t)h_1(z) - a_2(t)h_2(z)$, $f(z) = h_1(z)\inf\limits_{t\in[0,1)} a_1(t) - h_2(z)\sup\limits_{t\in[0,1)} a_2(t)$, 则显然 ($H_1$)–($H_4$) 满足，并且由定理 1.3 可知存在 $M > 0$ 满足 (A_1) 与 (A_2). 又由定理 1.4 与 1.6 可知存在 $\beta \in X^+$ 满足 (A_3). 最后由定理 1.1 与 1.2 推得此例中的结论成立.

2 某些预备引理

引理 2.1 设 $b \ge 0$, g 满足 (H_1)–(H_4), $x_1 \in X^+$, $g_1 : [0,1) \times [0,\infty) \to (-\infty,\infty)$ 是连续函数. 若

(1) $x_1'(0) \ge 0$, 在 $(0,1)$ 上 $x_1''(t) + g\big(t, x_1(t)\big) \ge 0$, 并且 $x_1(1) \le b$,

(2) 当 $t \in (0,1)$, $z \le x_1(t)$ 时， $g_1(t,z) = g\big(t, x_1(t)\big)$,

则当 $y \in X$ 是边值问题

$$y''(t) + g_1\big(t, y(t)\big) = 0, \quad t \in (0,1); \qquad y'(0) = 0, \qquad y(1) = b \tag{2.1}$$

的解时，在 $[0,1]$ 上 $y(t) \ge x_1(t)$.

证 记 $z(t) = y(t) - x_1(t)$. 若 $z(0) < 0$, 则由 $z(1) \ge 0$, 取 $t_2 = \inf\big\{t; z(t) \ge 0\big\}$. 由于在 $(0,t_2)$ 上 $z''(t) \le g\big(t, x_1(t)\big) - g_1\big(t, y(t)\big) = 0$, 因此结合 $z'(0) \le 0$ 推得在 $(0,t_2)$ 上 $z'(t) \le 0$, 与 $z(t_2) = 0$ 矛盾. 若 $r \in (0,1)$ 使得 $z(r) < 0$, 取 $t_1 = \sup\big\{t < r;\ z(t) \ge 0\big\}$, $t_2 = \inf\big\{t > r;\ z(t) \ge 0\big\}$, 则在 (t_1,t_2) 上 $z''(t) \le g\big(t, x_1(t)\big) - g_1\big(t, y(t)\big) = 0$, 与 $z(t_1) = z(t_2) = 0$, $z(r) < 0$ 且 $r \in (t_1,t_2)$ 矛盾.

用完全类似的方法可以验证如下的引理 2.2.

引理 2.2 设 $b \ge 0$, g 满足 (H_1)–(H_4), $x_2 \in X^+$, $g_2 : [0,1) \times [0,\infty) \to (-\infty,\infty)$ 是连续函数. 若

(1) $x_2'(0) \le 0$, 在 $(0,1)$ 上 $x_2''(t) + g\big(t, x_2(t)\big) \le 0$, 并且 $x_2(1) \ge b$,

(2) 当 $t \in (0,1)$, $z \ge x_2(t)$ 时， $g_2(t,z) = g\big(t, x_2(t)\big)$,

则当 $y\in X$ 是边值问题

$$y''(t)+g_2\big(t,y(t)\big)=0,\quad t\in(0,1);\qquad y'(0)=0,\qquad y(1)=b \tag{2.2}$$

的解时，在 $[0,1]$ 上 $y(t)\le x_2(t)$.

引理 2.3 设 g 满足 (H_1)–(H_4), $x_1,x_2\in X^+$ 并且在 $[0,1]$ 上 $x_1(t)\le x_2(t)$. 若定义积分算子

$$T(y)(t)=\int_0^t(1-t)G\big(s,y(s)\big)\,\mathrm{d}s+\int_t^1(1-s)G\big(s,y(s)\big)\,\mathrm{d}s, \tag{2.3}$$

其中

$$G(s,z)=\begin{cases} g\big(s,x_2(s)\big), & z>x_2(s),\\ g(s,z), & x_1(s)\le z\le x_2(s),\\ g\big(s,x_1(s)\big), & z<x_1(s),\end{cases} \tag{2.4}$$

则 $T:C[0,1]\to C[0,1]$ 是全连续算子.

证 由 $G:[0,1)\times[0,\infty)\to(-\infty,\infty)$ 是连续函数，并且

$$\sup_{z\in(-\infty,\infty)}\big|G(s,z)\big|\le\max\Big\{|g(s,z)|;\ z\in\Big[0,\max_{t\in[0,1]}x_2(t)\Big]\Big\},\qquad s\in(0,1), \tag{2.5}$$

利用条件 (H_4) 不难验证引理结论成立.

引理 2.4 设 g 满足 (H_1)–(H_4), $0\le b_1<b_2$. 若 y_1 与 y_2 分别是问题 (1.1) 当 $b=b_1$ 与 $b=b_2$ 时的非负解，并且在 $[0,1]$ 上 $y_1(t)\le y_2(t)$, 则在 $[0,1]$ 上 $y_1(t)<y_2(t)$.

证 首先由 $y_1'(0)=y_2'(0)$, 利用初值问题解的唯一性可知 $y_1(0)<y_2(0)$. 其次假若 $r\in(0,1)$ 使得 $y_1(r)=y_2(r)$, 则由 r 是 $y_1(t)-y_2(t)$ 的极大值点可知 $y_1'(r)=y_2'(r)$, 与初值问题解的唯一性矛盾.

引理 2.5 设 $b\ge0$, g 满足定理 1.2 的条件. 若 y 是问题 (1.1) 的非负解，并且 $\max\limits_{t\in[0,1]}y(t)>M$, 则 $y(0)>M$.

证 取 $r\in(0,1)$ 满足 $\max\limits_{t\in[0,r]}y(t)>M$. 仅需验证 $y(0)=\max\limits_{t\in[0,r]}y(t)$. 反证假设 $t_0\in(0,r]$ 使得 $y(t_0)=\max\limits_{t\in[0,r]}y(t)$. 由 (H_3) 及 (A_1) 可知 $y''(t_0)=-g\big(t_0,y(t_0)\big)\le-f\big(y(t_0)\big)<0$. 结合 $y'(t_0)\ge0$ 可知存在 $\varepsilon>0$ 使得在 $(t_0-\varepsilon,t_0)$ 上 $y'(t)>0$. 又由 $y'(0)=0$, 取 $t_1=\sup\big\{t\le t_0-\varepsilon;\ y'(t)\le0\big\}$. 显然 $y'(t_1)=0$, 且在 (t_1,t_0) 上 $y'(t)>0$. 进而利用 (H_3) 推得

$$\begin{aligned}-\big[y'(t_0)\big]^2/2&=-\int_{t_1}^{t_0}y''(t)y'(t)\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_0}g\big(t,y(t)\big)y'(t)\,\mathrm{d}t\\&\ge\int_{t_1}^{t_0}f\big(y(t)\big)y'(t)\,\mathrm{d}t=\int_{y(t_1)}^{y(t_0)}f(z)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

与 $y(t_0)>M$, $y(t_1)<y(t_0)$ 及 (A_1) 矛盾.

引理 2.6 设 $b\ge0$, g 满足定理 1.2 的条件. 若 y 是问题 (1.1) 的非负解，并且 $\max\limits_{t\in[0,1]}y(t)>M$, 则

(1) 当 $t\in(0,1)$ 时 $y'(t)<0$,

(2) $\int_b^{y(0)}\big(\int_v^{y(0)}f(z)\,\mathrm{d}z\big)^{-1/2}\mathrm{d}v\ge\sqrt{2}$.

证　由引理 2.5 及 (A_1) 可知存在 $\varepsilon>0$ 使得在 $(0,\varepsilon)$ 上 $y''(t)=-g\big(t,y(t)\big)\le -f\big(y(t)\big)<0$. 进而结合 $y'(0)=0$ 推得在 $(0,\varepsilon)$ 上 $y'(t)<0$. 若结论 (1) 不成立，则取 $t_2=\inf\big\{t>\varepsilon;\ y'(t)\ge 0\big\}$. 显然在 $(0,t_2)$ 上 $y'(t)<0$, 并且 $y'(t_2)=0$. 由此利用 (H_3) 推得

$$0=\int_0^{t_2} y''(t)y'(t)\,\mathrm{d}t\ge\int_0^{t_2} f\big(y(t)\big)\big[-y'(t)\big]\,\mathrm{d}t=\int_{y(t_2)}^{y(0)} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{2.6}$$

与 $y(0)>M$, $y(t_2)<y(0)$ 及 (A_1) 矛盾. 对结论 (2), 由结论 (1), (H_3) 及 $y'(0)=0$ 可知

$$\begin{aligned}\big[y'(t)\big]^2=&2\int_0^t y''(t)y'(t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^t g\big(t,y(t)\big)\big(-y'(t)\big)\,\mathrm{d}t\\ \ge&2\int_0^t f\big(y(t)\big)\big(-y'(t)\big)\,\mathrm{d}t=2\int_{y(t)}^{y(0)} f(z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{2.7}$$

再利用结论 (1), 引理 2.5 及 (A_1) 可知

$$-y'(t)\Big(\int_{y(t)}^{y(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\Big)^{-1/2}\ge\sqrt{2},\qquad t\in(0,1). \tag{2.8}$$

特别

$$\int_b^{y(0)}\Big(\int_v^{y(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\Big)^{-1/2}\mathrm{d}v=\int_0^1 -y'(t)\Big(\int_{y(t)}^{y(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\Big)^{-1/2}\mathrm{d}t\ge\sqrt{2}.$$

引理 2.7　设 $b\ge 0$, g 满足定理 1.2 的条件. 若 y 是问题 (1.1) 的非负解，则 $\max\limits_{t\in[0,1]} y(t)\le M$. 特别当 $b>M$ 时，问题 (1.1) 不存在非负解.

证　由引理 2.6 及条件 (A_2) 可知引理结论成立.

引理 2.8　若 g 满足定理 1.2 的条件，则当 $b=\beta(1)$ 时，问题 (1.1) 存在非负解 $y\in X^+$.

证　取 $x_1(t)\equiv 0$, $x_2(t)=\beta(t)$, 积分算子 T 及函数 G 分别由 (2.3) 与 (2.4) 给出. 若记 $\omega(t)\equiv\beta(1)$, 则由引理 2.3 及 Schauder 不动点定理可知存在 $y\in C[0,1]$ 使得 $y=T(y)+\omega$. 又由 (2.3) 推得 $y\in X$ 是边值问题

$$y''(t)+G\big(t,y(t)\big)=0,\quad t\in(0,1);\qquad y'(0)=0,\qquad y(1)=\beta(1) \tag{2.9}$$

的解. 最后由引理 2.1 与 2.2 可知在 $[0,1]$ 上 $0\le y(t)\le\beta(t)$, 进而 $y\in X^+$ 是问题 (1.1) 的非负解.

3　定理 1.2 的证明

由引理 2.7 与 2.8, 取 $B\in\big[\beta(1),M\big]$ 为

$$B=\sup\{b\ge\beta(1);\ \text{边值问题 (1.1) 存在非负解}\}. \tag{3.1}$$

显然当 $b>B$ 时，问题 (1.1) 不存在非负解. 若取 $b_n\le B$, $b_n\to B$, y_n 是问题 (1.1) 当 $b=b_n$ 时的非负解，则由 $y_n(t)=y_n(0)-\int_0^t(t-s)g\big(s,y_n(s)\big)\,\mathrm{d}s$ 利用 (H_4) 及引理 2.7 可知 $\{y_n\}$ 在 $C[0,1]$ 中存在收敛子列. 不失一般性，设 $y_n\to y_B$. 则由控制收敛定理可

知 $y_B \in X^+$ 是问题 (1.1) 当 $b = B$ 时的非负解，并且 $0 \le y_B(t) \le M$. 下面来验证当 $0 \le b < B$ 时问题 (1.1) 存在两个非负解. 在 Banach 空间 $C[0,1]$ 中取开集

$$\Omega_0 = \{y \in C[0,1];\ -2 < y(t) < M+1,\ t \in [0,1]\}, \tag{3.2}$$

$$\Omega_1 = \{y \in C[0,1];\ -1 < y(t) < y_B(t),\ t \in [0,1]\}. \tag{3.3}$$

由引理 2.3, 定义全连续算子 $T_0, T_1 : C[0,1] \to C[0,1]$ 为

$$T_i(y)(t) = \int_0^t (1-t) G_i\big(s, y(s)\big)\,\mathrm{d}s + \int_t^1 (1-s) G_i\big(s, y(s)\big)\,\mathrm{d}s, \qquad i = 0, 1, \tag{3.4}$$

其中

$$G_0(s,z) = \begin{cases} g(s, M+1), & z > M+1, \\ g(s,z), & 0 \le z \le M+1, \\ g(s,0), & z < 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$G_1(s,z) = \begin{cases} g\big(s, y_B(s)\big), & z > y_B(s), \\ g(s,z), & 0 \le z \le y_B(s), \\ g(s,0), & z < 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

另外对 $b \ge 0$, 记 $\omega(b) \in C[0,1]$ 为 $\omega(b)(t) \equiv b$.

第一步 若 $b \ge 0$, $y \in \overline{\Omega}_0$, $y = T_0(y) + \omega(b)$, 则由 (3.4) 可知 $y \in X$ 是边值问题

$$y''(t) + G_0\big(t, y(t)\big) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y(1) = b \tag{3.7}$$

的解. 进而利用引理 2.1 (其中 $x_1 \equiv 0$) 可知在 $[0,1]$ 上 $0 \le y(t)$. 结合 $y \in \overline{\Omega}_0$ 推得 $y \in X^+$ 是问题 (1.1) 的非负解. 又由引理 2.7 可知在 $[0,1]$ 上 $y(t) \le M$. 最后利用 Leray-Schauder 度的性质 [5, 第 20 节] 推得当 $b \ge 0$ 时

$$\deg\,\big(I - [T_0 + \omega(b)],\, \Omega_0,\, 0\big) = \deg\big(I - [T_0 + \omega(M+1)],\, \Omega_0,\, 0\big) = 0. \tag{3.8}$$

第二步 设 $0 \le b < B$. 一方面若 $y \in C[0,1]$, $y = T_1(y) + \omega(b)$, 则由 (3.4) 可知 $y \in X$ 是问题

$$y''(t) + G_1\big(t, y(t)\big) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y(1) = b \tag{3.9}$$

的解. 进而利用引理 2.1 (其中 $x_1 \equiv 0$) 及 2.2(其中 $x_2 = y_B$) 可知在 $[0,1]$ 上 $0 \le y(t) \le y_B(t)$. 由此推得 $y \in X^+$ 是问题 (1.1) 的非负解. 又由引理 2.4 可知在 $[0,1]$ 上 $y(t) < y_B(t)$, 特别 $y \in \Omega_1$. 另一方面由 $0 \le y_B(t) \le M$ 可知对任意的 $y \in C[0,1]$

$$\max_{t \in [0,1]} \big|T_1(y)(t) + \omega(b)(t)\big| \le \int_0^1 (1-s) \max_{z \in [0,M]} \big|g(s,z)\big|\,\mathrm{d}s + B. \tag{3.10}$$

最后利用 Leray-Schauder 度的性质推得当 $0 \le b < B$ 时

$$\deg\big(I - [T_1 + \omega(b)],\, \Omega_1,\, 0\big) = 1. \tag{3.11}$$

第三步 由于当 $y \in \overline{\Omega}_1$ 时 $T_0(y) = T_1(y)$, 因此由 (3.11) 推得当 $0 \le b < B$ 时

$$\deg\big(I - [T_0 + \omega(b)],\, \Omega_1,\, 0\big) = \deg\big(I - [T_1 + \omega(b)],\ \Omega_1,\ 0\big) = 1. \tag{3.12}$$

又由 (3.8), (3.12) 及 $\Omega_1 \subset \Omega_0$ 可知当 $0 \le b < B$ 时

$$\deg\big(I - [T_0 + \omega(b)],\ \Omega_0 \backslash \overline{\Omega}_1,\ 0\big) = -1. \tag{3.13}$$

最后由 (3.12), (3.13) 推得当 $0 \le b < B$ 时存在 $y_1 \in \Omega_1$, $y_2 \in \Omega_0 \backslash \overline{\Omega}_1$ 使得 $y_i = T_0(y_i) + \omega(b)$, $i = 1, 2$. 而由第一步的证明可知 y_1 与 y_2 是问题 (1.1) 的非负解.

参 考 文 献

1 翁佩萱，蒋达清．奇异二阶泛函微分方程边值问题的多重正解． 应用数学学报, 2000, 23(1): 99–107 (Weng Peixuan, Jiang Daqing. Multiple Positive Solutions for Boundary Value Problem of Second order Singular Functional Differential Equations. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2000, 23(1): 99–107)

2 Wang Junyu, Gao Wenjie. A Note on Singular Nonlinear Two-point Boundary-value Problems. *Nonlinear Analysis*, 2000, 39: 281–287

3 Liu Zhaoli, Li Fuyi. Multiple Positive Solutions of Nonlinear Two-point Boundary Value Problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1996, 203: 610–625

4 Agarwal R R, O'Regan D. A Note on Existence of Nonnegative Solutions to Singular Semi-positone Problems. *Nonlinear Analysis*, 1999, 36(5): 615–622

5 Krasnoselskii M A, Zabreiko P P. Geometrical Methods of Nonlinear Analysis. Berlin, Heidelbreg: Springer-Verlag, 1984

MULTIPLE POSITIVE SOLUTIONS FOR BOUNDARY VALUE PROBLEM OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

CHENG Jiangang

(*Department of Mathematics, Yantai University, Yantai* 264005)

Abstract The existence of positive solutions has been discussed for the nonlinear boundary value problem $y''(t) + g(t, y) = 0$, $y'(0) = 0$ and $y(1) = b \ge 0$, where g is locally Lipschitz continuous, $g(t, 0) \ge 0$ and may change sign. The main result as follows: If $g(t, y)$ satisfies a superlinear condition at $y = +\infty$ and there exists a nonnegative supersolution β with $\beta(1) > 0$, then there exists a positive number B such that this problem has at least two positive solutions for $0 < b < B$, at least one for $b = 0$ or $b = B$, and none for $b > B$. Our approach is based on the Leray-Schauder degree arguments and the method of sub- and supersolutions.

Key words Boundary value problem, positive solution, existence, sub- and supersolution, topological degree